D-ITET, D-MATL | Numerische Methoden | FS 2017

Dr. R. Käppeli

B. Fitzpatrick, D. Devaud

Serie 8

1. *Konsistenzordnung*

Bestimmen Sie die Konsistenzordung des Verfahrens von Heun gegeben durch folgendes Butcher-Tableau:

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Hinweis: Studieren Sie Beispiel (18) in der Vorlesung.

2. *Autonomisierungsinvariante Runge-Kutta Verfahren*

Ein Runge-Kutta Verfahren heisst *autonomisierungsinvariant*, wenn für dessen Koeffizienten

$$c_i = \sum_{l=1}^{s} a_{il} \quad \text{für } i = 1, \ldots, s \tag{1}$$

gilt. Diese Eigenschaft stellt sicher, dass man identische Ergebnisse für das autonomisierte ($\dot{y}(t) = f(y(t))$) und das urspüngliche nicht autnome ($\dot{y}(t) = f(t, y(t))$) AWP erhält.

a) Sind folgende Verfahren autonomisierungsinvariant:

(i) Das klassische Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

(ii) Die verbesserte Polygonzug-Methode von Euler

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \\ \hline & 0 & 1 \end{array}$$

Bitte wenden!

(iii) Das 2-Stufen Oliver Verfahren

$$
\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{3} & & \\
\frac{5}{9} & \frac{2}{3} & \\
\hline
 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4}
\end{array}
$$

(iv) SDIRK Methode dritter Ordnung

$$
\begin{array}{c|cc}
\gamma & \gamma & 0 \\
1-\gamma & 1-2\gamma & \gamma \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}
\quad \text{wobei} \quad \gamma = \frac{3 \pm \sqrt{3}}{6}.
$$

b) Wenn ein Verfahren autonomisierungsinvariant ist, reicht es die Konsistenzordnung für autonome AWPe zu bestimmen. Bestimmen Sie die Konsistenzordnung des Verfahrens von Heun.

Hinweis: Die Rechnung aus Aufgabe 1 sollte sich wesentlich vereinfachen.

Abgabe: Nächst mögliche Übungs-Stunde.