D-ITET, D-MATL | Numerische Methoden | FS 2017
Dr. R. Käppeli
B. Fitzpatrick, D. Devaud

Serie 6

1. Lipschitz-Stetigkeit

a) In der Vorlesung haben wir gesehen, dass es eine entscheidende Rolle für die eindeutige Lösbarkeit des AWPs spielt, ob die rechte Seite f Lipschitz-stetig ist oder nicht. Das Ziel dieser Aufgabe ist es, ein besseres Gefühl für das Konzept der Lipschitz-Stetigkeit zu bekommen.

Sind die folgende Funktionen (lokal) Lipschitz stetig auf dem Intervall $[-1, 1]$? Begründen Sie Ihre Antworten.

$$f(x) = x^2\,, \quad f(x) = |x|\,, \quad f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0\,, \\ -1 & x \geq 0\,, \end{cases} \qquad f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,.$$

b) Erfüllen die folgenden AWPe die Voraussetzungen von Picard-Lindelöf?

- $\dot{y}(t) = y(t)^2, \quad y(0) = 0.5$
- $\dot{y}(t) = |y(t)|, \quad y(0) = 0$
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(0) = 0.5$
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}, \quad y(0) = 0$

2. *Verbesserte Polygonzugmethode von Euler*

In dieser Aufgabe wollen wir eine Verbesserung gegenüber der Euler Methode implementieren und seine Qualität empirisch untersuchen. Die verbesserte Polygonzugmethod von Euler ist gegeben durch

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_k, y_k), \\ k_2 &= f\left(t_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right), \\ y_{k+1} &= y_k + hk_2. \end{aligned} \tag{1}$$

a) Skizzieren Sie dieses Verfahren im Richtungsfeld.

b) Implementieren Sie dieses Verfahren.
Hinweis: Arbeiten Sie im Template `verbEuler.m`.

Bitte wenden!

c) Berechnen Sie mit (1) approximative Lösungen von den folgenden AWP

$$\begin{cases} \dot{y}(t) = & y(t), \\ y(0) = & 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \dot{y}(t) = & (y(t))^2, \\ y(0) = & 0.5 \end{cases}$$

zum Zeitpunkt $T = 1$ mit $N = 2^i$ ($i = 3, 4, ..., 9$) Schritten. Bestimmen Sie den absoluten Fehler zur Endzeit $|y_N - y(T)|$ und plotten Sie diesen Fehler als Funktion von $h = 1/N$ in einem `loglog`-plot. Bestimmen Sie dann die Steigung der Gerade mithilfe des Befehls `polyfit`.
Hinweis: Die exakten Lösungen zu den AWP wurden in der Vorlesung angegeben. Arbeiten Sie im Template `konvOrdnungEmpirisch.m`.

3. Wir betrachten folgendes Anfangswertproblem

$$\dot{y}(t) = \lambda\left(y(t) - \frac{t^2}{1+t^2}\right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2},$$
$$y(0) = 0,$$

für $0 \leq t \leq 2$ und $\lambda = 10$.

a) Überprüfen Sie, dass die exakte Lösung gegeben ist durch $y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$.

b) Lösen Sie das AWP mit der verbesserten Polygonzugmethode von Euler aus Aufgabe 2. Verwenden Sie $N = 2 \times 10^i$ ($i = 2, 3, 4, 5$) Schritte und plotten Sie die genäherten Resulate gemeinsam mit der exakten Lösung. Interpretieren Sie die Resultate.
Hinweis: Betrachten Sie einen leicht gestörten Anfangswert: $y(t_0) = \epsilon + \frac{t_0^2}{1+t_0^2}$.

c) Wiederholen Sie **b)** mit $\lambda = -10$. Erklären Sie das beobachtete Verhalten.

4. In einfachen Fällen kann man mittels des sog. Picard-Lindelöfschen Iterationsverfahrens die Lösungen einer Differentialgleichung explizit berechnen. Wir betrachten das AWP

$$\dot{y}(t) = 2ty(t),$$
$$y(0) = c.$$

In diesem Fall ist ein Schritt dieses Verfahrens gegeben durch

$$y_{k+1}(t) = c + 2\int_0^t s y_k(s) ds,$$

zusammen mit $y_0(t) = c$. Berechnen Sie sie die ersten Iterationen dieses Verfahrens und folgern Sie daraus die exakte Lösung des AWPs.

Siehe nächstes Blatt!

Hinweis: Folgende Reihe könnte von nutzen sein:

$$e^{t^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^{2k}}{k!} = 1 + t^2 + \frac{t^4}{2} + \frac{t^6}{6} + \dots$$

Abgabe: Bis Freitag, den 07.04.2017.