Dr. R. Käppeli
B. Fitzpatrick, D. Devaud

Serie 12

1. *Konvergenz Fixpunkt*

In dieser Aufgabe wollen wir die Konvergenz der Fixpunktiteration

$$x^{(k+1)} = \phi(x^{(k)})$$

mit Fixpunktfunktion $\phi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{x} + x\right)$ untersuchen.

Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion, die die Konvergenzordnung p und die Konvergenzrate C obiger Fixpunktiteration mit Startwert $x^{(0)} = 10$ berechnet. Ihre MATLAB-Funktion soll als Abbruchkriterium (ABK3) aus der Vorlesung (Kap. 4, Seite 6) verwenden:

$$\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*| \leq \mathtt{atol} + \mathtt{rtol}|x^{(k)}|$$

mit `atol=1e-7` und `rtol=1e-5`. Als Referenzlösung x^* können Sie die letzte Iteration, d.h. wenn das Abbruchkriterium erfüllt ist, des Algorithmus benutzen.

Hinweis: Für den Fehler der k-ten Iteration $\epsilon^{(k)} = |x^{(k)} - x^*|$, kann man die Konvergenzordnung und den Konvergenzrate durch

$$p = \frac{\log(\epsilon^{(k+1)}) - \log(\epsilon^{(k)})}{\log(\epsilon^{(k)}) - \log(\epsilon^{(k-1)})}, \qquad C = \frac{\epsilon^{(k)}}{(\epsilon^{(k-1)})^p}$$

bestimmen.

2. *Newton Verfahren in mehreren Dimensionen*

In mehreren Dimensionen ist das Newton Verfahren zur Lösung des Nullstellenproblems $F(x) = 0$, $x \in \mathbb{R}^d$, wie folgt definiert:

function NEWTON(x0,F,DF,nMax,ATOL,RTOL)
  Initialisierung: $n = 1$, $x = x0$
  while $n < nMax$ und $\|DF(x)^{-1}F(x)\| > ATOL + RTOL\|x\|$ **do**
    $\Delta x = -DF(x)^{-1}F(x)$
    $x = x + \Delta x$
    $n = n + 1$
  return x

Bitte wenden!

Hier ist `x0` der Startwert, `DF` die Jacobi-Matrix der Funktion `F`, `nMax` die maximale Anzahl von Iterationen und `ATOL` und `RTOL` gegebene absolute und relative Toleranzen für das Abbruchkriterium (ABK3) (aus der Vorlesung).

a) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `newton.m`, die den obigen Algorithmus implementiert.
Hinweis: Sie sollten niemals die Inverse $DF(x)^{-1}$ explizit berechnen. Stattdessen sollten Sie das System $DF(x)\Delta x = -F(x)$ lösen. (Es ist durchaus sinnvoll, sich zu überlegen wieso!)

b) Betrachten Sie die Funktion $F : D = [-1,2]^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch

$$F(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 + y - 2 \\ ye^x - 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie mit Ihrer Funktion aus **a)** alle Lösungen des Nullstellenproblems $F(x,y) = 0$.
Hinweis: Die Höhenlinien der Funktions-Komponenten können mit `hoehenlinien.m` gezeichnet werden.

3. *Nullstellensuche mit dem Newton Verfahren*

a) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `untersucheNewton.m`, die die Nullstelle des Polynoms $p(x) = x^2 - 3x + 2$ sucht. Diese Funktion ruft die Funktion `newton.m` von Aufgabe 2 mit verschiedenen Anfangswerten auf und plottet welche Anfangswerte gegen welche Nullstellen konvergieren. Identifizieren Sie die zwei Konvergenzbereiche des Newton Verfahrens.

b) Ergänzen Sie die MATLAB-Funktion `newtonKonvergenz.m`, in der die Konvergenz der Newtoniterierten gegen die Nullstelle $x = 1$ des Polynoms $p(x) = x^2 - 3x + 2$ untersucht wird.

c) Wiederholen Sie das Experiment `untersucheNewton.m` mit dem Polynom $p(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$. Erklären Sie das Verhalten des Newton Verfahrens für Anfangswerte im Bereich $[1.4, 1.6]$.

d) Schreiben Sie eine MATLAB-Funktion `newtonKonvergenzFD.m` basierend auf `newtonKonvergenz.m`, in welcher $F'(x)$ durch folgende Finite-Differenzen Approximation

$$F'(x) \approx \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ersetzt wird. Wiederholen Sie **c)** mit $h = 10^{-7}$ und 10^{-16}. Was beobachten Sie?

Siehe nächstes Blatt!

4. *Das implizite Eulerverfahren*

Ein Schritt des impliziten Eulerverfahrens für die ODE $\dot{y} = f(t, y)$ lautet

$$y_{n+1} = y_n + hf(t_{n+1}, y_{n+1})\,.$$

Das heisst: Um y_{n+1} zu bestimmen muss man eine (nicht-lineare) Gleichung lösen.

Ergänzen Sie das Template `implEuler.m`, das das AWP $\dot{y} = \sqrt{y}$, $y(0) = 1$ bis zum Zeitpunkt $T = 0.9$ mit dem impliziten Eulerverfahren (gekoppelt mit dem Newton Verfahren) löst. Verwenden Sie y_n als Startwert des Newton Verfahrens um y_{n+1} zu bestimmen.

Abgabe: Bis Freitag, den 26.05.2017.