

## Lösung 6

1. a) Wir erhalten die folgende Ergebnisse:

- $f(x) = x^2$  ist stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung auf  $[-1, 1] \Rightarrow$  Lipschitz stetig
- $f(x) = |x|$ : Es gilt

$$|f(x) - f(y)| = ||x| - |y|| \leq |x - y|$$

nach der umgekehrten Dreiecksungleichung  $\Rightarrow f$  L-stetig mit  $L = 1$

- $f(x) = \begin{cases} 1 & x < 0, \\ -1 & x \geq 0, \end{cases}$  ist nicht stetig  $\Rightarrow f$  ist nicht Lipschitz stetig, da Lipschitz-stetige Funktionen stetig sind.
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$  ist stetig; für  $x = 0$  gilt allerdings

$$\frac{f(0) - f(y)}{0 - y} = \frac{\sqrt[3]{y^2}}{y} = \frac{1}{y^{1/3}} \rightarrow \infty \quad (y \rightarrow 0),$$

d.h. der Differenzenquotient in  $x = 0$  ist nicht beschränkt. Demnach ist  $f$  nicht Lipschitz-stetig auf  $[-1, 1]$ .

b) Wir müssen die Voraussetzungen des Picard-Lindelöf Satzes überprüfen, d.h. die rechte Seite  $f$  soll stetig in  $(t, y)$  und Lipschitz-stetig in  $y$  auf  $[t_0, t_0 + \delta_1] \times (y_0 - \delta_2, y_0 + \delta_2)$  sein, wobei  $\delta_1, \delta_2 > 0$ . Alle untersuchten Probleme haben rechte Seiten  $f$ , die stetig sind in  $(t, y)$ . Wir werden uns deshalb im folgenden auf die Untersuchung der Lipschitz-Stetigkeit in Umg. der Anfangswerte beschränken.

- $\dot{y}(t) = y(t)^2, \quad y(0) = 0.5$ : ✓  
Die Funktion  $f(t, y) = y^2$  ist stetig differenzierbar mit beschränkter Ableitung auf  $[0.5 - \delta, 0.5 + \delta]$  für jedes  $\delta > 0$ ; deswegen ist sie Lipschitz-stetig in Umgebung vom Anfangswert  $y_0 := 0.5$ .
- $\dot{y}(t) = |y(t)|, \quad y(0) = 0$ : ✓  
Wir wollen zeigen, dass die Funktion  $f(t, y) = |y|$  Lipschitz-stetig in Umgebung vom Anfangswert  $y_0 := 0$  ist. Für  $x, y \in \mathbb{R}$  haben wir

$$|x| = |x - y + y| \leq |x - y| + |y| \Rightarrow |x| - |y| \leq |x - y|,$$

$$|y| = |y - x + x| \leq |x - y| + |x| \Rightarrow -|x - y| \leq |x| - |y|,$$

und so erhalten wir  $||x| - |y|| \leq |x - y|$ . Es folgt dann, dass  $f$  Lipschitz-stetig auf  $\mathbb{R}$  ist.

**Bitte wenden!**

- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}$ ,  $y(0) = 0.5$ : ✓  
Für  $y > 0$  ist die Ableitung von  $f(t, y) = \sqrt[3]{y^2}$  bezüglich  $y$  definiert durch  $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y) = \frac{2}{3}y^{-1/3}$ . Die Ableitung ist dann für jede  $\varepsilon > 0$  auf  $[\varepsilon, \infty)$  beschränkt und deshalb in Umgebung von  $y_0 := 0.5$  beschränkt. Es folgt dann, dass  $f$  in Umgebung von  $y_0$  Lipschitz-stetig ist.
- $\dot{y}(t) = \sqrt[3]{y(t)^2}$ ,  $y(0) = 0$ : ✗  
Wir zeigen, dass die Funktion  $f(t, y) = \sqrt[3]{y^2}$  in Umgebung von  $y_0 := 0$  nicht Lipschitz-stetig ist. Wir haben für  $y \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$$\frac{f(y) - f(0)}{y - 0} = \frac{f(y)}{y} = y^{-1/3},$$

was für  $y \rightarrow 0$  nicht beschränkt ist. Deshalb kann  $f$  nicht Lipschitz-stetig sein.

2. a) Die verbesserte Polygonzugmethode von Euler ist im Richtungsfeld in Abb. 1 skizziert.

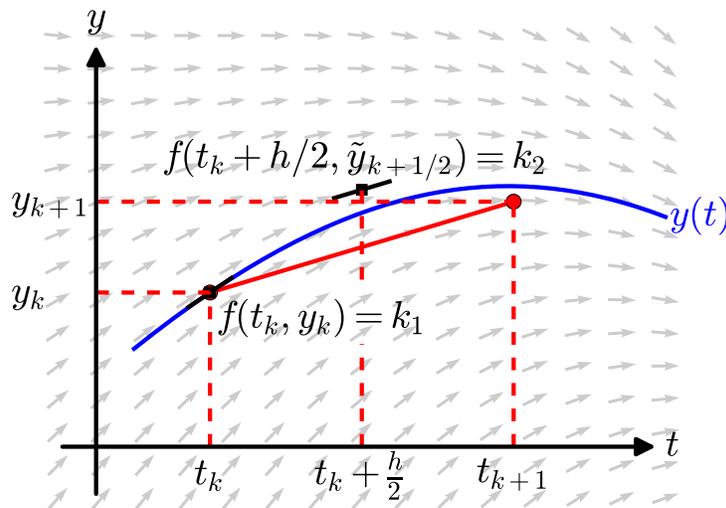


Abbildung 1 – Skizze der verbesserten Polygonzugmethode von Euler.

- b) Siehe im kommentierten `verbEuler.m`.
- c) Der absolute Fehler als Funktion der Schrittweite ist in Abb. 2 dargestellt. Man erkennt gut: wenn man die Schrittweite um einen Faktor 10 verkleinert, so verkleinert sich der Fehler um einen Faktor  $\sim 100$ .  
Wir beobachten eine empirische Konvergenzordnung von 1.98 und 1.97. Siehe im kommentierten `konvOrdnungEmpirisch.m`.

**Siehe nächstes Blatt!**

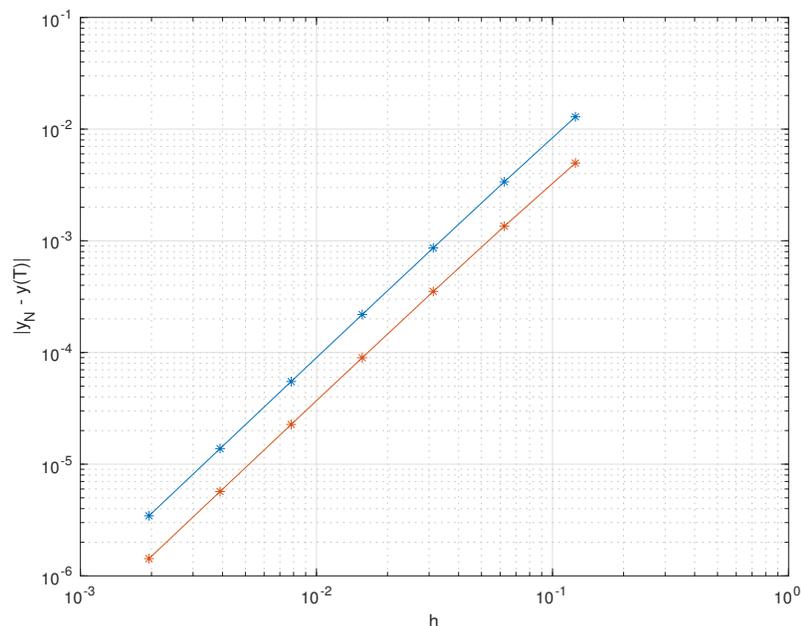


Abbildung 2 – Absolute Fehler als Funktion der Schrittweite für AWP 1 (blau) und AWP 2 (rot).

3. a) Für  $y(t)$  definiert durch  $y(t) = \frac{t^2}{1+t^2}$  haben wir

$$\frac{dy}{dt}(t) = \frac{2t(1+t^2) - t^2 \cdot 2t}{(1+t^2)^2} = \frac{2t}{(1+t^2)^2}.$$

Da  $y(t) - \frac{t^2}{1+t^2} = 0$ , ist  $y(t)$  die Lösung von dem AWP.

b) Für  $\epsilon > 0$  ist die exakte Lösung des leicht gestörten AWP

$$\dot{y}(t) = \lambda \left( y(t) - \frac{t^2}{1+t^2} \right) + \frac{2t}{(1+t^2)^2},$$

$$y(t_0) = \epsilon + \frac{t_0^2}{1+t_0^2},$$

gegeben durch

$$y(t) = \epsilon e^{\lambda(t-t_0)} + \frac{t^2}{1+t^2}.$$

Für  $\epsilon \neq 0$  und  $\lambda > 0$  dominiert der exponential Term also die Lösung für späte Zeiten.

Die approximativen und die exakte Lösungen sind in Abb. 3 dargestellt. Wir beobachten, dass die genäherten Lösungen für  $10^{-4} \lesssim h$  sich schnell von der exakten Lösung entfernen. Dieses Verhalten können wir uns dadurch erklären, dass der gemachte Fehler beim ersten Zeitschritt dann zum gestörten AWP von oben

**Bitte wenden!**

führt. Also macht sich der exponential Anteil unausweichlich bemerkbar. Für kleinere Schrittweiten wird dieser Fehler kleiner, also ein kleineres  $\epsilon$  im gestörten AWP, und deshalb macht sich der exponential Anteil erst später bemerkbar.

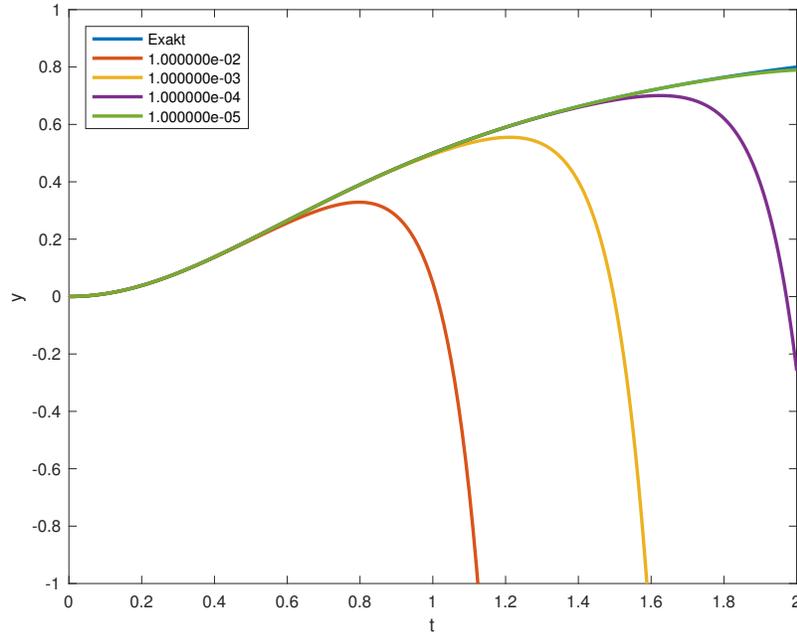


Abbildung 3 – .

c) Die approximativen und die exakte Lösungen sind in Abb. 4 dargestellt. Hier beobachten wir von Auge keine Unterschiede. Der Grund dafür ist das für negatives  $\lambda$  das gestörte AWP exponentiell schnell gegen das ungestörte AWP zerfällt.

4. Die exakte Lösung des AWP's ist gegeben durch  $y(t) = ce^{t^2}$ .

Behauptung:  $y_k(t) = c \sum_{j=0}^k \frac{t^{2j}}{j!}$  für alle  $k \in \mathbb{N}$ . Beweis durch vollständige Induktion:  
Für  $k = 1$  haben wir

$$y_1(t) = c + 2 \int_0^t ty_0(t)dt = c(1 + t^2).$$

Gehen wir davon aus, dass die Aussage für  $k$  bereits bewiesen ist. Dann für  $k + 1$  erhalten wir

$$\begin{aligned} y_{k+1}(t) &= c + 2 \int_0^t sy_k(s)ds = c + c \sum_{j=0}^k \frac{2}{j!} \int_0^t s^{2j+1} ds \\ &= c + c \sum_{j=0}^k \frac{1}{(j+1)!} t^{2(j+1)} ds = c \sum_{j=0}^{k+1} \frac{t^{2j}}{j!}. \end{aligned}$$

**Siehe nächstes Blatt!**

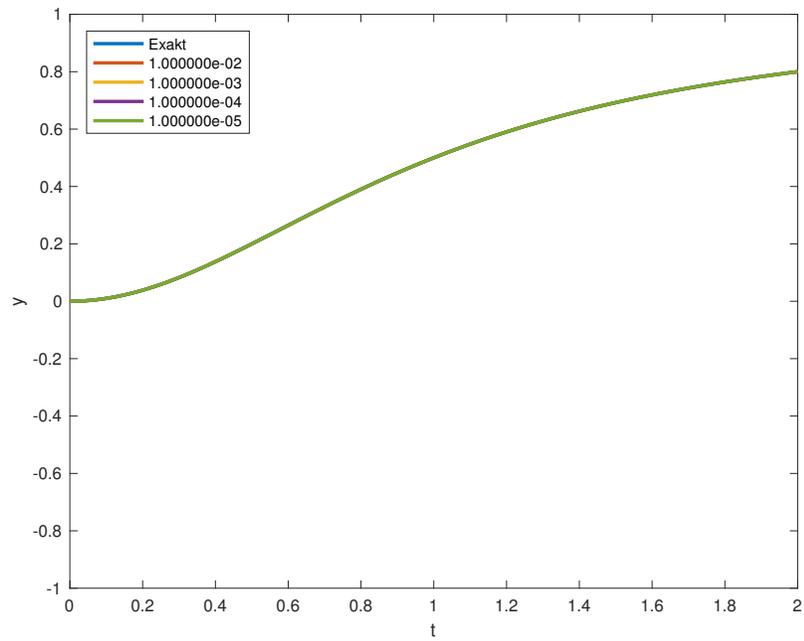


Abbildung 4 – .

Da  $e^t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j}{j!}$ , erhalten wir dass

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_{k+1}(t) = ce^{t^2} = y(t).$$