D-ITET, D-MATL
Dr. R. Käppeli
B. Fitzpatrick, D. Devaud

Lösung 3

1. **a)** Um das Polynom $P_3(x)$ zu berechnen, benutzen wir die Formel

$$P_{j+1}(x) = \frac{2j+1}{j+1} x P_j(x) - \frac{j}{j+1} P_{j-1}(x), \qquad j \geq 1.$$

Mit $P_0(x) = 1$, $P_1(x) = x$ und $P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 1)$, erhalten wir für $j = 2$

$$P_3(x) = \frac{5}{3} x P_2(x) - \frac{2}{3} P_1(x) = \frac{5}{6}(3x^3 - x) - \frac{2}{3} x = \frac{1}{2}(5x^3 - 3x) = \frac{x}{2}(5x^2 - 3).$$

Die Nullstellen von $P_3(x)$ sind dann

$$x_0 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad x_1 = 0, \qquad x_2 = \sqrt{\frac{3}{5}}.$$

Die Gewichte berechnen wir durch

$$\omega_k = \frac{2(1 - x_k^2)}{\left((j+1) P_j(x_k)\right)^2}, \qquad k = 0, 1, 2,$$

und erhalten

$$\begin{aligned}
\omega_0 &= \frac{2(1 - x_0^2)}{\left(3P_2(x_0)\right)^2} = \frac{4}{45 P_2(x_0)^2} = \frac{4}{45}\frac{25}{4} = \frac{5}{9}, \\
\omega_1 &= \frac{2(1 - x_1^2)}{\left(3P_2(x_1)\right)^2} = \frac{2}{9 P_2(x_1)^2} = \frac{8}{9}, \\
\omega_2 &= \frac{2(1 - x_2^2)}{\left(3P_2(x_2)\right)^2} = \frac{4}{45 P_2(x_2)^2} = \frac{4}{45}\frac{25}{4} = \frac{5}{9}.
\end{aligned}$$

b) Um zu bestätigen, dass die 3-Punkte Gauss Quadraturregel die Ordnung 6 besitzt müssen wir folgendes überprüfen:

$$I\left[x^l\right] = G_2\left[x^l\right] \quad \text{für} \quad l = 0, \ldots, 5 \quad \text{und} \quad I[x^6] \neq G_2[x^6].$$

Bitte wenden!

Wir berechnen $I\left[x^l\right] = \int_{-1}^{1} x^l dx = \frac{1-(-1)^{l+1}}{l+1}$ und erhalten

$$G_2[1] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j = \frac{5}{9} + \frac{8}{9} + \frac{5}{9} = 2, \qquad I[1] = 2 \Rightarrow \checkmark,$$

$$G_2[x] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j = -\frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{1/2} = 0, \qquad I[x] = 0 \Rightarrow \checkmark,$$

$$G_2\left[x^2\right] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^2 = \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9} \cdot \frac{3}{5} = \frac{2}{3}, \qquad I\left[x^2\right] = \frac{2}{3} \Rightarrow \checkmark,$$

$$G_2\left[x^3\right] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^3 = -\frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{3/2} = 0, \quad I\left[x^3\right] = 0 \Rightarrow \checkmark,$$

$$G_2\left[x^4\right] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^4 = \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{2} + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{2} = \frac{2}{5}, \qquad I\left[x^4\right] = \frac{2}{5} \Rightarrow \checkmark,$$

$$G_2\left[x^5\right] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^5 = -\frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{5/2} = 0, \quad I\left[x^5\right] = 0 \Rightarrow \checkmark,$$

$$G_2\left[x^6\right] = \sum_{j=0}^{2} \omega_j x_j^6 = \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{3} + \frac{8}{9} \cdot 0 + \frac{5}{9}\left(\frac{3}{5}\right)^{3} = \frac{6}{25}, \qquad I\left[x^6\right] = \frac{2}{7} \Rightarrow ✗.$$

c) Auf dem Intervall $[a, b]$ sind die Punkte und Gewichte gegeben durch

$$\begin{aligned}
\widetilde{x}_j &= \frac{b-a}{2} x_j + \frac{a+b}{2}, & \widetilde{\omega}_j &= \frac{b-a}{2} \omega_j, \\
\widetilde{x}_0 &= -\sqrt{\frac{3}{5}} \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}, & \widetilde{\omega}_0 &= \frac{5(b-a)}{18}, \\
\widetilde{x}_1 &= \frac{a+b}{2}, & \widetilde{\omega}_1 &= \frac{4(b-a)}{9}, \\
\widetilde{x}_2 &= \sqrt{\frac{3}{5}} \frac{b-a}{2} + \frac{a+b}{2}, & \widetilde{\omega}_2 &= \frac{5(b-a)}{18}.
\end{aligned}$$

Für den Code, siehe `summ3punktgauss.m`.

d) Siehe `summbestimmeordnung.m`. Für f_1 konvergiert die summierte Quadraturregel mit Ordnung 6, wobei für f_2 nur mit beschränkte Ordnung 3.33. Das folgt aus mangelnder Glattheit der Funktion.

2. Siehe `Konvergenz.m`.

Für f_1 beobachtet man exponentielle Konvergenz mit $q = 0.00171$. Das ist das erwartete Verhalten da die Funktion glatt ist.

Siehe nächstes Blatt!

Die Funktion f_2 ist nicht glatt genug um exponentielle Konvergenz zu erhalten. Deshalb sieht man nur algebraische Konvergenz mit $\alpha \approx 2.5$.

3. **a)** Wir müssen nur die Gewichte der 1D-Gauss-Legendre Quadratur mit $n = 2$ in der richtigen Reihenfolge multiplizieren, und Vektoren von Knoten mit der gleichen Folge basteln. Eine Möglichkeit ist

(i,j)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$\widehat{w}_{i,j}$	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{64}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{25}{81}$	$\frac{40}{81}$	$\frac{25}{81}$
$\mathbf{x}_{i,j}$	$\binom{-a}{-a}$	$\binom{-a}{0}$	$\binom{-a}{a}$	$\binom{0}{-a}$	$\binom{0}{0}$	$\binom{0}{a}$	$\binom{a}{-a}$	$\binom{a}{0}$	$\binom{a}{a}$

wobei $a = \sqrt{3/5}$.

b) Es gilt

$$\int_0^2 \int_0^1 f(x,y)\, dx\, dy = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{2}, y+1\right) dx\, dy\,.$$

Es folgt, dass die Gewichte mit $1/2$ multipliziert werden, und dass die Knoten durch die Abbildung $T(x,y) = (x/2 + 1/2, y+1)$ skaliert und verschoben werden. Wir erhalten

(i,j)	$(0,0)$	$(0,1)$	$(0,2)$	$(1,0)$	$(1,1)$	$(1,2)$
$\tilde{w}_{i,j}$	$\frac{25}{162}$	$\frac{40}{162}$	$\frac{25}{162}$	$\frac{40}{162}$	$\frac{64}{162}$	$\frac{40}{162}$
$\mathbf{x}_{i,j}$	$\binom{-a/2+1/2}{-a+1}$	$\binom{-a/2+1/2}{1}$	$\binom{-a/2+1/2}{a+1}$	$\binom{1/2}{-a+1}$	$\binom{1/2}{1}$	$\binom{1/2}{a+1}$

(i,j)	$(2,0)$	$(2,1)$	$(2,2)$
$\tilde{w}_{i,j}$	$\frac{25}{162}$	$\frac{40}{162}$	$\frac{25}{162}$
$\mathbf{x}_{i,j}$	$\binom{a/2+1/2}{-a+1}$	$\binom{a/2+1/2}{1}$	$\binom{a/2+1/2}{a+1}$

wobei $a = \sqrt{3/5}$.