D-ITET, D-MATL
Dr. R. Käppeli
B. Fitzpatrick, D. Devaud

Numerische Methoden

FS 2017

Lösung 2

1. **a)** Die Polynome sind gegeben durch

$$L_0^1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} = \frac{x - \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{-2}{\sqrt{3}}} = \frac{1 - \sqrt{3}x}{2},$$
$$L_1^1(x) = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{x + \frac{1}{\sqrt{3}}}{\frac{2}{\sqrt{3}}} = \frac{1 + \sqrt{3}x}{2},$$

und für die Gewichte wir haben

$$\omega_0 = \int_{-1}^{1} L_0^1(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 - \sqrt{3}x)dx = 1,$$
$$\omega_1 = \int_{-1}^{1} L_1^1(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(1 + \sqrt{3}x)dx = 1.$$

b) Wir haben

$$S[1] = \sum_{j=0}^{1} \omega_j 1 = 2 = I[1],$$
$$S[x] = \sum_{j=0}^{1} \omega_j x_j = -\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = 0 = I[x],$$
$$S\left[x^2\right] = \sum_{j=0}^{1} \omega_j x_j^2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} = I\left[x^2\right],$$
$$S\left[x^3\right] = \sum_{j=0}^{1} \omega_j x_j^3 = -\frac{1}{3\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = 0 = I\left[x^3\right],$$
$$S\left[x^4\right] = \sum_{j=0}^{1} \omega_j x_j^4 = \frac{1}{9} + \frac{1}{9} = \frac{2}{9} \neq I\left[x^4\right],$$

und deshalb besitzt die 2 Punkte Gauss Quadraturformel den Genauigkeitsgrad 3.

c) Nach den Vorlesungsnotizen sind die Punkte und Gewichte auf das Intervall $[a, b]$ gegeben durch

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_0 &= \frac{b-a}{2}x_0 + \frac{a+b}{2} = \frac{(\sqrt{3}+1)a + (\sqrt{3}-1)b}{2\sqrt{3}}, \\
\tilde{x}_1 &= \frac{b-a}{2}x_1 + \frac{a+b}{2} = \frac{(\sqrt{3}-1)a + (\sqrt{3}+1)b}{2\sqrt{3}}, \\
\tilde{\omega}_0 &= \frac{b-a}{2}\omega_0 = \frac{b-a}{2}, \\
\tilde{\omega}_1 &= \frac{b-a}{2}\omega_1 = \frac{b-a}{2}.
\end{aligned}$$

Die transformierte Quadraturformel auf das Intervall $[a, b]$ ist dann

$$S[f] = \sum_{j=0}^{1} \tilde{\omega}_j f(\tilde{x}_j).$$

Bemerkung: Die n Punkte Gauss Quadraturformel ist im allgemeinen definiert, so dass sie die den Genauigkeitsgrad $2n - 1$ besitzt.

2. **a)** Siehe das m-file `summtrapezregel`.

b) Siehe das m-file `summsimpsonregel`.

c) Siehe das m-file `summ2punktgauss`.

d) Siehe das m-file `summbestimmeordnung`

e) Gegeben sei eine summierte Quadraturregel (SQR) Q^N basierend auf einer Quadraturregel (QR) der Ordnung s (d.h. einen Genauigkeitsgrad $q = s - 1$). In der Vorlesung haben wir gesehen, dass falls der Integrand f glatt genug ist, konvergiert die SQR mit Ordnung s, d.h.

$$E^N(f) := \left| I[f] - Q^N[f] \right| \leq \frac{\|f^{(s)}\|_\infty}{s!}(b-a)h^s.$$

In unserem Fall besitzt die Trapezregel die Ordnung 2.

Wir sehen, dass f_1 und f_3 glatt genug sind, d.h. $f_1, f_3 \in C^2(a, b)$ und wir beobachten für beide Funktionen die erwartete quadratische Konvergenz. Die Funktion f_2 ist nicht $C^2(a, b)$ aber wir sehen trotzdem eine beschränkte Konvergenzordnung (≈ 1.5).

Die beobachtete Konvergenzordnung für die in `f_4.p` definierte Funktion ist 10.87. Diese verbesserte Konvergenz ist eine Konsequenz der Perriodizität von

Siehe nächstes Blatt!

der Funktion f_4. Tatsächlich kann man für periodische glatten Funktionen exponentielle Konvergenz zeigen.

In der folgenden Tabelle, zeigen wir die beobachtete Konvergenzordnungen für die verschiedenen Funktionen und Verfahren. In der zweiten Zeile steht die erwartete Konvergordnung.

	Summ. Trapezregel	Summ. Simpsonregel	Summ. 2 P. Gauss
	2	4	4
f_1	2.00	4.00	4.00
f_2	1.46	1.50	1.50
f_3	2.00	3.43	3.43
f_4	10.87	Inf	10.25

f) Auf jedem Intervall wertet die Trapezregel die Funktion zweimal aus. Wir können es jedoch besser machen. Da die Quadraturegel nur die Endpunkte benutzt, können wir die inneren Gitterpunkte nur einmal auswerten. Wir erhalten dann $(N-1)+2 = N+1$ Funktionsauswertungen für die summierte Trapezregel.

Für die summierte 2 Punkte Gauss Quadraturformel gibt es auch 2 Punkte in jedem Intervall aber in dieser Situation können wir nichts verbessern und wir erhalten $2N$.

Die summierte Simpsonregel benutzt 3 punkte in jedem Intervall aber die Situation ist ähnlich wie bei der Trapezregel. Nur die Mittelpunkte (in jedem Intervall) können nicht zweimal benutzt werden. In diesem Fall erhalten wir dann $(N+1)+N = 2N+1$ Funktionsauswertungen.