Dr. R. Käppeli
B. Fitzpatrick, D. Devaud

Lösung 13

1. *Stabilitäts-funktionen und Gebiete*

a) (i) Expliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 0 & 0 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hf(t_j, y_j) \\ &= y_j + h\lambda y_j \\ &= (1 + h\lambda)y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitäts funktion

$$g(z) = 1 + z.$$

(ii) Impliziter Euler

$$\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Wir haben

$$k_1 = f(t_j + h, y_j + hk_1) = \lambda(y_j + hk_1) = \lambda y_j + h\lambda k_1 \Longleftrightarrow (1 - h\lambda)k_1 = \lambda y_j,$$

und daher

$$k_1 = y_j\left(\frac{\lambda}{1 - h\lambda}\right).$$

Dann

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + hk_1 \\ &= y_j + hy_j\left(\frac{\lambda}{1 - h\lambda}\right) \\ &= \left(1 + \frac{h\lambda}{1 - h\lambda}\right)y_j \\ &= \left(\frac{1}{1 - h\lambda}\right)y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitäts funktion

$$g(z) = \frac{1}{1-z}.$$

(iii) Heun Verfahren

$$\begin{array}{c|cc} 0 & & \\ 1 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} y_{j+1} &= y_j + \frac{h}{2}(f(t_j, y_j) + f(t_j + h, y_j + hf(t_j, y_j)) \\ &= y_j + \frac{h}{2}(\lambda y_j + \lambda(y_j + h\lambda y_j)) \\ &= y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j + \frac{h^2}{2}\lambda^2 y_j \\ &= (1 + h\lambda + \frac{h^2}{2}\lambda^2)y_j. \end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitäts funktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

(iv) Klassisches Runge-Kutta Verfahren

$$\begin{array}{c|cccc} 0 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & & \\ 1 & 0 & 0 & 1 & \\ \hline & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} \end{array}$$

Wir haben

$$\begin{aligned} k_1 &= f(t_j, y_j) && = \lambda y_j, \\ k_2 &= f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1) && = \lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j), \\ k_3 &= f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2) && = \lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j)), \\ k_4 &= f(t_j + h, y_j + hk_3) && = \lambda(y_j + h\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j))). \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann

$$
\begin{aligned}
y_{j+1} &= y_j + h(\frac{1}{6}k_1 + \frac{2}{6}k_2 + \frac{2}{6}k_3 + \frac{1}{6}k_4) \\
&= y_j + h\frac{1}{6}\lambda y_j + h\frac{2}{6}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j) + h\frac{2}{6}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j)) \\
&\quad + h\frac{1}{6}\lambda(y_j + h\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j)))) \\
&= y_j + \frac{1}{6}h\lambda y_j + \frac{2}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{2}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 y_j \\
&\quad + \frac{1}{6}h\lambda y_j + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 y_j + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 y_j + \frac{1}{24}h^4\lambda^4 y_j \\
&= (1 + \frac{1}{6}h\lambda + \frac{2}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{2}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 \\
&\quad + \frac{1}{6}h\lambda + \frac{1}{6}h^2\lambda^2 + \frac{1}{12}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4)y_j \\
&= (1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2 + \frac{1}{6}h^3\lambda^3 + \frac{1}{24}h^4\lambda^4)y_j.
\end{aligned}
$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitäts funktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{24}z^4.$$

(v) Implicit midpoint rule

$$
\begin{array}{c|c}
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\hline
 & 1
\end{array}
$$

Wir haben

$$k_1 = f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1) = \lambda(y_j + \frac{h}{2}k_1) = \lambda y_j + \frac{h}{2}\lambda k_1 \iff (1 - \frac{h}{2}\lambda)k_1 = \lambda y_j,$$

and hence

$$k_1 = y_j\left(\frac{\lambda}{1 - \frac{h}{2}\lambda}\right) = y_j\left(\frac{2\lambda}{2 - h\lambda}\right).$$

Dann

$$
\begin{aligned}
y_{j+1} &= y_j + hk_1 \\
&= y_j + hy_j\left(\frac{2\lambda}{2 - h\lambda}\right) \\
&= \left(1 + \frac{2h\lambda}{2 - h\lambda}\right)y_j \\
&= \left(\frac{2 + h\lambda}{2 - h\lambda}\right)y_j.
\end{aligned}
$$

Bitte wenden!

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitäts funktion

$$g(z) = \left(\frac{2+z}{2-z}\right).$$

b) Siehe `stab_verfahren.m` und `draw_stabfunc.m`. Die Stabilitätsgebiete ist schwarz lackiert.

c) Wir benötigen:

(i) $|1+x| < 1 \iff -1 < 1+x < 1 \implies -2 < x < 0.$

(ii) $\left|\dfrac{1}{1-x}\right| < 1 \iff 1 < |1-x|.$
So
$1 < 1-x \implies x < 0 \quad \text{und} \quad 1 < x-1 \implies x > 2.$

(iii) $\left|1+x+\dfrac{1}{2}x^2\right| < 1 \iff 1+x+\dfrac{1}{2}x^2 < 1 \iff x(x+2) < 0 \implies -2 < x < 0.$

(iv) $\left|1+x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4\right| < 1 \iff x+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{6}x^3+\dfrac{1}{24}x^4 < 0.$
Siehe `stab_klassiches_RK.m`. Wir haben eine Null bei $x \approx -2.7853$ und es ist klar, dass $x = 0$ auch eine Null ist. Da $g(x)$ außerhalb dieser Region zunimmt, das gilt das Stabilitätintervalle is $-2.7853 < x < 0$.

(v) $|\dfrac{2+x}{2-x}| < 1 \iff |2+x| < |2-x|$. Es ist klar gilt dies nur für $x < 0$.

d) Definiere

$$\lambda = -1000 + \pi i.$$

We want to determine h such that

$$|g(z)| = |g(h\lambda)| < 1, \quad \text{or equivalently} \quad |g(h\lambda)|^2 < 1.$$

(i) We have

$$g(h\lambda) = 1 + h\lambda.$$

Therefore, h should be such that

$$1 > |g(h\lambda)|^2 = |1+h\lambda|^2 = |1+h(-1000+\pi i)|^2 = (1-1000h)^2 + (\pi h)^2.$$

Hence we require that

$$h < \frac{2000}{1000000+\pi^2}.$$

Siehe nächstes Blatt!

(ii) We have

$$g(h\lambda) = \frac{1}{1-h\lambda}. \tag{1}$$

Therefore, h should be such that

$$\begin{aligned}
1 > |g(h\lambda)|^2 = \left|\frac{1}{1-h\lambda}\right| &= \left|\frac{1}{1+1000h-h\pi i}\cdot\frac{1+1000h+h\pi i}{1+1000h+h\pi i}\right|^2 \\
&= \left|\frac{1+1000h}{(1+1000h)^2+(h\pi)^2} + i\frac{-h\pi}{(1+1000h)^2+(h\pi)^2}\right|^2 \\
&= \left(\frac{1+1000h}{(1+1000h)^2+(h\pi)^2}\right)^2 + \left(\frac{-h\pi}{(1+1000h)^2+(h\pi)^2}\right)^2 \\
&= \frac{(1+1000h)^2+(h\pi)^2}{((1+1000h)^2+(h\pi)^2)^2} \\
&= \frac{1}{(1+1000h)^2+(h\pi)^2}.
\end{aligned}$$

This holds when $h < -\dfrac{2000}{1000000+\pi^2}$ or $h > 0$. As the step size must be positive this means we require that

$$h > 0.$$

(iii)-(v) First we rewrite the stability condition $|g_\lambda(h)| < 1$ as

$$G(h) := 1 - |g_\lambda(h)| > 0.$$

Then we use a root finding procedure to precisely locate the points where $G(h) = 0$. Siehe `grenzen_schrittweite_h.m`.

(iii) We require $h < 0.002$.

(iv) We require $h < 0.0028$.

(v) h can be any positive number.

e) Siehe `schnelle_oszillation_verfall.m` und Abbildung 1.

2. *Lineares homogenes System*

a) Diagonalisieren die Matrix A als:

$$A = PDP^{-1} \Longleftrightarrow D = P^{-1}AP,$$

wo

$$P = \begin{bmatrix} 15 & -12 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 \\ 0 & 0 & -1000 \end{bmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{75} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix}.$$

Bitte wenden!

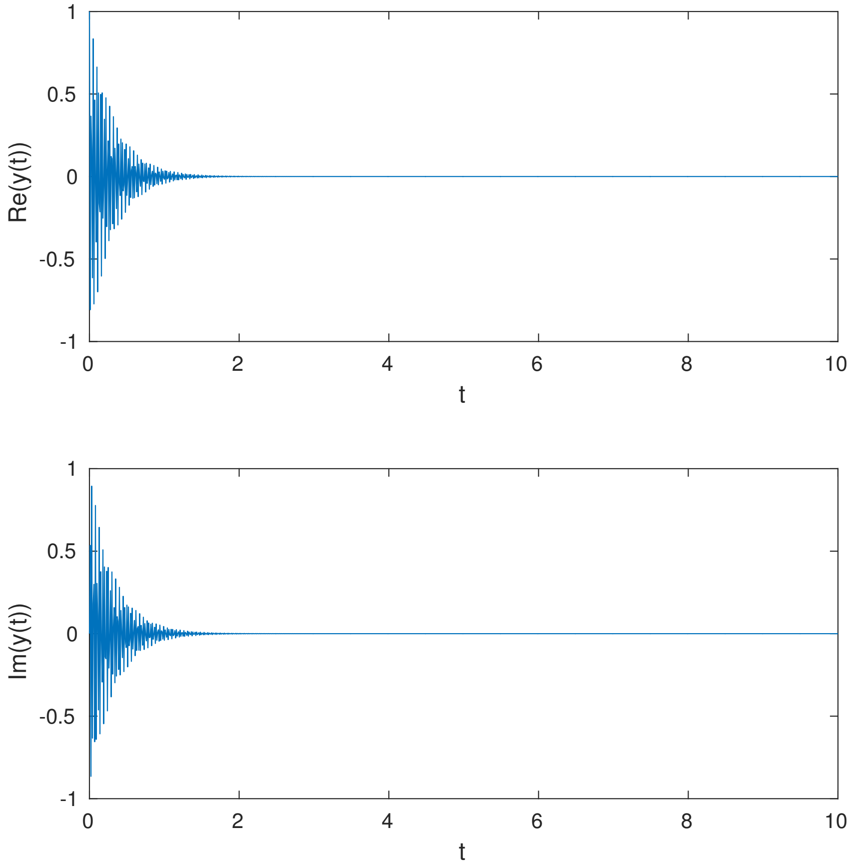

Abbildung 1 – Realteil und den Imaginärteil der Lösung $y(t)$ aus d).

Sei $\mathbf{z} = P^{-1}\mathbf{y} \iff \mathbf{y} = P\mathbf{z}$ und beachten Sie das

$$\dot{\mathbf{z}} = P^{-1}\dot{\mathbf{y}} = P^{-1}A\mathbf{y} = P^{-1}AP\mathbf{z} = D\mathbf{z}.$$

Wir haben jezt drei entkoppelte ODEs, wo die Lösung gegeben ist

$$z_i(t) = z_i(0)e^{\lambda_i t}, \quad i = 1, \dots, 3.$$

Wir haben

$$\mathbf{z}(0) = P^{-1}\mathbf{y}(0) = \begin{bmatrix} \frac{1}{15} & \frac{4}{75} & \frac{1}{25} \\ 0 & \frac{3}{40} & \frac{1}{40} \\ 0 & \frac{1}{10} & -\frac{3}{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{14}{30} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Deshalb

$$z_1(t) = z_1(0)e^{\lambda_1 t} = \frac{14}{30}e^{-\frac{1}{2}t}.$$
$$z_2(t) = z_2(0)e^{\lambda_1 t} = \frac{1}{2}e^{-15t}.$$
$$z_3(t) = z_3(0)e^{\lambda_1 t} = 0e^{-1000t} = 0.$$

Siehe nächstes Blatt!

Dann ist gilt

$$\mathbf{y}(t) = P\mathbf{z}(t) = \begin{bmatrix} 15 & -12 & 1 \\ 0 & 12 & 1 \\ 0 & 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{14}{30}e^{-\frac{1}{2}t} \\ \frac{1}{2}e^{-15t} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7e^{-\frac{1}{2}t} - 6e^{-15t} \\ 6e^{-15t} \\ 2e^{-15t} \end{bmatrix}.$$

b) Siehe `linsys.m`. Beachtan Sie dass globale Diskretisierungsfehler divergiert, während die Schrittgröße größer ist als die maximal zulässige Schrittgröße aufgrund des Stabilitätsintervalle.

Für das verbesserte Euler-Verfahren haben wir

$$k_1 = f(t_j, y_j) = \lambda y_j,$$
$$k_2 = f(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1) = \lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j).$$

und

$$\begin{aligned} y_{j+1} = y_j + hk_2 = y_j + h\lambda(y_j + \frac{h}{2}\lambda y_j) \\ = (1 + h\lambda + \frac{1}{2}h^2\lambda^2)y_j \end{aligned}$$

Deshalb, für $z = h\lambda$, ist die Stabilitäts funktion

$$g(z) = 1 + z + \frac{1}{2}z^2.$$

Für $z = h\lambda$, von Teil 1.c) (iii). wir haben das

$$-2 < h\lambda < 0.$$

Das Worst-Case-Szenario ist, $\lambda = \lambda_3 = -1000$. Dann wir haben

$$-2 < h\lambda < 0 \Longleftrightarrow 0 < 1000h < 2 \Longleftrightarrow 0 < h < \frac{1}{500}.$$

Wenn wir im Stabilitätsintervall sind, d.h. $h < \frac{1}{500}$, konvergiert die Methode, und auberdem konvergiert sie mit der erwarteten Ordnung, die $p = 2$ ist. Siehe Abbildung 2.

Beachten Sie, dass die wahre Lösung $\mathbf{y}(t)$ nicht den $\lambda_3 = -1000$ Eigenwert enthält, was darauf hindeutet, dass wir es bei der numerischen Lösung für $\mathbf{y}(t)$ ignorieren können. Dies ist jedoch nicht der Fall, da die numerische Lösung nicht exakt ist und somit der Beitrag aus diesem Eigenwert die anderen Modi im numerischen Fall beeinflussen wird. Es ist also notwendig, diesen Eigenwert zu berücksichtigen, um sicherzustellen, daß die numerische Approximation korrekt die wahre Lösung darstellt.

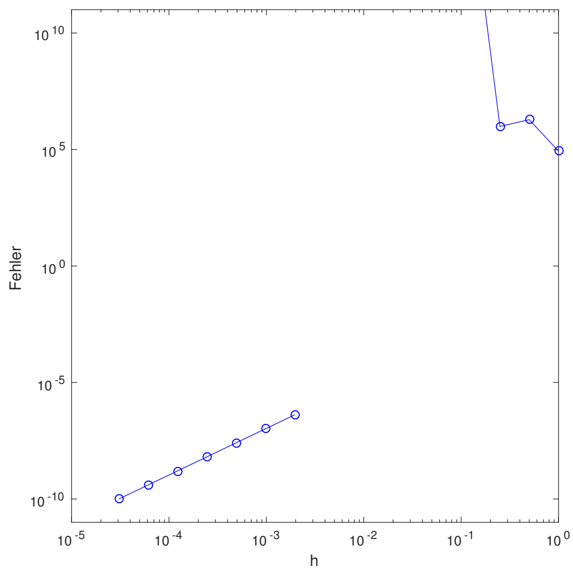

Abbildung 2 – Konvergenz der verbesserten Euler-Methode für ein System von drei linearen homogenen Differentialgleichungen 2 b).

3. *Stabilitäts-funktionen für RK-ESV*

Wir wenden ein explizites s-stufiges RK-ESV auf die ODE $\dot{y} = \lambda y$ an. Es gilt

$$k_i = f(t_0 + hc_i, y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j) = \lambda(y_0 + h\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}k_j) \qquad 1 \leq i \leq s\,.$$

Wir behaupten, dass $k_i = p_i(h\lambda)\lambda y_0$, wobei p_i ein Polynom ist. Für $i = 1$ haben wir $k_1 = \lambda y_0$, weil das Verfahren explizit ist. Nehmen wir an, dass die Behauptung für i gilt. Dann

$$\begin{aligned} k_{i+1} &= f(t_0 + hc_i, y_0 + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}k_j) \\ &= \lambda(y_0 + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}k_j) \\ &= \lambda(y_0 + h\sum_{j=1}^{i} a_{ij}p_j(h\lambda)\lambda y_0) \\ &= (1 + h\lambda\sum_{j=1}^{i} a_{ij}p_j(h\lambda))\lambda y_0 \\ &=: p_{i+1}(h\lambda)\lambda y_0\,. \end{aligned}$$

Siehe nächstes Blatt!

Da eine endliche Kombination von Polynomen wieder ein Polynom ist, folgt die Behauptung. Nun ist

$$\begin{aligned} y_1 &= y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i k_i \\ &= y_0 + h \sum_{i=1}^{s} b_i p_i(h\lambda)\lambda y_0 \\ &= (1 + h\lambda \sum_{i=1}^{s} b_i p_i(h\lambda)) y_0 \,, \end{aligned}$$

was zeigt, dass die Stabilitätsfunktion ein Polynom in $h\lambda$ ist.