

I. Numerische Quadratur

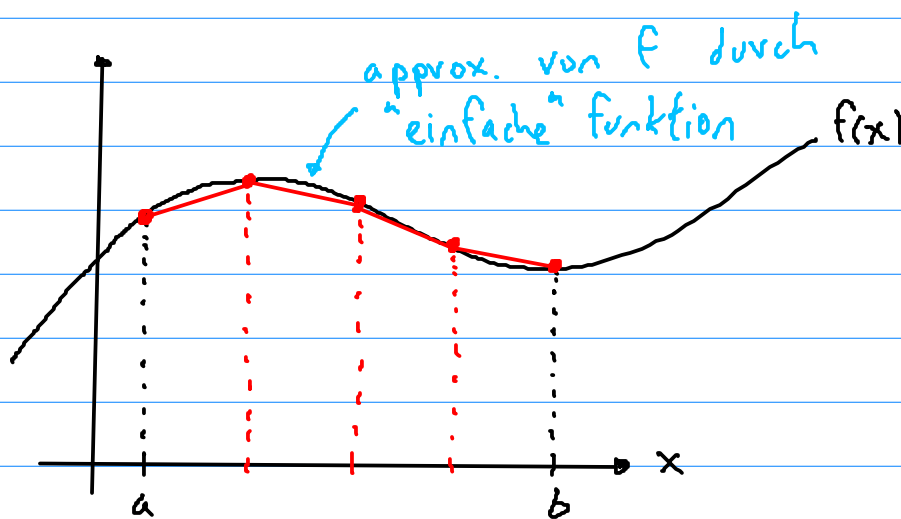
Ziele: - approximieren von bestimmten Integralen

$$Q[f] \approx \int_a^b f(x) dx$$

- Genauigkeit der Approximation abschätzen
- fundamentale Konzepte der Numerik kennenlernen
- Newton-Cotes, Gauss, adaptive Quadratur
- zwei-dimensionale Quadratur

Wozu: Oft ist $\int_a^b f(x) dx$ nicht exakt berechenbar

Idee:



$$I[f] = \int_a^b f(x) dx \approx \sum_j w_j \cdot f(x_j) = Q[f]$$

I.1 Polynomiale Interpolation

Gegeben $n+1$ paarweise verschiedene Stützstellen / Knoten x_0, x_1, \dots, x_n und zugehörige Stützwerte y_0, y_1, \dots, y_n

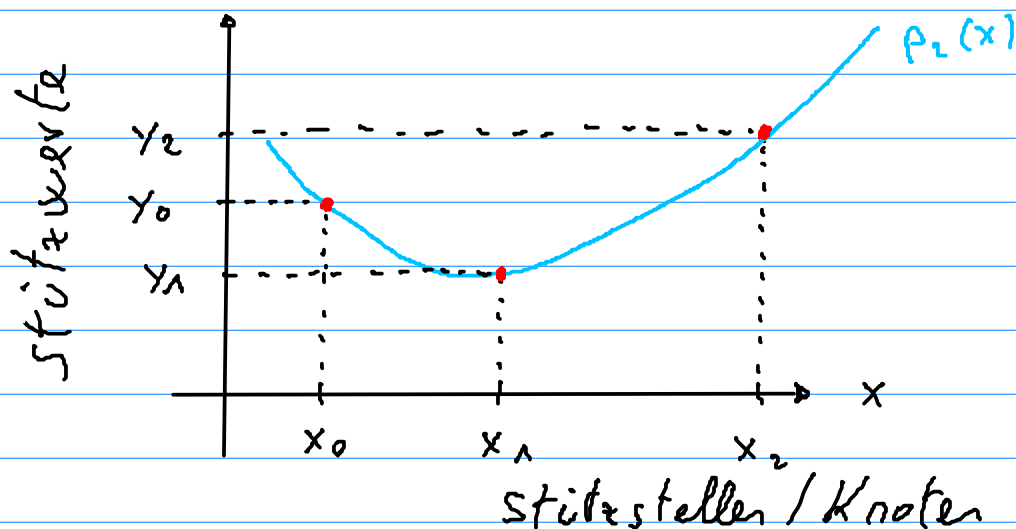
finde das Polynom n -ten Grades

$$p_n(x) = a_0 + a_1 \cdot x + \dots + a_n \cdot x^n \in \mathbb{P}_n$$

welches die Interpolationsbedingungen (IB) erfüllt

$$p_n(x_j) = y_j \quad (j=0, 1, \dots, n)$$

Die $n+1$ Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n des sog. Interpolationspolynom (IP) ergeben sich aus den $n+1$ IB (n+1 lineares Gleichungssystem) (LGS)



Bsp.: (1) Finde $p_2(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2$

mit $(x_0, y_0) = (1, 2)$, $(x_1, y_1) = (3, 5)$ und

$(x_2, y_2) = (4, 4)$

Die IB lauten

$$p_2(x_0) = p_2(1) = a_0 + a_1 + a_2 = 2 = y_0$$

$$p_2(x_1) = p_2(3) = a_0 + 3a_1 + 9a_2 = 5 = y_1$$

$$p_2(x_2) = p_2(4) = a_0 + 4a_1 + 16a_2 = 4 = y_2$$

Oder als LGS

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Lösen ... $a_0 = -2$, $a_1 = \frac{23}{6}$, $a_2 = -\frac{5}{6}$

MATLAB: - $p = \text{polyfit}(x, y, n)$

- Einfache Auswertung mit polyval

Das IP kann man auch direkt mittels der Lagrange'schen Interpolationsformel (LI) bestimmen

$$p_n(x) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot L_j^{\wedge}(x)$$

wobei

$$L_j^{\wedge}(x) = \prod_{\substack{i=0 \\ i \neq j}}^n \frac{x - x_i}{x_j - x_i} \quad (j = 0, 1, \dots, n)$$

die sog. Lagrange-Polynome (LP) sind.

Die LP haben folgende Eigenschaften

(LP1) $L_j^{\wedge}(x)$ sind Polynome n -ten Grades

$$(LP2) \quad L_j^{\wedge}(x_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1, & j=k \\ 0, & j \neq k \end{cases}$$

(LP2) ist der Grund wieso LI die IB erfüllt:

$$p_n(x_i) = \sum_{j=0}^n y_j \cdot L_j^{\wedge}(x_i)$$

$$= 0 + \dots + 0 + y_i \cdot \underbrace{L_i^{\wedge}(x_i)}_1 + 0 + \dots$$

$$= y_i \checkmark$$

Bsp.: (2) Finde das IP durch $(x_0, y_0) = (1, 2)$,
 $(x_1, y_1) = (3, 5)$ und $(x_2, y_2) = (4, 5)$

↪ wie Bsp. (1)!

Berechne die LP:

$$\begin{aligned} L_0^2(x) &= \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} \cdot \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} = \frac{x - 3}{1 - 3} \cdot \frac{x - 4}{1 - 4} \\ &= \frac{1}{6} (x - 3)(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1^2(x) &= \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} \cdot \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} = \frac{x - 1}{3 - 1} \cdot \frac{x - 4}{3 - 4} \\ &= -\frac{1}{2} (x - 1)(x - 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_2^2(x) &= \frac{x - y_0}{x_2 - x_0} \cdot \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{x - 1}{4 - 1} \cdot \frac{x - 3}{4 - 3} \\ &= \frac{1}{3} (x - 1)(x - 3) \end{aligned}$$

Damit

$$p_2(x) = 2 \cdot L_0^2(x) + 5 \cdot L_1^2(x) + 4 \cdot L_2^2(x)$$

$$= \dots = -2 + \frac{29}{6}x - \frac{5}{6}x^2$$

(\equiv Bsp. (1) \checkmark .)

I.2 Interpolationsfehler

Nun sollen die Stützwerte y_j Werte einer Funktion f an den paarweise verschiedenen Stützstellen x_j sein und wir fragen uns wie gut das IP die Funktion f zwischen den Stützstellen approximiert.

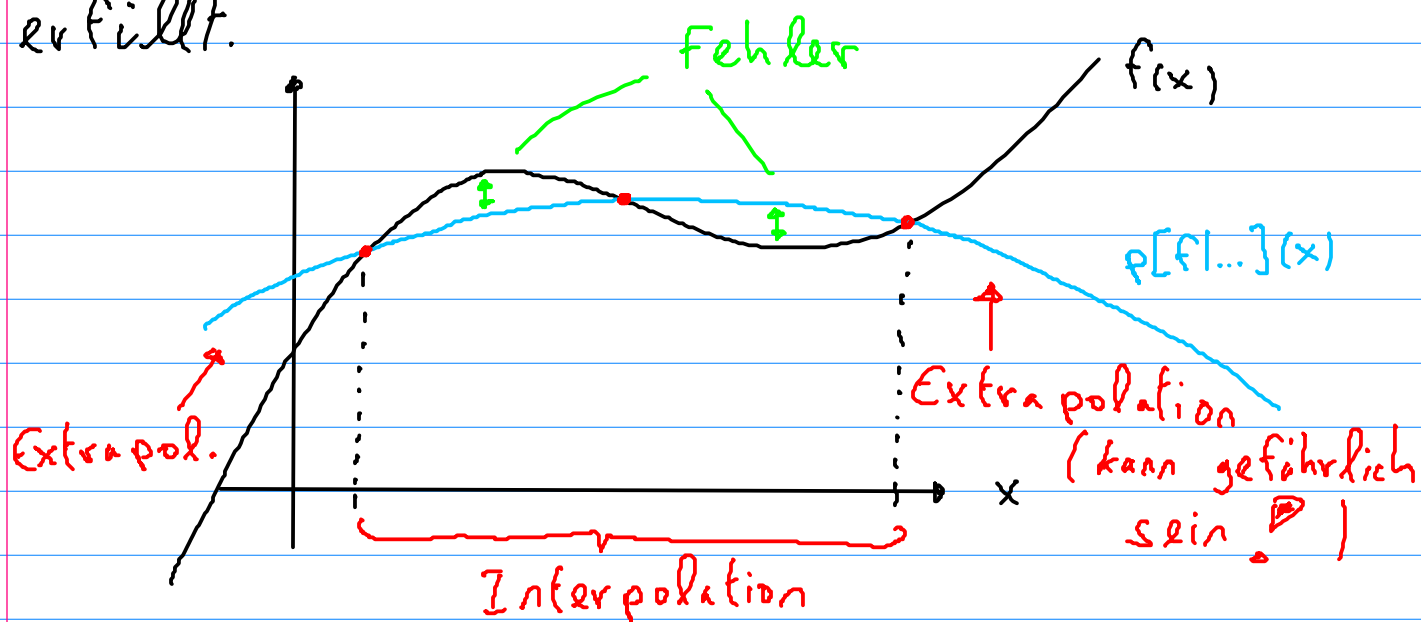
Sei also $f: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ und wir bezeichnen mit

$$p[f|x_0, \dots, x_n](x) \in \mathbb{P}_n$$

das IP welches die IB

$$p[f|x_0, \dots, x_n](x_j) = f(x_j) \quad (j=0, 1, \dots, n)$$

erfüllt.



Für f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar lässt sich zeigen, dass es für jedes $x \in I$ ein $\xi = \xi(x) \in I$ gibt mit

hängt von x ab!

$(n+1)$ -te Ableitung

$$e(x) = f(x) - p[f|x_0, \dots, x_n](x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x-x_j)$$

hängt von f ab den Stützstellen ab

$e(x)$ ist eine Fehlerfunktion über das ganze Intervall I . Oft ist man (nur) am grössten Fehler über I interessiert:

$$\|e\|_{\infty} = \max_{x \in I} |e(x)| \quad (\text{Maximumsnorm})$$

$$= \max_{x \in I} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right|$$

$$\leq \max_{x \in I} \left| \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!} \right| \cdot \max_{x \in I} \left| \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right|$$

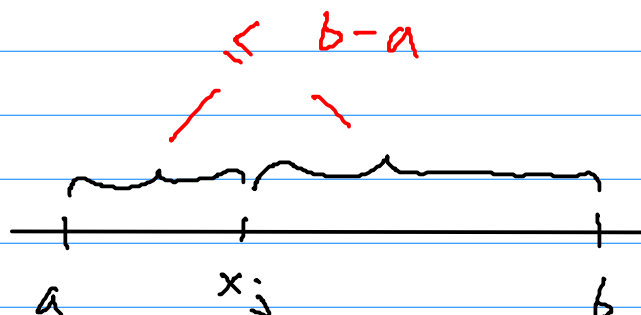
Abschätzung

$$= \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} \left\| \prod_{j=0}^n (x-x_j) \right\|_{\infty}$$

$\leq b-a$

$$\leq \frac{\|f^{(n+1)}\|_{\infty}}{(n+1)!} (b-a)^{n+1}$$

Die letzte Abschätzung kann am besten graphisch verstehen:



Die Aussage "für f $(n+1)$ -mal stetig differenzierbar" werden wir noch oft sehen.

Man kann auch sagen: - $f \in C_{n+1}[I]$

weniger
präzise ...

- f genügend glatt (smooth)
- f genügend oft stetig differenzierbar

I.3 Numerische Integration = Quadratur

9

Ziel: Approximation von

$$I[f] = \int_a^b f(x) dx$$

berechnen

Idee: Verwende Polynomiale Interpolation um $f(x)$ zu approximieren und integriere

$$p[f/x_0, \dots, x_n]$$

(... Polynome sind einfach zu integrieren...)

Def.: Eine endliche Rechenvorschrift der Form

$$Q[f] = \sum_{j=0}^n w_j \cdot f(x_j)$$

zur Approx. von $I[f]$ nennt man Quadraturregel (QR) oder Quadraturformel.

Die $x_j \in I = [a, b]$ nennt man (Quadratur) Knoten oder Integrationsstützstellen und die w_j (Quadratur) Gewichte.

Quadraturregeln können nun ganz einfach hergeleitet werden.

Seien $x_0, x_1, \dots, x_n \in I$ uns gegebene Knoten.

Dann ist das IP einer Funktion f

$$p[f|x_0, \dots, x_n] = \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot L_j^n(x)$$

Da das IP die Funktion approx., so gilt

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \int_a^b p[f|x_0, \dots, x_n] dx \\ &= \int_a^b \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot L_j^n(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^n \int_a^b f(x_j) L_j^n(x) dx \\ &= \sum_{j=0}^n f(x_j) \underbrace{\int_a^b L_j^n(x) dx}_{\text{Konstant!}} \\ &= \sum_{j=0}^n f(x_j) \cdot w_j = Q_n[f] \end{aligned}$$

Die Quadratur Gewichte können also ganz einfach berechnet werden:

$$w_j = \int_a^b L_j^n(x) dx$$

Beachte: Die w_j sind unabhängig von f !

D.h. für gegebene Knoten x_j kann man sie ein für alle Mal berechnen und tabellieren.

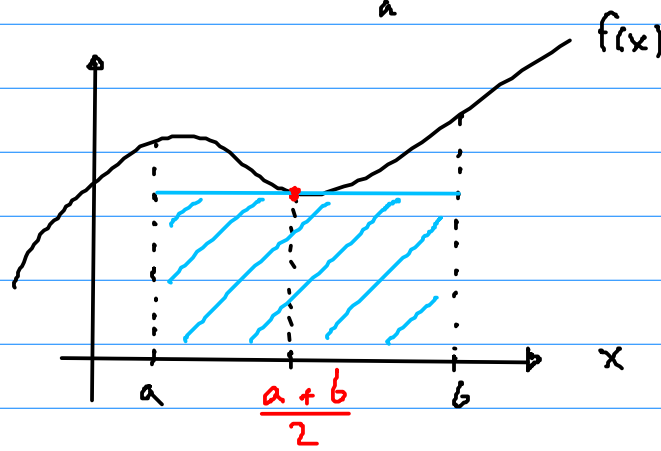
Wichtige Beispiele ...

Bsp.: (3) Mittelpunktsregel (MR) ($n=0$)

$$\text{Knoten: } x_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{LP: } L_0^0(x) = 1$$

$$\text{Gewichte: } w_0 = \int_a^b L_0^0(x) dx = b-a$$



Damit

$$Q_0[f] = (a+b) \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$$

(4) Trapezregel (TR) ($n=1$)

Knoten: $x_0 = a$, $x_1 = b$

LP : $L_j^0(x) = \frac{x-b}{a-b}$

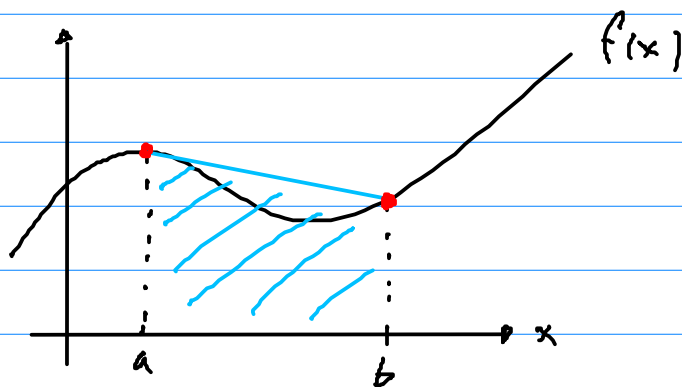
$$L_j^1(x) = \frac{x-a}{b-a}$$

Gewichte: $w_0 = \int_a^b L_j^0(x) dx = \int_a^b \frac{x-b}{a-b} dx$

$$= \frac{b-a}{2}$$

$$\int_a^b \frac{(x-b)^2}{2(a-b)} dx = \frac{(x-b)^3}{6(a-b)} \Big|_a^b = \frac{0 - (a-b)^3}{6(a-b)} = -\frac{(a-b)^2}{6}$$

$$w_1 = \dots = \frac{b-a}{2}$$



Damit

$$Q_1[f] = \frac{b-a}{2} (f(a) + f(b))$$

(s) Simpson-Regel (SR) ($n=2$)

Knoten: $x_0 = a$, $x_1 = \frac{a+b}{2}$, $x_2 = b$

$$LP : L_0^2(x) = \frac{x - \frac{a+b}{2}}{a - \frac{a+b}{2}} \cdot \frac{x - b}{a - b}$$

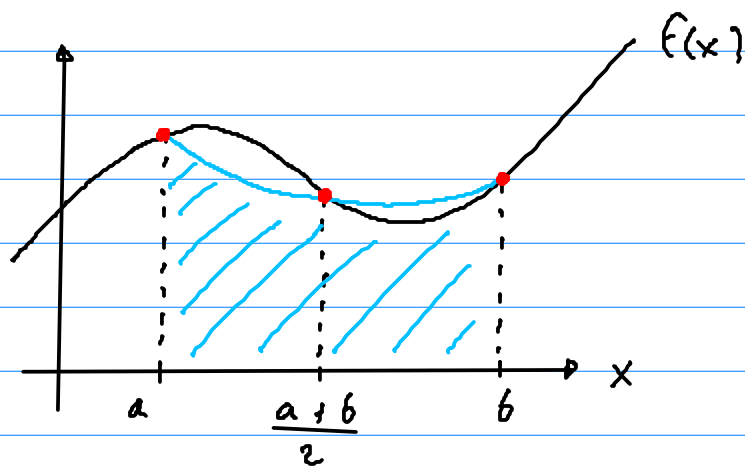
$$L_1^2(x) = \dots$$

$$L_2^2(x) = \dots$$

Gewichte: $w_0 = \int_a^b L_0^2(x) dx = \dots = \frac{b-a}{6}$

$$w_1 = \dots = \frac{4(b-a)}{6}$$

$$w_2 = \dots = \frac{b-a}{6}$$



Damit

$$Q_2[f] = \frac{b-a}{6} \left(f(a) + 4 \cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b) \right)$$

Die MR , TR und SR sind sog.
Newton-Cotes (NC) QR_n.

Bei diesen QR verteilt man die Knoten x_j
 äquidistant über das Intervall $I = [a, b]$

$$n=0: x_0 = \frac{a+b}{2}$$

$$n>0: x_j = a + \frac{b-a}{n} j \quad \text{für } j=0, 1, \dots, n$$

Bem.: (i) TR und SR gehören zu den
 "populärsten" QR

(ii) NC QR mit $n > 6$ werden numerisch
 unbrauchbar (da negative Gewichte w_j
 auftreten)

I.4 Quadraturfehler

Nun interessieren wir uns für die Güte
 von QR_n.

Def.: Wir nennen $E[F] = |Q[F] - I[F]|$
 den Quadraturfehler (QF).

Im Prinzip könnten wir den QF mit Hilfe
 des Interpolationsfehler untersuchen... Dies ist
 jedoch (relativ) "mühsam".

Als ein Maß der Grenarigkeit ein \mathbb{Q} \mathbb{R}
definieren wir:

Def.: