Diskrete und schnelle Fourier-Transformation

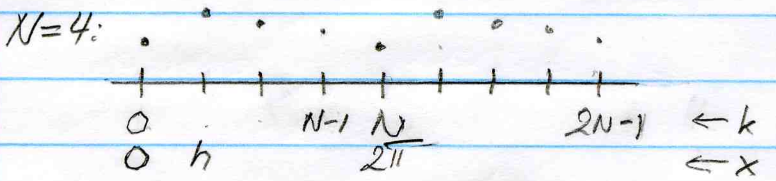
$T_{N-1}^{\mathbb{C}}$: Menge der komplexen trigonometrischen Polynome vom Grade $N-1$ mit Periode 2π

$$p(x) = c_0 + c_1 e^{ix} + \dots + c_{N-1} e^{i(N-1)x} \quad (N \text{ Koeff.})$$

$\hookrightarrow \underset{\sim}{c} = (c_0, \dots, c_{N-1})^T$

2π-period. Daten in äquidist. Stützpunkten $x_k = k \underbrace{\frac{2\pi}{N}}_{=:h}$

N=4:



(x_k, f_k) mit $f(x_k \pm 2\pi) = f(x_k)$

Interpol. Aufgabe: $\underbrace{p(x_k)}_{=p_k} = f_k \quad (\forall k \overset{2\pi\text{-per.}}{\Leftrightarrow} k = 0, \dots, N-1)$

$\hookrightarrow \underset{\sim}{p} = (p_0, \dots, p_{N-1})^T \qquad \underset{\sim}{f} = (f_0, \dots, f_{N-1})^T$

$\Rightarrow \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{f}$

$$\underset{\sim}{p} = \overline{\underset{\sim}{W}}\, \underset{\sim}{c}, \quad \text{wo} \quad \underset{\sim}{W} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{pmatrix}, \quad w = e^{-ih} = e^{-\frac{2\pi}{N}}$$

$$\underset{\sim}{W} \cdot \overline{\underset{\sim}{W}} = N \cdot \underset{\sim}{I} \qquad \text{komplex sym } (\neq \text{Hermitesch}) \quad \underset{\sim}{W} = \underset{\sim}{W}^T$$

$$\Rightarrow \underset{\sim}{W}^{-1} = \frac{1}{N} \overline{\underset{\sim}{W}} = \frac{1}{N} \underset{\sim}{W}^H \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{N}} \underset{\sim}{W} \text{ unitär}$$

$$\underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{f} \ (\text{Interpol!}) \Leftrightarrow \overline{\underset{\sim}{W}}\underset{\sim}{c} = \underset{\sim}{f} \Leftrightarrow \underset{\sim}{c} = \overline{\underset{\sim}{W}}^{-1} \underset{\sim}{f} = \frac{1}{N} \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{f}$$

Also: $\underset{\sim}{c} = \frac{1}{N} \underset{\sim}{W} \underset{\sim}{f} \Leftrightarrow \underset{\sim}{p} = \underset{\sim}{f} = \overline{\underset{\sim}{W}}\underset{\sim}{c}$

diskr. Fourier-Analyse | diskr. Fourier-Synthese

diskrete Fourier-Transf. (DFT)

Kosten: $O(N^2)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & w^4 & w^6 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^3 & w^6 & w^9 \end{pmatrix} \overset{w^4=1}{=} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & w^2 & 1 & w^2 \\ 1 & w & w^2 & w^3 \\ 1 & w^3 & w^2 & w \end{pmatrix}$$

$$= \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & & \\ 1 & w^2 & \multicolumn{2}{c}{0} \\ \hline & & 1 & 1 \\ \multicolumn{2}{c|}{0} & 1 & w^2 \end{array}\right) \left(\begin{array}{cc|cc} \multicolumn{2}{c|}{I} & \multicolumn{2}{c}{I} \\ \hline 1 & 0 & w^2 & 0 \\ 0 & w & 0 & w^3 \end{array}\right)$$

Allg: $W \in \mathbb{C}^{N \times N}$ (mit $N = 2^m$) lässt sich faktorisieren in ein Produkt einer Permutationsmatrix und von m Matrizen sehr einfacher Gestalt

$\Rightarrow$ Aufwand für $\underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{c}$ oder $\underset{\sim}{W}\,\underset{\sim}{f}$ nur $O(\underset{\log_2 N}{m}\, N)$

$\rightarrow$ schnelle Fourier-Transf. (FFT)

~Gauss, Cooley / Tukey (1965)

Anwendbar auf Interpolation von $N = 2M$ reellen Daten durch

$$p(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{M-1} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx \right) + \frac{a_M}{2} \cos Mx$$

(N.B.: $\sin M x_k = 0 \ (\forall k)$)

Reduktion auf komplexen Fall mit M Daten.