Kapitel 0

Vorkenntnisse —
Was man hätte lernen sollen

Wir wollen hier kurz einige Themen aufgreifen, die die meisten Studierenden in der Mittelschule durchgenommen haben sollten.

Keine Angst: alles wird in dieser oder einen anderen Vorlesung explizit oder implizit (in verallgemeinerter Form) noch einmal behandelt. Lücken sind also keine Katastrophe, aber ein gewisser, zeitlich begrenzter Nachteil.

Bemerkung: Die Figuren sind zu ergänzen.

0.1 Lineare Gleichungssysteme

Eine einzige lineare Gleichung in einer Unbekannten x,

$$ax = b\,,$$

hat genau eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{b}{a}\,,$$

ausser wenn $a = 0$. In dieser Ausnahmesituation gibt es zwei Fälle:

$$\begin{array}{lll} b = 0: & \text{jedes } x \text{ ist Lösung} & \Rightarrow \text{es gibt } \infty \text{ Lösungen,} \\ b \neq 0: & \text{kein } x \text{ ist Lösung} & \Rightarrow \text{es gibt keine Lösungen.} \end{array}$$

Betrachten wir als nächstes zwei Gleichungen in zwei Unbekannten.

Beispiel 0.1:

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 - 4x_2 & = & 8 \\ 5x_1 + 3x_2 & = & 7\,. \end{array} \tag{1}$$

Frage: Gibt es eine Lösung und wenn ja, gibt es nur eine? Diese Frage nach Existenz und Eindeutigkeit tritt in der Mathematik bekanntlich immer wieder auf. Wir können sie hier auf konstruktive Art beantworten: wir können alle Lösungen ausrechnen.

Wir lösen die eine Gleichung (z.B. die erste) nach der einen Unbekannten (z.B. der ersten) auf:

$$x_1 = 4 + 2x_2\,. \tag{2}$$

Dann setzen wir dies in die andere Gleichung ein:

$$5(4 + 2x_2) + 3x_2 = 7 \qquad \text{oder} \qquad 13x_2 = -13\,,$$

d.h. $x_2 = -1$. Einsetzen in (2) liefert dann sofort $x_1 = 2$, also:

$$x_1 = 2\,, \qquad x_2 = -1\,.$$

Durch Einsetzen ins ursprüngliche System (1) verifiziert man, dass dieses Zahlenpaar effektiv eine Lösung ist. Wir werden sehen, dass diese Kontrolle gar nicht nötig ist. Es ist auch die einzige Lösung, denn wir haben sie ohne Wahlmöglichkeit abgeleitet. ♦

Gibt es zu zwei Gleichungen in zwei Unbekannten immer genau eine Lösung?

Beispiel 0.2:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 &= 3\,. \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem hat offensichtlich keine Lösung. Multipliziert man nämlich die zweite Gleichung mit 2, erhält man $2x_1 - 4x_2 = 6$. Dies widerspricht der ersten Gleichung. ♦

Beispiel 0.3:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 8 \\ x_1 - 2x_2 &= 4\,. \end{aligned}$$

Nun ist die erste Gleichung einfach das Doppelte der zweiten, und offensichtlich besteht nun kein Widerspruch mehr. Man kann sogar die eine Variable, z.B. x_2, frei wählen und erhält für jede Wahl eine andere Lösung. Das heisst, es gibt eine ganze (einparametrige) Schar von Lösungen. ♦

Die Beispiele 2 und 3 zeichnen sich offensichtlich dadurch aus, dass auf der linken Seite die eine Gleichung ein Mehrfaches der anderen ist. Bei Beispiel 3 besteht diese Abhängigkeit auch auf der rechten Seite. Beides sind offensichtlich Ausnahmefälle.

Also: In der Regel gibt es zu einer linearen Gleichung in einer Unbekannten und zu zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten genau eine Lösung; aber in Ausnahmefällen kann es keine oder unendlich viele geben.

Wir werden sehen, dass das Analoge auch bei n Gleichungen in n Unbekannten richtig ist.

Im Falle von n linearen Gleichungen in n Unbekannten gilt:

- In der Regel gibt es genau eine Lösung.
- Es gibt eine Schar von Lösungen, wenn eine Gleichung als eine Summe von Mehrfachen (“eine Linearkombination”) der anderen dargestellt werden kann.
- Es gibt keine Lösung, wenn eine solche Abhängigkeit zwar auf der linken Seite besteht, nicht aber gleichzeitig für die rechte Seite gilt.

Was gilt bei m Gleichungen in n Unbekannten, wenn $m \neq n$?

BEISPIEL 0.4:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 4x_2 &= 8 \\ 5x_1 + 3x_2 &= 7 \\ x_1 + \ x_2 &= 3\,. \end{aligned}$$

Dieses System mit $m = 3$, $n = 2$ hat keine Lösung. Denn aus Beispiel 1 wissen wir, dass die ersten zwei Gleichungen nur die Lösung $x_1 = 2\,, x_2 = -1$ zulassen, und die steht im Widerspruch zur dritten Gleichung. ♦

Ersetzt man die 3 auf der rechten Seite der letzten Gleichung durch eine 1, so gibt es offenbar genau eine Lösung. Ergänzt man Beispiel 0.3 durch die Gleichung $-3x_1 + 6x_2 = -12$, so findet man sogar ein (ziemlich triviales) Beispiel von drei Gleichungen in zwei Unbekannten mit unendlich vielen Lösungen.

Wenn $m > n$ ("mehr Gleichungen als Unbekannte"), so gibt es in der Regel keine Lösung. Es kann aber eine oder sogar unendlich viele geben, wenn gewisse Abhängigkeiten zwischen den Gleichungen bestehen.

BEISPIEL 0.5:

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + \ x_3 &= 5\,. \end{aligned} \tag{3}$$

Hier ist $m = 2$, $n = 3$. Wenn man von der zweiten Gleichung das Doppelte der ersten subtrahiert, folgt $3x_2 - 3x_3 = 3$ oder $x_2 = x_3 + 1$. Einsetzen in die erste oder die zweite Gleichung ergibt dann noch $x_1 = 2 - x_3$. Man kann also x_3 frei wählen. Nennen wir den freien Parameter t, so lässt sich jede Lösung als Zahlentrippel der Form

$$x_1 = 2 - t\,, \qquad x_2 = 1 + t\,, \qquad x_3 = t$$

darstellen. Mit anderen Worten, die zwei Gleichungen (3) haben die Lösungsmenge

$$\{(2 - t, 1 + t, t);\ t \in \mathbb{R}\}\,,$$

wenn wir uns auf reelle Lösungen beschränken. ♦

Man könnte offensichtlich auch ein Beispiel mit $m = 2$, $n = 3$ konstruieren, das keine Lösung hat. Wir werden sehen, dass gilt:

Wenn $m < n$ ("weniger Gleichungen als Unbekannte"), so gibt es in der Regel eine Schar von Lösungen. Es kann aber in Ausnahmefällen auch keine geben, aber nie nur endlich viele.

Wir werden im folgenden Kapitel 1 ganz allgemein ein lineares Gleichungssystem von m Gleichungen in n Unbekannten lösen und seine Lösungsmenge charakterisieren.

0.2 Vektorrechnung in der Ebene

Die Punkte in der Ebene kann man einerseits durch Ortsvektoren, anderseits durch kartesische Koordinaten charakterisieren:

$$\overrightarrow{OW} = \mathbf{w} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad \overrightarrow{OZ} = \mathbf{z} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad \ldots .$$

Es gibt noch viele andere Bezeichnungsweisen, aber wir verwenden hier diese, weil sie mit der später verwendeten konsistent ist.

Solche Vektoren kann man addieren und mit einer Zahl ("Skalar") multiplizieren:

$$\mathbf{w} + \mathbf{z} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} :\equiv \begin{pmatrix} u + x \\ v + y \end{pmatrix},$$

$$\alpha \mathbf{w} = \alpha \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} :\equiv \begin{pmatrix} \alpha u \\ \alpha v \end{pmatrix}.$$

Diese Operationen haben einfache geometrische Interpretationen.

Insbesondere kann der Vektor von W nach Z als Differenz dargestellt werden:

$$\overrightarrow{WZ} = \mathbf{z} - \mathbf{w}\,.$$

Ergibt sich $\overrightarrow{OW} = \mathbf{w}$ durch Drehung von $\overrightarrow{OZ} = \mathbf{z}$ um den Winkel φ, so kann man dies ausdrücken durch

$$u = x \cos\varphi - y \sin\varphi\,, \qquad v = x \sin\varphi + y \cos\varphi\,. \tag{4}$$

Der Spezialfall $(x, y) = (1, 0)$ illustriert die Definition von Sinus und Cosinus.

Die Beziehungen (4) kann man zusammenfassen in

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \tag{5}$$

oder kürzer als

$$\mathbf{w} = \mathbf{Q}\,\mathbf{z} \tag{6}$$

mit der 2×2 Matrix

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}. \tag{7}$$

$\mathbf{Q}\,\mathbf{z}$ ist ein Matrix-Vektor-Produkt.

Man könnte hier noch vieles anfügen, was vielleicht schon bekannt ist: die Länge eines Vektors, das Skalarprodukt von zwei Vektoren, die Determinante und die Eigenwerte einer quadratischen Matrix.

Die Verallgemeinerung des Vektor- und des Matrixbegriffes und die Behandlung der obgenannten Operationen und Begriffe (nicht aber des sogenannten Vektorproduktes!) ist das Thema dieser Vorlesung: **lineare Algebra**.

0.3 Komplexe Zahlen

Bemerkung: Komplexe Zahlen werden ausführlich in der Analysis behandelt. Wir beschränken uns auf wenige Grundeigenschaften, die wir gelegentlich brauchen werden und kümmern uns nicht um vollständige Herleitungen.

Man könnte die Punkte in der Ebene auch in der Form

$$w = u + \mathrm{i}\, v\,, \qquad z = x + \mathrm{i}\, y\,, \qquad \ldots$$

darstellen, wobei man zunächst i als eine die zweiten Komponenten charakterisierende Flagge auffassen könnte.

Dann ist klar, dass das Folgende vernünfige Definitionen für die **Addition** zweier solcher "Punkte" und für die **Multiplikation mit einer rellen Zahl** α ist:

$$\begin{aligned} w + z &= (u + \mathrm{i}\, v) + (x + \mathrm{i}\, y) = (u + x) + \mathrm{i}\,(v + y)\,, && (8) \\ \alpha w &= \alpha(u + \mathrm{i}\, v) = (\alpha u + \mathrm{i}\, \alpha v)\,. && (9) \end{aligned}$$

Von entscheidender Bedeutung ist jetzt aber, dass man für diese Zahlen eine die üblichen Regeln erfüllende **Multiplikation** definieren kann, wenn man annimmt, dass formal die binomischen Formeln und die Relation $\mathrm{i}^2 = -1$ gelten:

$$\begin{aligned} w\, z &= (u + \mathrm{i}\, v)(x + \mathrm{i}\, y) = u\, x + \mathrm{i}\,(v\, x + u\, y) + \mathrm{i}^2\,(v\, y) && (10) \\ &= (u\, x - v\, y) + \mathrm{i}\,(v\, x + u\, y)\,. && (11) \end{aligned}$$

Mit dieser Interpretation von i nennt man $z = x + \mathrm{i}\, y$ eine **komplexe Zahl** [*complex number*]; x ist der **Realteil** [*real part*], y der **Imaginärteil** [*imaginary part*]:

$$z = x + \mathrm{i}\, y \quad \Longleftrightarrow \quad x = \mathsf{Re}\, z\,, \qquad y = \mathsf{Im}\, z\,.$$

Die Zahl $\bar{z} = x - \mathrm{i}\, y$ heisst **konjugiert-komplex** [*conjugate complex*] zu z.

Die Menge der komplexen Zahlen bezeichnet man mit $\mathbb{C}$. In Anbetracht der geometrischen Interpretation als Punkte in der Ebene nennt man $\mathbb{C}$ auch die **komplexe Ebene** [*complex plane*]. Die Menge der rellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist diejenige Teilmenge von $\mathbb{C}$, deren Elemente Imaginärteil 0 haben:

$$\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C};\ \mathsf{Im}\, z = 0\}.$$

In der komplexen Ebene ist das die **reelle Achse** [*real axis*], während die Zahlen mit Realteil null die **imaginäre Achse** [*imaginary axis*] bilden.

Man beachte, dass

$$z\,\bar{z} = x^2 + y^2 \geq 0\,, \qquad (12)$$

wobei das Gleichheitszeichen nur gilt, wenn $z = 0$ ist.

Somit kann man stets die normale Quadratwurzel von $z\,\bar{z}$ bilden: die nicht-negative reelle Zahl

$$|z| \;:\equiv\; \sqrt{z\,\bar{z}} \tag{13}$$

heisst **Betrag** [*modulus*] oder **Absolutbetrag** [*absolute value*] der komplexen Zahl z. Nach Pythagoras ist $|z|$ gerade die Länge des Ortsvektors zum Punkt $z = x + \mathrm{i}\,y$ der komplexen Ebene.

Die Beziehung (12) zeigt, wie man die **Division** definieren muss:

$$\frac{z}{w} = \frac{z\,\bar{w}}{w\,\bar{w}} = \tau\,z\,\bar{w}\,, \qquad \text{wo} \quad \tau \;:\equiv\; \frac{1}{|w|^2}\,. \tag{14}$$

In Real- und Imaginärteil von Zähler und Nenner ausgedrückt ergibt sich

$$\frac{z}{w} = \frac{xu + yv}{u^2 + v^2} + \mathrm{i}\,\frac{uy - xv}{u^2 + v^2}\,. \tag{15}$$

Mit diesen Definitionen gelten für die komplexen Zahlen die gleichen Rechenregeln wie für die reellen Zahlen.

Für den Absolutbetrag ist insbesondere folgendes richtig:

$$\begin{aligned} |z + w| \;&\le\; |z| + |w|\,, && (16)\\ |z\,w| \;&=\; |z|\;|w|\,, && (17)\\ \left|\frac{z}{w}\right| \;&=\; \frac{|z|}{|w|}\,. && (18) \end{aligned}$$

Die komplexen Zahlen als Punkte der komplexen Ebene lassen sich auch in Polarkoordinaten darstellen:

$$z = x + \mathrm{i}\,y \qquad \Longleftrightarrow \qquad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& r\cos\varphi \\ y &=& r\sin\varphi \end{array} \right. \quad \text{falls} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} r &=& |z|\,, \\ \varphi &=& \arccos(x/r) \\ &=& \arcsin(y/r)\,. \end{array} \right.$$

Es gilt also

$$z = r\,(\cos\varphi + \mathrm{i}\;\sin\varphi)\,. \tag{19}$$

Mit der berühmten **Eulerschen Formel** [*Euler formula*]

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi} = \cos\varphi + \mathrm{i}\;\sin\varphi \tag{20}$$

erhalten wir schliesslich

$$z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,. \tag{21}$$

Diese Darstellungen heisst **Polarform** [*polar representation*] von z.

Für die Exponentialfunktion mit komplexem Argument gelten die gleichen Regeln wie bei reellem Argument. Zum Beispiel ist

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}\,, \qquad \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)} = \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}}\,. \tag{22}$$

Wenn $z = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ und $w = s\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\psi}$, so hat man also

$$zw = rs\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi+\psi)}\,, \qquad \frac{z}{w} = \frac{r}{s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\varphi-\psi)}\,. \tag{23}$$

0.4 Polynome

Sind $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reelle oder komplexe Zahlen, so kann man das **Polynom** *[polynomial]*

$$p(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

vom **Höchstgrade** *[maximum degree]* n definieren. Ist $a_n \neq 0$, so sagen wir, n sei der **exakte Grad**. Die Zahlen $a_0, a_1, \ldots, a_n$ bezeichnet man als die **Koeffizienten** *[coefficients]* des Polynoms.

Für uns ist vor allem der Fall interessant, wo auch z reell oder komplex ist. Dann kann man $p(z)$ einen (reellen oder komplexen) Wert zuweisen:

$$p(z) \in \mathbb{R} \qquad \text{oder} \qquad p(z) \in \mathbb{C}\,.$$

Die (reelle oder komplexe) Zahl z_1 heisst **Nullstelle** *[zero]* von p, wenn $p(z_1) = 0$ ist. Ist dies der Fall, so ist

$$q(z) :\equiv \frac{p(z)}{z - z_1} \tag{24}$$

nach dem Kürzen des **Linearfaktors** *[linear factor]* $z - z_1$ ein Polynom vom Grade $n-1$. Der Übergang von $p(z)$ zu $q(z)$ heisst **Deflation** *[deflation]* der Nullstelle z_1.

Sind die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reell und beschränkt man sich auf reelle z, so braucht ein Polynom bekanntlich keine Nullstelle zu haben (Bsp.: $z^2 + 1$). Anders ist es, wenn wir komplexe Nullstellen zulassen; dann sind sogar komplexe Koeffizienten erlaubt:

Satz 0.1 *Ein (reelles oder komplexes) Polynom p vom exakten Grade $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ (mindestens) eine Nullstelle:*

$$\exists z_1 \in \mathbb{C}: \qquad p(z_1) = 0\,.$$

Mit Induktion folgert man daraus mittels Deflation:

Korollar 0.2 *Ein (reelles oder komplexes) Polynom p vom exakten Grade $n \geq 1$ hat in $\mathbb{C}$ genau n Nullstellen, die aber nicht alle verschieden sein müssen; genauer, p lässt sich als Produkt von n Linearfaktoren darstellen:*

$$p(z) = a_n (z - z_1)(z - z_2) \cdots (z - z_n) \equiv a_n \prod_{k=1}^{n} (z - z_k)\,.$$

0.5 Das griechische Alphabet

Das griechische Alphabet hat 24 Buchstaben, aber zu einzelnen gibt es zwei Schreibweisen:

α	`alpha`	ι	`iota`	σ	`sigma`
β	`beta`	κ	`kappa`	ς	`sigma`
γ	`gamma`	λ	`lambda`	τ	`tau`
δ	`delta`	μ	`mu`	υ	`ypsilon`
ϵ	`epsilon`	ν	`nu`	ϕ	`phi`
ε	`epsilon`	ξ	`xi`	φ	`phi`
ζ	`zeta`	o	`omikron`	χ	`chi`
η	`eta`	π	`pi`	ψ	`psi`
θ	`theta`	ρ	`rho`	ω	`omega`
ϑ	`theta`	ϱ	`rho`		
Γ	`Gamma`	Ξ	`Xi`	Φ	`Phi`
Δ	`Delta`	Π	`Pi`	Ψ	`Psi`
Θ	`Theta`	Σ	`Sigma`	Ω	`Omega`
Λ	`Lambda`	Υ	`Ypsilon`		

Die restlichen Grossbuchstaben sind gleich wie die entsprechenden des lateinischen Alphabets und sind deshalb für uns nutzlos.

0.6 Notation

Im Prinzip ist jedermann frei, die Mathematik in eigenen Bezeichnungen aufzuschreiben. Aber eine gute und systematische Notation erleichtert das Verständnis.

Wir werden für Vektoren und Matrizen kleine bzw. grosse fette Buchstaben verwenden, damit sie in jeder Formel leicht erkennbar sind:

$$\mathbf{x},\ \mathbf{y},\ ,\ldots,\qquad \mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \ldots.$$

Der Nachteil ist, dass man das so nicht gut von Hand schreiben kann. Aber man kann in Handschrift auf den Unterschied zwischen gewöhnlichen und fetten Buchstaben verzichten, oder die Vektoren und Matrizen durch Unterstreichen markieren, d.h. zum Beispiel $\underline{A}$ schreiben statt $\mathbf{A}$.

Das Gleichheitszeichen hat in der Mathematik und Informatik mindestens drei verschiedene Bedeutungen, und wir werden versuchen, diese auseinander zu halten (was allerdings nicht immer eindeutig möglich ist). Wir schreiben

$=$ für eine Gleichheit von mathematischen Objekten,
$:=$ für eine Zuweisung, wie sie in Algorithmen und Programmen vorkommt,
$:\equiv$ für eine Definition.