

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

„One cannot hear the shape of a drum!“

Stefan, Hagen, Michael, Jakob

Sommerakademie der Studienstiftung des Deutschen Volkes
Schloss Salem 2008

AG 4 : Moderne Verfahren zur Eigenwertberechnung

28. August 2008

Inhalt

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- 1 Das Problem
- 2 Die Theorie
- 3 Das Beispiel
- 4 Numerische Implementierung

Das Problem

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Die Frage:
- Kann man die Form einer Trommel hören? Das heißt: Kann man aus dem Frequenzspektrum einer Trommel eindeutig auf deren Form schließen.

Das Problem

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Die Frage:
- Kann man die Form einer Trommel hören? Das heißt: Kann man aus dem Frequenzspektrum einer Trommel eindeutig auf deren Form schließen.
- Die Antwort:
- Nein, man kann nicht.

Das Problem

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

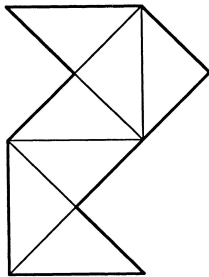
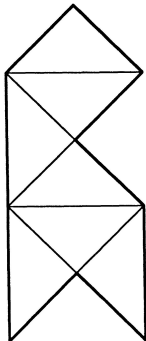
- Die Frage:
- Kann man die Form einer Trommel hören? Das heißt: Kann man aus dem Frequenzspektrum einer Trommel eindeutig auf deren Form schließen.
- Die Antwort:
- Nein, man kann nicht.
- Die nächste Frage:
- Warum nicht?

Ein Beispiel

„One cannot
hear the
shape of a
drum!”

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Diese Trommeln klingen gleich:



Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementierung

Das Eigenwertproblem

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Wellengleichung: $\Delta u(x, y, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}$
- Randbedingung für ein Gebiet Ω : $u = 0$ auf $\partial\Omega$

Das Eigenwertproblem

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Wellengleichung: $\Delta u(x, y, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}$
- Randbedingung für ein Gebiet Ω : $u = 0$ auf $\partial\Omega$
- Separationsansatz $\Rightarrow \Delta \Phi(x, y) = -\lambda \Phi(x, y)$
 $\Phi = 0$ auf $\partial\Omega$

Das Eigenwertproblem

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Wellengleichung: $\Delta u(x, y, t) = \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial t^2}$
- Randbedingung für ein Gebiet Ω : $u = 0$ auf $\partial\Omega$
- Separationsansatz $\Rightarrow \Delta \Phi(x, y) = -\lambda \Phi(x, y)$
 $\Phi = 0$ auf $\partial\Omega$
- Eigenwerte λ entsprechen den Frequenzen: $\sqrt{\lambda} = \omega$

Was man hören kann

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Die Fläche: Weyl's Law $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{A}{2\pi}$

Was man hören kann

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Die Fläche: Weyl's Law $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{A}{2\pi}$
- Den Umfang

Was man hören kann

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Die Fläche: Weyl's Law $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \frac{N(\lambda)}{\lambda} = \frac{A}{2\pi}$
- Den Umfang
- Die Anzahl der Komponenten

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Konstruktion isospektraler Gebiete

Die Idee

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Konstruktion isospektraler Gebiete
- Abbildung der Eigenfunktionen eines Gebiets auf Eigenfunktionen des anderen zum selben Eigenwert

Die Konstruktion - „Origami für Fortgeschrittene“

Das Prinzip

„One cannot hear the shape of a drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

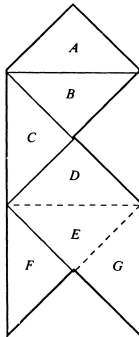
Das Problem

Die Theorie

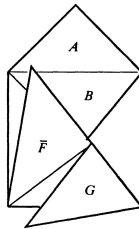
Das Beispiel

Numerische
Implementierung

Falten des Gebiets entlang der Dreiecksanten, z.B.:



(a)



(b)

Die Konstruktion - „Origami für Fortgeschrittene“

Das Prinzip

„One cannot hear the shape of a drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

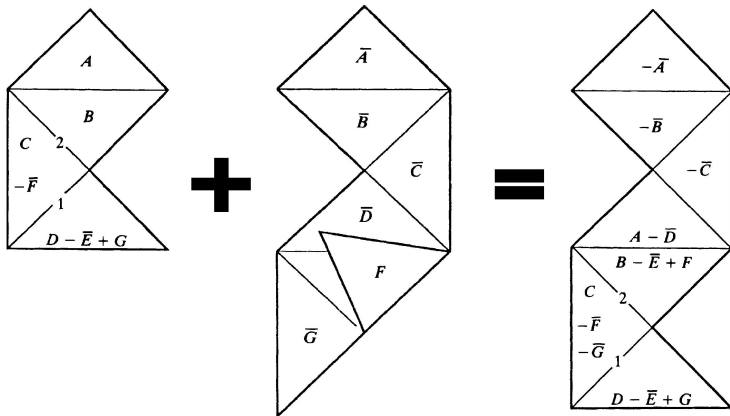
Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementierung

Zusammenkleben mehrerer gefalteter Gebiete zur endgültigen Form



Die Konstruktion - „Origami für Fortgeschrittene“

Das Prinzip

„One cannot hear the shape of a drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

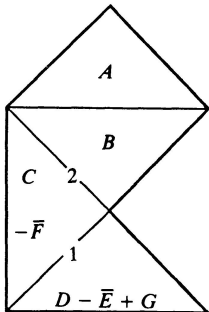
Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementierung

Addition der Funktionswerte:
Falls Rückseite nach oben zeigt: Subtraktion



Die Konstruktion - „Origami für Fortgeschrittene“

Die Bedingungen

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Die Randbedingung $\Phi = 0$ auf $\partial\Omega$ und Stetigkeit ist immer erfüllt.

Die Konstruktion - „Origami für Fortgeschrittene“

Die Bedingungen

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Die Randbedingung $\Phi = 0$ auf $\partial\Omega$ und Stetigkeit ist immer erfüllt.
- Stetige Differenzierbarkeit:

Die Konstruktion - „Origami für Fortgeschrittene“

Die Bedingungen

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

- Die Randbedingung $\Phi = 0$ auf $\partial\Omega$ und Stetigkeit ist immer erfüllt.
- Stetige Differenzierbarkeit:
 - 1 Jede Falte liegt auf dem äußeren Rand der endgültigen Form

Die Konstruktion - „Origami für Fortgeschrittene“

Die Bedingungen

„One cannot hear the shape of a drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementierung

- Die Randbedingung $\Phi = 0$ auf $\partial\Omega$ und Stetigkeit ist immer erfüllt.
- Stetige Differenzierbarkeit:
 - 1 Jede Falte liegt auf dem äußeren Rand der endgültigen Form
 - 2 Kante einer der Originalformen im Inneren muss immer an der entsprechenden Kante des selben gespiegelten Dreiecks grenzen.

Die Konstruktion - „Origami für Fortgeschrittene“

Die Bedingungen

„One cannot hear the shape of a drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementierung

- Die Randbedingung $\Phi = 0$ auf $\partial\Omega$ und Stetigkeit ist immer erfüllt.
- Stetige Differenzierbarkeit:
 - 1 Jede Falte liegt auf dem äußeren Rand der endgültigen Form
 - 2 Kante einer der Originalformen im Inneren muss immer an der entsprechenden Kante des selben gespiegelten Dreiecks grenzen.
- Die neuen Funktionen sind dann \mathcal{C}^2 -Eigenfunktionen zum selben Eigenwert.

Das Beispiel

„One cannot hear the shape of a drum!“

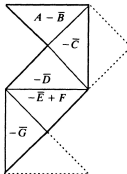
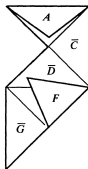
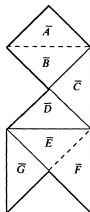
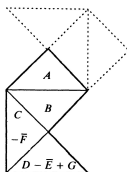
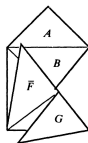
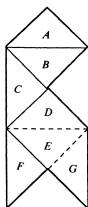
Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung



Das Beispiel

„One cannot hear the shape of a drum!“

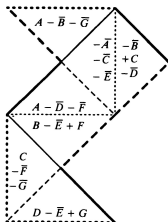
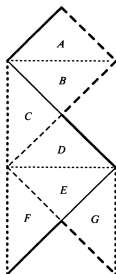
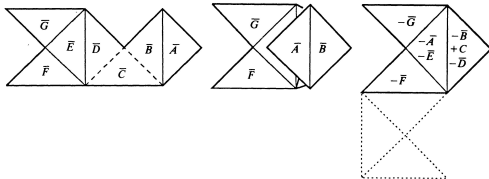
Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung



Numerische Implementierung

„One cannot
hear the
shape of a
drum!“

Stefan,
Hagen,
Michael,
Jakob

Das Problem

Die Theorie

Das Beispiel

Numerische
Implementie-
rung

Soviel zur Theorie, jetzt kommt der numerische Teil.