LINEARE ALGEBRA

Vorlesungsskript zur Veranstaltung

Lineare Algebra

gehalten von

Daniel Kressner

im HS 2010 an der ETH Zürich.

20. Januar 2011

- Zur Vorbereitung des vorliegenden Skriptes wurden die folgenden Quellen benutzt:

  1. Gutknecht, Martin. Lineare Algebra für Informatiker. Vorlesungsskript ETH Zürich, 2009. (Kapitel 0, 1, 2)
  2. Liesen, Jörg und Mehrmann, Volker. Lineare Algebra. Vorlesungsskript TU Berlin, Juli 2010. (Kapitel 2, 3)
  3. Meyberg, Kurt. Algebra. Carl Hanser Verlag, 1975. (Kapitel 2)
  4. Strang, Gilbert. Linear Algebra and Its Applications....

  Diese Liste ist *nicht* als Literaturempfehlung zur Prüfungvorbereitung zu verstehen.

- Dank an Holger Brandsmeier und den Studenten der ETH Zürich (D-MATH/D-PHYS HS 2010) für die zahlreichen Korrekturvorschläge. Einige der Illustrationen wurden von Michael Steinlechner erstellt.

- Korrekturvorschläge bitte unter `http://elbanet.ethz.ch/wikifarm/dkressner/index.php` eintragen (Passwort `nm2008`) oder. direkt an

  `kressner@math.ethz.ch`.

Kapitel 0

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme haben die Entwicklung der Linearen Algebra historisch entscheidend beeinflusst. In diesem einleitenden Kapitel wollen wir kurz, in Anlehnung an die Schulmathematik, geometrische Veranschaulichung und Lösung von linearen Gleichungssystemen vorstellen.

Eine Gleichung in einer Unbekannten. Eine einzige lineare Gleichung in einer Unbekannten x,

$$ax = b\,,$$

hat genau eine Lösung, nämlich

$$x = \frac{b}{a}\,,$$

ausser wenn $a = 0$. In dieser Ausnahmesituation gibt es zwei Fälle:

$$\begin{array}{lll} a = 0,\ b = 0: & \text{jedes } x \text{ ist Lösung} & \Rightarrow \text{es gibt unendlich viele Lösungen,} \\ a = 0,\ b \neq 0: & \text{kein } x \text{ ist Lösung} & \Rightarrow \text{es gibt keine Lösungen.} \end{array}$$

Zwei Gleichungen in zwei Unbekannten. Betrachten wir als nächstes zwei Gleichungen in zwei Unbekannten x_1 und x_2.

Beispiel 0.1:

$$\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & = & 4 \\ 6x_1 - 2x_2 & = & 8\,. \end{array} \tag{0.1}$$

Frage: Gibt es eine Lösung und wenn ja, gibt es nur eine? Diese Frage nach Existenz und Eindeutigkeit tritt in der Mathematik immer wieder auf.

Wir wollen sie zunächst geometrisch beantworten. Dazu stellen wir die Gleichungen in (0.1) so um, dass sich auf der linken Seite nur noch die Variable x_2 befindet:

$$x_2 = -x_1 + 4, \quad x_2 = 3x_1 - 4\,. \tag{0.2}$$

In der (x_1, x_2)-Ebene liegen also alle Lösungen der ersten Gleichung auf einer Geraden mit Steigung -1 und Verschiebung $+4$. Ebenso liegen alle Lösungen der zweiten Gleichung auf einer Geraden mit Steigung 3 und Verschiebung -4. Die gemeinsame Lösung der beiden Gleichungen ist also der Schnittpunkt $(x_1, x_2) = (2, 2)$ der beiden Geraden, siehe Abb. 0.1.

Wir können die Frage der Lösbarkeit natürlich auch ohne Geometrie beantworten. Dazu folgern wir aus (0.2),

$$-x_1 + 4 = x_2 = 3x_1 - 4\,,$$

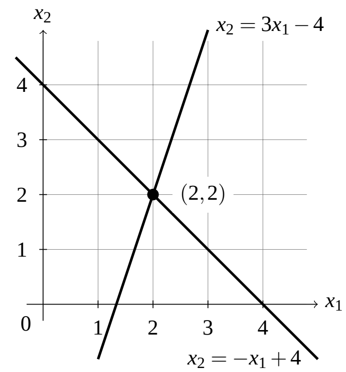


Abbildung 0.1. *Geometrische Interpretation von Beispiel 0.1: Die Lösung ist der Schnittpunkt der beiden Geraden.*

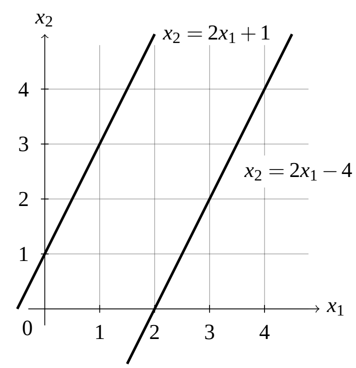


Abbildung 0.2. *Geometrische Interpretation von Beispiel 0.2: Da beide Geraden parallel liegen, gibt es keine Lösung.*

durch Umstellen $4x_1 = 8$ und somit $x_1 = 2$. Einsetzen von $x_1 = 2$ in eine der beiden Gleichungen ergibt $x_2 = 2$. Durch Einsetzen ins ursprüngliche System (0.1) verifiziert man, dass dieses Zahlenpaar effektiv eine Lösung ist. ♦

Gibt es zu zwei Gleichungen in zwei Unbekannten immer genau eine Lösung?

Beispiel 0.2:

$$\begin{array}{rcl} 4x_1 - 2x_2 & = & -2 \\ 2x_1 - x_2 & = & 4\,. \end{array} \tag{0.3}$$

Dieses Gleichungssystem hat offensichtlich keine Lösung. Multipliziert man nämlich die zweite Gleichung mit 2, erhält man $4x_1 - 2x_2 = 8$. Dies widerspricht der ersten Gleichung. Geometrisch bedeutet dies, dass die entsprechenden Geraden parallel zueinander liegen und daher keinen Schnittpunkt haben, siehe Abb. 0.2. ♦

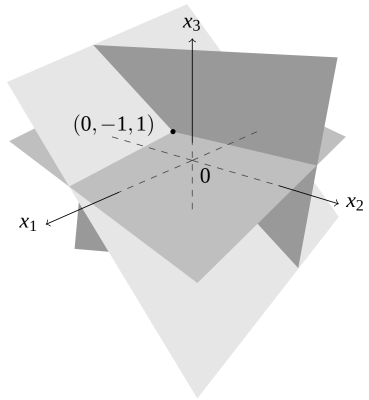


Abbildung 0.3. *Geometrische Interpretation von Beispiel 0.4: Die Lösung ist der Schnittpunkt der drei Ebenen.*

Beispiel 0.3:

$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= 8 \\ 2x_1 - x_2 &= 4\,. \end{aligned}$$

Jetzt ist die erste Gleichung einfach das Doppelte der zweiten, und offensichtlich besteht nun kein Widerspruch mehr. Man kann sogar die eine Variable, z.B. x_2, frei wählen und erhält für jede Wahl eine andere Lösung. Das heisst, es gibt hier unendlich viele Lösungen. Geometrisch liegen alle Lösungen auf der durch $x_2 = 2x_1 - 4$ beschriebenen Geraden in Abb. 0.2. ♦

Die Beispiele 0.2 und 0.3 zeichnen sich dadurch aus, dass auf den linken Seiten der Gleichungen die eine Gleichung ein Mehrfaches der anderen ist. Bei Beispiel 0.3 besteht diese Abhängigkeit auch auf der rechten Seite. Beides sind Ausnahmefälle.

Also: In der Regel gibt es zu einer linearen Gleichung in einer Unbekannten und zu zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten genau eine Lösung; aber in Ausnahmefällen kann es keine oder unendlich viele geben.

Drei Gleichungen in drei Unbekannten. Wir erweitern nun unsere Diskussion auf drei lineare Gleichungen in drei Unbekannten x_1, x_2, x_3.

Beispiel 0.4:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1+ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1+ & 4x_2+ & 16x_3 & = & 12 \\ 4x_1+ & 2x_2+ & x_3 & = & -1 \quad . \end{array} \tag{0.4}$$

Geometrisch schränkt jede einzelne dieser drei Gleichungen die Menge der möglichen Lösungen auf eine Ebene ein, siehe Abb. 0.3. Mit etwas Glück errät man den Schnittpunkt $(x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 1)$ dieser drei Ebenen. Da es nur einen Schnittpunkt gibt ist dies die einzige Lösung von (0.4).

Um die Lösung von (0.4) ohne Geometrie auszurechnen, könnten wir im Prinzip wie in Beispiel 0.1 vorgehen und versuchen, Variablen zu eliminieren. Bei drei und mehr Variablen kann dies schnell unübersichtlich werden; es lohnt sich daher systematisch vorzugehen. Dazu subtrahieren wir

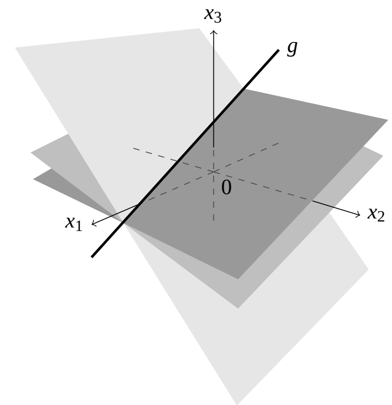


Abbildung 0.4. *Geometrische Interpretation von Beispiel 0.5: Die drei Ebenen schneiden sich in einer Geraden; jeder Punkt auf der Geraden ist Lösung.*

das 3- bzw. 4-Fache der ersten Gleichung von der zweiten bzw. dritten Gleichung und erhalten:

$$\begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{rrrcr} 1x_1+ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1+ & 4x_2+ & 16x_3 & = & 12 \\ 4x_1+ & 2x_2+ & x_3 & = & -1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rrcr} 1x_1+4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ -8x_2+ & 4x_3 & = & 12 \\ -14x_2- & 15x_3 & = & -1 \quad . \end{array}$$

Die Vielfachen wurden gerade so gewählt, dass die Variable x_1 aus der zweiten und dritten Gleichung verschwindet. Jetzt eliminieren wir noch die Variable x_2 in der dritten Gleichung indem wir das $7/4$-Fache der zweiten von der dritten Gleichung subtrahieren:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \frac{7}{4} \end{array} \begin{array}{rrcr} 1x_1+4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \\ -8x_2+ & 4x_3 & = & 12 \\ -14x_2- & 15x_3 & = & -1 \end{array} \quad \Longrightarrow \quad \begin{array}{rcr} 1x_1+4x_2+4x_3 & = & 0 \\ -8x_2+4x_3 & = & 12 \\ -22x_3 & = & -22 \quad . \end{array}$$

Diese reduzierte Form erlaubt es, die Gleichungen von unten nach oben sukzessive zu lösen. Zunächst folgt aus $-22x_3 = -22$ sofort $x_3 = 1$. Einsetzen in die zweite Gleichung ergibt $-8x_2 + 4 \cdot 1 = 12$, also $x_2 = -1$. Einsetzen der bekannten Werte für x_1, x_2 in die erste Gleichung ergibt $x_1 + 4 \cdot (-1) + 4 \cdot 1 = 0$, also $x_1 = 0$. ♦

Es lassen sich auch hier Beispiele konstruieren, bei denen die drei Gleichungen keine oder unendlich viele Lösungen haben.

Beispiel 0.5:

$$\begin{array}{rrrcr} 3x_1+ & 4x_2+ & 16x_3 & = & 12 \\ 6x_1+ & x_2+ & 25x_3 & = & 24 \\ & 4x_2+ & 4x_3 & = & 0\,. \end{array} \tag{0.5}$$

Bei diesem Beispiel schneiden sich die durch die drei Gleichungen bestimmten Ebenen nicht mehr in einem Punkt sondern in einer Geraden. Jeder Punkt dieser Schnittgeraden ist Lösung von (0.5); es gibt also unendlich viele Lösungen!

Wir können analog wie in Beispiel 0.4 vorgehen, um die Lösungen zu bestimmen. Subtraktion des 2-Fachen der ersten von der zweiten Zeile ergibt:

$$\begin{array}{rrcr} 3x_1+4x_2+ & 16x_3 & = & 12 \\ -7x_2- & 7x_3 & = & 0 \\ 4x_2+ & 4x_3 & = & 0 \quad . \end{array}$$

Nach dieser Transformation sieht man, dass die dritte Gleichung ein blosses Vielfaches der zweiten Gleichung und damit überflüssig ist. Wählen wir x_3 als freien Parameter so erhalten wir aus der zweiten Gleichung $x_2 = -x_3$. Einsetzen in die erste Gleichung liefert $3x_1 - 4x_3 + 16x_3 = 12$, also $x_1 = 4 - 4x_3$. Die Lösungen bilden also eine Schar von Punkten der Form $(4 - 4x_3, -x_3, x_3)$; dies beschreibt gerade die Schnittgerade g in Abbildung 0.4. ♦

Beliebig viele Gleichungen in beliebig vielen Unbekannten. Wir werden sehen, dass sich die oben gewonnenen Erkenntnisse auf beliebig viele Gleichungen übertragen lassen, vorausgesetzt dass die Anzahl der Gleichungen der Anzahl der Unbekannten entspricht. Im Verlauf der Vorlesung werden wir sogar den Fall von m Gleichungen in n Unbekannten mit $m \neq n$ behandeln. Bevor wir zu diesen Verallgemeinerungen kommen, werden wir aber Matrizen und Vektoren einführen, um Systeme von linearen Gleichungen nicht nur eleganter sondern auch für den Computer leichter verdaulicher zu schreiben.

Kapitel 1

Matrizenrechnung

Matrizen sind in der Linearen Algebra von zentraler Bedeutung. Formal ist eine Matrix nichts weiter als eine tabellarische Anordnung von Zahlen, ähnlich wie in einem Tabellenkalkulationsprogramm. Interessant werden Matrizen für Anwendungen erst dadurch, dass man mit ihnen mathematische Operationen elegant und kompakt beschreiben kann. **Bitte überlesen Sie im ersten Durchgang alle Hinweise auf MATLAB, welches erst im späteren Verlauf der Veranstaltung eingeführt wird.**

1.1 Grundlegende Definitionen

Matrizen.

Definition 1.1 *Eine* ***$m \times n$–Matrix*** *[m × n matrix; m-by-n matrix] (pl.* ***Matrizen*** *[matrices]) ist ein rechteckiges Schema von mn reellen Zahlen*[1]*, angeordnet in m* ***Zeilen*** *[rows] und n* ***Spalten*** *[columns].*

Die mn Zahlen einer Matrix werden **Elemente** *[elements]* oder auch **Einträge** *[entries]* genannt. Das (i, j)–Element der Matrix A, welches in der i–ten Zeile und in der j–ten Spalte steht, bezeichnen wir mit a_{ij} oder auch $(A)_{ij}$. Die Elemente werden in runde Klammern[2] eingefasst:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Beispiel 1.1:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

ist eine 2×3–Matrix. Das $(1, 2)$-Element ist $(A)_{12} = a_{12} = 3$. ♦

In MATLAB ist die Eingabe von Matrizen besonders einfach. Das folgende Skript vollzieht Beispiel 1.1 nach.

[1] Matrizen können auch aus anderen Objekten aufgebaut sein, z.B. komplexen Zahlen oder sogar Polynomen. Dazu kommen wir in den Abschnitten 2.4 und 2.5.

[2] Üblich sind auch eckige Klammern.


```
>> A = [  5  3  1; 4 -1  4 ]
A =  5     3     1
     4    -1     4
>> A(1,2)
```

In MATLAB werden Matrixelemente mit eckigen Klammern eingefasst, Zeilen mit Semikolon abgeteilt, Elemente innerhalb einer Zeile mit einem Leerzeichen oder einem Komma abgeteilt. Um Fehlerquellen zu vermeiden, empfiehlt es sich grundsätzlich dann ein Komma zu verwenden wenn Elemente mit zusammengesetzten Ausdrücken auftreten. Die **Grösse** *[size]* (m, n) einer $m \times n$–Matrix kann in MATLAB mit `size` abgerufen werden.

Spalten- und Zeilenvektoren. Wichtige Spezialfälle sind $m \times n$-Matrizen mit nur einer Spalte $(n = 1)$ oder nur einer Zeile $(m = 1)$.

Definition 1.2 *Eine $m \times 1$–Matrix heisst* ***Spaltenvektor*** *[column vector] der* ***Länge*** *[length] m und eine $1 \times n$–Matrix heisst* ***Zeilenvektor*** *[row vector] der Länge n.*

Wir arbeiten vorzugsweise mit Spaltenvektoren und nur selten mit Zeilenvektoren. Oft wird daher ein Spaltenvektor auch bloss als Vektor bezeichnet. Das k–te Element eines Spaltenvektors x bzw. Zeilenvektors w nennen wir k–te **Komponente** und bezeichnen es mit x_k bzw. w_k:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}, \qquad w = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n \end{pmatrix}.$$

In MATLAB erhält man den j-ten Spaltenvektor bzw. i-ten Zeilenvektor einer Matrix A mit `A(:,j)` bzw. `A(i,:)`.

```
>> A = [  8  1  6; 3  5  7; 4  9  2 ];
>> A(:,1),
ans = 8
      3
      4
>> A(2,:),
ans = 3   5   7
```

Die Länge eines Spalten- oder Zeilenvektors kann in MATLAB mit `length` abgerufen werden.

1.2 Einige spezielle Matrixtypen

Quadratische Matrizen. Eine $n \times n$–Matrix (d.h. eine Matrix mit n Spalten und gleich vielen Zeilen) ist eine **quadratische Matrix** *[square matrix]* der **Ordnung** *[order]* n. In Anwendungen sind Matrizen oft quadratisch. Möchte man explizit darauf hinweisen, dass eine Matrix nicht quadratisch zu sein braucht, so wird die Matrix als **rechteckig** *[rectangular matrix]* bezeichnet.

Nullmatrizen und -vektoren. Eine $m \times n$–Matrix, deren Elemente alle Null sind, heisst **Nullmatrix** *[zero matrix]*. Sie wird mit 0 bezeichnet.[3] Analog ist der **Nullvektor** *[zero vector]* ein Spaltenvektor mit lauter Nullen als Komponenten; er wird hier mit o bezeichnet.[4]

[3] Einige Autoren schreiben allerdings O (gross "Oh") statt 0 (Null).

[4] Oft findet man auch hier die Bezeichnung durch eine gewöhnliche Null: 0.

Beispiel 1.2:

Die 3×3–Nullmatrix und der Nullvektor der Länge 3 sind gegeben durch

$$O = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad o = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

```
>> zeros(3)
ans = 0     0     0
      0     0     0
      0     0     0
>> zeros(3,1)
ans = 0
      0
      0
```

♦

Matrix aller Einsen.
Im Vergleich zur Nullmatrix hat die Matrix aller Einsen, deren Einträge also alle 1 sind, kaum theoretische Bedeutung. Der entsprechende MATLAB-Befehl `ones` zur Erzeugung solcher Matrizen ist aber recht nützlich bei der Eingabe von Matrizen mit vielen Einsen oder identischen Einträgen.

```
>> ones(2)
ans = 1     1
      1     1
>> ones(1,3)
ans = 1     1     1
```

Diagonalelemente einer Matrix und Diagonalmatrizen. Sei A eine $m \times n$-Matrix. Die Elemente a_{jj} $(j = 1, 2, \ldots, \min\{m,n\})$ heissen **Diagonalelemente** [*diagonal elements*]. Die Gesamtheit der Diagonalelemente bildet die **(Haupt-)Diagonale** [*(main) diagonal*] von A.

Eine $n \times n$–Matrix D heisst **diagonal** [*diagonal*], d.h. sie ist eine **Diagonalmatrix** [*diagonal matrix*], falls $(D)_{ij} = 0$ für $i \neq j$. Für die Diagonalmatrix mit gegebenen Diagonalelementen $d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}$ schreiben wir

$$D = \mathrm{diag}\,(d_{11}, d_{22}, \ldots, d_{nn}).$$

Beispiel 1.3: Die Diagonalelemente der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

sind 5 und -1. Die Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $1, 2, 3$ ist die 3×3-Matrix

$$D = \mathrm{diag}\,(1,2,3) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

```
>> diag([ 5  3  1; 4 -1  4 ]),
ans =  5
      -1
>> diag([ 1  2  3 ]),
ans = 1     0     0
      0     2     0
      0     0     3
```

♦

Einheitsmatrix und -vektoren. Die $n \times n$–Matrix $I_n = \mathrm{diag}\,(1, 1, \ldots, 1)$ heisst **Einheitsmatrix** [*unit matrix*] oder auch **Identitätsmatrix** [*identity matrix*] der Ordnung n. Oft schreibt man einfach I und die Grösse ergibt sich aus dem Kontext. Die Spalten der Einheitsmatrix heissen **Einheitsvektoren** [*unit vectors*] und werden mit $e_1, e_2, \ldots, e_n$ bezeichnet. Ein Einheitsvektor e_j zeichnet sich dadurch aus, dass die j-te Komponente Eins ist und alle anderen Komponenten Null sind.

Beispiel 1.4: Die Einheitsmatrix der Ordnung 3 ist

$$I = I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und die entsprechenden Einheitsvektoren sind

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

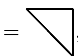
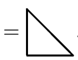
```
>> eye(3),
ans = 1     0     0
      0     1     0
      0     0     1
>> eye(3,2),
ans = 1     0
      0     1
      0     0
```

♦

Dreiecksmatrizen. Eine Matrix R heisst **obere Dreiecksmatrix** [*upper triangular matrix*] (seltener auch: **Rechtsdreiecksmatrix**), falls alle Elemente unterhalb der Diagonalen von R Null sind, also $(R)_{ij} = 0$ für $i > j$.

Eine Matrix L heisst **untere Dreiecksmatrix** [*lower triangular matrix*] (seltener auch: **Linksdreiecksmatrix**), falls alle Elemente oberhalb der Diagonalen von L Null sind, also $(L)_{ij} = 0$ für $i < j$.

Die folgenden Symbole werden für *quadratische* Dreiecksmatrizen verwendet:

$R =$ , $\quad L =$ .

Beispiel 1.5:

Beispiele für obere bzw. untere Dreiecksmatrizen sind

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$L = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 1 & 8 & 0 \\ 1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

```
>> A = [  8  1  6; 3  5  7; 4  9  2 ];
% triu extrahiert oberen
% Dreiecksanteil einer Matrix
>> triu(A),
ans = 8     1     6
      0     5     7
      0     0     2
% tril extrahiert unteren
% Dreiecksanteil einer Matrix
>> tril(A),
ans = 8     0     0
      3     5     0
      4     9     2
```

Man beachte, dass die Definition von Dreiecksmatrizen grundsätzlich auch den Fall zulässt, dass die Matrix rechteckig ist. Beispiele für rechteckige obere und untere Dreiecksmatrizen sind

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

♦

1.3 Notation

In dieser Vorlesung werden Matrizen immer mit Grossbuchstaben $(A, B, \ldots)$, Vektoren mit Kleinbuchstaben $(v, w, x, y, \ldots)$, und skalare Grössen, die nicht Einträge von Vektoren oder Matrizen sind, mit griechischen Buchstaben $(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ bezeichnet.

1.4 Beispiele für Matrizen in Anwendungen

Im Folgenden soll an zwei einfachen Beispielen das Auftreten von Matrizen in der Praxis illustriert werden.

1.4.1 Bilder

Ein farbiges oder graustufiges Bild wird in MATLAB mittels zweier Matrizen definiert: die Farbtabelle [*color map*] sowie die Bilddaten.

Die *Farbtabelle* ist eine reelle $m \times 3$-Matrix C, wobei jede Zeile von C genau eine Farbe codiert. Zur Codierung wird der RGB-Farbraum verwendet und die Einträge der j-ten Zeile entsprechen dem Rotanteil R, dem Grünanteil G und dem Blauanteil B der j-ten Farbe. Jeder Eintrag liegt zwischen 0 und 1, wobei 1 der maximalen Rot-, Grün- bzw. Blau-Intensität entspricht. Der RGB-Farbraum ist additiv; Mischfarben werden durch die additive Synthese gemäss der Dreifarbentheorie erzeugt:

Rotanteil	Grünanteil	Blauanteil	Codierung	Farbe
0	0	0	$(0,0,0)$	Schwarz
1	1	1	$(1,1,1)$	Weiss
1	0	0	$(1,0,0)$	Rot
0	1	0	$(0,1,0)$	Grün
0	0	1	$(0,0,1)$	Blau
1	1	0	$(1,1,0)$	Gelb
0	1	1	$(0,1,1)$	Cyan
1	0	1	$(1,0,1)$	Magenta

Bemerkung 1.3 *Es ist eigentlich üblicher, Farbanteile als natürliche Zahlen zwischen* 0 *und* 255 *anzugeben; Pink z.B. wird als Tupel* $(255,192,203)$ *(Hexadezimalcode* `FFC0CB`*) dargestellt. Für die in* MATLAB *verwendete Codierung sind die Einträge durch* 255 *zu teilen;* MATLAB*s Pink ist* $(1,192/255,203/255)$.

Die *Bilddaten* eines Bildes mit $n \times m$ Pixeln werden in einer $m \times n$-Matrix, nennen wir sie A, abgespeichert. Eine Auflösung von $1\,600 \times 1\,200$ Pixeln ergibt also eine $1\,200 \times 1\,600$ Matrix mit $1\,920\,000$ Einträgen! Jeder Eintrag a_{ij} ist eine natürliche Zahl, so dass sich die Farbe des entsprechenden Pixels aus dem Farbcode in der a_{ij}-ten Zeile der Farbtabelle ergibt.

In MATLAB werden Bilder mit `image` angezeigt und die entsprechende Farbtabelle mit `colormap` eingestellt. Externen Bilddateien können mit `imread` eingelesen werden.

Beispiel 1.6: Das folgende Skript erzeugt das in Abb. 1.1 dargestellte Schachbrettmuster.[5]

```
map = [ 0 0 0; 1 1 1 ];
brett = ones(8);
brett(1:2:8,1:2:8) = 2;
brett(2:2:8,2:2:8) = 2;
image(brett);
colormap(map);
axis off, axis square
```

[5] Die Befehle `brett(1:2:8,1:2:8)` bzw. `brett(2:2:8,2:2:8)` wählen jede zweite Zeile/Spalte beginnend von der ersten bzw. zweiten Spalte der Matrix aus.

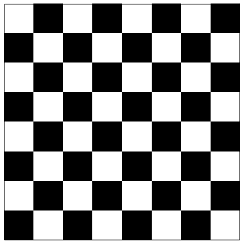
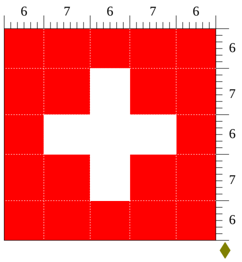


Abbildung 1.1. *Schachbrettmuster aus Beispiel 1.6*

Übung 1.1: 1889 wurden die Masse der Schweizer Flagge festgelegt. Die Balken sind um ein Sechstel länger als breit, und der Abstand zum Fahnenrand ist auf allen Seiten gleich. Zudem ist die Form der Flagge quadratisch. (Die Schweiz ist übrigens das einzige UNO-Mitglied mit quadratischer Flagge.)



Der genaue Farbton von Rot ist seit 2007 als sogenannte Pantonezahl 485 festgelegt; dies entspricht im RGB-System ungefähr $(1,0,0)$. „Malen“ Sie unter Beachtung dieser Vorgaben die Schweizer Flagge indem Sie die Bilddaten explizit in eine 32×32-Matrix eintragen und mit `image` unter Verwendung der korrekten Farbtabelle anzeigen. Speichern Sie das Ergebnis mit `imwrite` als gif-Datei. Hinweis: Sie können sich sehr viel Mühe ersparen, indem Sie den Operator : zur Auswahl von Untermatrizen verwenden.

1.4.2 Graphen

Ein **Graph** $G = (V,E)$ besteht aus einer Menge von **Knoten** [*vertices*] V und einer Menge von **Kanten** [*edges*] E, die zwischen den Knoten verlaufen. Je nach Art der Kanten unterscheidet man zwischen ungerichteten und gerichteten Graphen.

Ungerichtete Graphen. Bei einem ungerichteten Graphen sind die Kanten *ungeordnete* Paare von Knoten.

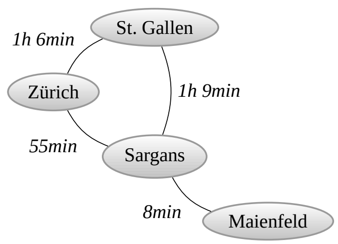
Beispiel 1.7:

Die rechte Abbildung zeigt einen Ausschnitt des Streckennetzes der SBB mit den entsprechenden Zugfahrzeiten. Das Streckennetz lässt sich als ungerichteter Graph auffassen, mit der Knotenmenge

$$V = \{\text{Maienfeld}, \text{Sargans}, \text{St. Gallen}, \text{Zürich}\}$$

und der Kantenmenge

$$E = \{ \begin{array}{ll} \{\text{Maienfeld}, & \text{Sargans}\}, \\ \{\text{Sargans}, & \text{St. Gallen}\}, \\ \{\text{Sargans}, & \text{Zürich}\}, \\ \{\text{St. Gallen}, & \text{Zürich}\}\}. \end{array}$$



♦

Ein Graph **Graph** $G = (V,E)$ mit n Knoten kann durch eine $n \times n$ **Adjazenzmatrix** [*adjacency matrix*] A repräsentiert werden. Dabei ist $a_{ij} = 1$ wenn die i-ten und j-ten Knoten durch eine Kante verbunden sind. Andernfalls ist $a_{ij} = 0$. So ergibt sich bei Beispiel 1.7 mit alphabetisch aufsteigender Ordnung der Knoten die Adjazenzmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

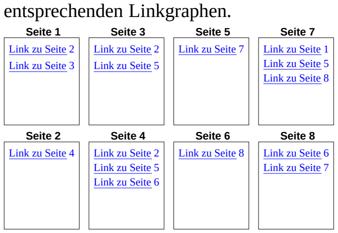
Versieht man die Kanten zusätzlich mit Werten so spricht man von einem **gewichteten Graph** [*weighted graph*]. So sind in Beispiel 1.7 die Kanten mit Fahrzeiten versehen. Setzt man die Fahrzeit formal auf ∞ falls es keine Zugverbindung zwischen zwei Orten gibt, nimmt eine Verweildauer von 0 am gleichen Ort an, und trägt die Fahrzeiten (in Minuten) in die Adjazenzmatrix ein, dann ergibt sich

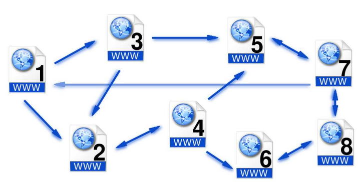
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 8 & \infty & \infty \\ 8 & 0 & 69 & 55 \\ \infty & 69 & 0 & 66 \\ \infty & 55 & 66 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.3}$$

Solche Matrizen spielen bei der Bestimmung der kürzesten Fahrzeit zwischen zwei Orten eine Rolle.

Gerichtete Graphen. Bei gerichteten Graphen sind die Kanten *geordnete* Paare von Knoten.

Beispiel 1.8: Miteinander durch Links verbundene Webseiten lassen sich als gerichteter Graph, dem sogenannten Linkgraphen, darstellen. Die Knoten des Linkgraphen sind gerade die Webseiten und eine Kante von Knoten i zu Knoten j entspricht einem Link von der Webseite i auf die Webseite j. Die folgenden Abbildungen zeigen ein Intranet von 8 untereinander verlinkter Webseiten und den entsprechenden Linkgraphen.





Nummeriert man die Webseiten einfach durch, so erhält man die Knotenmenge $V = \{1,2,\ldots,8\}$. Entsprechend ist die Kantenmenge des Linkgraphen

$$E = \{ \begin{array}{l} (1,2),(1,3),(2,4),(3,2),(3,5),(4,2),(4,5),(4,6), \\ (5,7),(6,8),(7,1),(7,5),(7,8),(8,6),(8,7)\}. \end{array}$$

♦

Die Adjazenzmatrix A eines gerichteten Graphens ist ähnlich wie bei einem ungerichteten Graphen definiert: $a_{ij} = 1$ falls es eine Kante von Knoten i zu Knoten j gibt, ansonsten $a_{ij} = 0$. Auch hier können die Kanten mit Gewichten versehen werden und in die Matrix eintragen werden. So zählt man etwa die Links einer Webseite i und setzt das Gewicht jedes Links von i auf das Reziproke ebendieser Anzahl. Beim Linkgraphen von Beispiel 1.8 ergibt sich die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/3 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

Solche Link-Matrizen werden bei der Bewertung der Webseiten (dem sogenannten Page-Rank) eine Rolle spielen, siehe Kapitel 7.

1.5 Das Rechnen mit Matrizen und Vektoren

In diesem Abschnitt erläutern wir die *Addition und Multiplikation zweier Matrizen* sowie deren *Multiplikation mit einem Skalar*. Dabei sind Zeilen- und Spaltenvektoren als Spezialfälle enthalten, als Matrizen mit nur einer Zeile oder Spalte.

1.5.1 Elementare Operationen

Multiplikation einer Matrix mit einer Zahl. Eine $m \times n$–Matrix A wird **mit einer Zahl (einem Skalar) α multipliziert** [*multiplied by a scalar*], indem man jedes Element von A mit α multipliziert. Die resultierende $m \times n$–Matrix wird mit αA bezeichnet:

$$(\alpha A)_{ij} := \alpha (A)_{ij} \qquad (i = 1,\ldots,m;\ j = 1,\ldots,n).$$

Beispiel 1.9:

$$5\begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -15 & 25 \\ -10 & 20 & -30 \end{pmatrix},$$

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

```
>> 5*[ 1 -3  5; -2  4 -6 ],
ans =      5   -15    25
         -10    20   -30
>> [ 4; 8 ] / 4,
ans =      1
           2
```

♦

Addition von Matrizen Zwei $m \times n$–Matrizen A und B werden **addiert** [*added*], indem man ihre Elemente addiert. Die resultierende $m \times n$–Matrix $A+B$ mit

$$(A+B)_{ij} := (A)_{ij} + (B)_{ij} \qquad (i = 1,\dots,m;\ j = 1,\dots,n)$$

heisst **Summe** [*sum*] der Matrizen A und B.

Beispiel 1.10:

$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ -1 & -5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 5 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

```
>> [  5  2; -1 -5 ] + ...
   [ -1  1;  6  5 ],
ans =    4     3
         5     0
>> [ 2; 5; 9 ] - [ 1; -1; -3 ],
ans =     1
          6
         12
```

♦

Drei wichtige, einfache Eigenschaften der Matrixaddition sind im folgenden Satz zusammengefasst. Sie ergeben sich direkt aus den entsprechenden Eigenschaften der reellen Zahlen.

Satz 1.4 *Es seien $m \times n$-Matrizen A, B gegeben. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $A + O = O + A = A$;

(ii) $A + (-A) = (-A) + A = O$, *wobei* $-A := (-1)A$;

(iii) $A + X = B$ *für* $X := B + (-A)$.

Die Matrix O in Satz 1.4 steht natürlich für die in Abschnitt 1.1 erwähnte $m \times n$-Nullmatrix. Teil (iii) des Satzes führt auf eine sinnvolle Definition der Matrixsubtraktion:

$$B - A := B + (-A). \tag{1.5}$$

Bemerkung 1.5 *Im Gegensatz zur Summe ist das Produkt zweier Matrizen* nicht *durch elementweise Multiplikation definiert; eine solche Operation wird in Anwendungen nur äusserst selten gebraucht.*[6]

1.5.2 Multiplikation einer Matrix mit einem Vektor

Das **Matrix-Vektor-Produkt** [*matrix vector product*] (oder kurz: **Produkt**) einer $m \times n$–Matrix A mit einem Spaltenvektor x der Länge n ist ein Vektor $b := Ax$ der Länge m, dessen Komponenten wie folgt definiert sind:

$$\boxed{b_i := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{in}x_n, \quad (i = 1,\dots,m).} \tag{1.6}$$

[6] Sollte man sie doch einmal brauchen: Die elementweise Multiplikation bezeichnet man als Hadamard- oder Schur-Produkt. In MATLAB lassen sich Operationen elementweise durchführen indem man einen Punkt vor die Operation stellt: `A.*B`, `A./B`, `A.^B`.

In Worten: Die Einträge der i-ten Zeile von A werden mit den Komponenten von x multipliziert und die Summe dieser Produkte ergibt die i-te Komponente von b. In der folgenden Illustration der Matrix-Vektor-Multiplikation steht $\times$ als Platzhalter für einen beliebigen Eintrag:

$$i\text{-te Zeile} \rightarrow \underset{A}{\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix}} \underset{x}{\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{pmatrix}} = \underset{Ax}{\begin{pmatrix} \times \\ \times \\ \times \\ \times \\ \times \end{pmatrix}} \leftarrow (Ax)_i = b_i$$

Beispiel 1.11:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 5 \\ -2 & 4 & -6 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Die Komponenten von $b = Ax$ ergeben sich aus

$$\begin{array}{rclclclcl} b_1 & = & 1\cdot 2 & + & (-3)\cdot 1 & + & 5\cdot(-1) & = & -6, \\ b_2 & = & (-2)\cdot 2 & + & 4\cdot 1 & + & (-6)\cdot(-1) & = & 6. \end{array}$$

In MATLAB werden Matrix-Vektor-Produkte mit dem Operator `*` berechnet, wobei die Matrix links vom Operator und der Spaltenvektor rechts vom Operator stehen.

```
>> A = [ 1 -3  5; -2  4 -6 ];
>> b = [ 2; 1; -1 ];
>> A*b,
ans =   -6
         6
```

♦

Matrix-Vektor-Darstellung linearer Gleichungssysteme. Matrix-Vektor-Produkte erlauben es, lineare Gleichungssysteme kompakt darzustellen. Betrachten wir zunächst das lineare Gleichungssystem aus Beispiel 0.4:

$$\begin{array}{rrrcr} x_1 + & 4x_2 + & 4x_3 & = & 0 \\ 3x_1 + & 4x_2 + & 16x_3 & = & 12 \\ 4x_1 + & 2x_2 + & x_3 & = & -1\ . \end{array} \tag{1.7}$$

Mit den Definitionen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 4 \\ 3 & 4 & 16 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}, \tag{1.8}$$

sieht man leicht, dass (1.7) gerade der Gleichung $Ax = b$ entspricht.

Im allgemeinen hat ein lineares Gleichungssystem mit n Unbekannten und m Gleichungen die Form

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \cdots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Definiert man nun eine $m \times n$-Matrix A mit den Einträgen a_{ij}, Vektoren x und b mit den Einträgen x_i bzw. b_i, so entspricht das lineare Gleichungssystem auch im allgemeinen Fall der Gleichung

$$\boxed{Ax = b.} \tag{1.9}$$

Die Matrix A ist die **Koeffizientenmatrix** [*coefficient matrix, system matrix*], x ist der **Lösungsvektor** [*solution vector*] und b ist die **rechte Seite** [*right-hand side*].

Fibbonacci-Folge. Die **Fibonacci-Folge** [*Fibonacci sequence*]

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

wird durch die folgende Rekursion beschrieben:

$$f_0 = 1, \quad f_1 = 1, \qquad f_{k+2} = f_{k+1} + f_k, \quad k \geq 0. \tag{1.10}$$

Leonardo da Pisa, auch Fibonacci genannt, illustrierte damit das explosionsartige Wachstums einer Kaninchenpopulation. Die Zahlenfolge hat auch Eingang in die Populärkultur gefunden, so zum Beispiel in Dan Browns Roman Sakrileg [*The Da Vinci Code*]:

```
 13 3 2 21 1 1 8 5
O DRACONIAN DEVIL!
  OH LAME SAINT!
```

Nach Umordnung ergibt sich die wahre Botschaft:

```
 1 1 2 3 5 8 13 21
LEONARDO DA VINCI!
  THE MONA LISA!
```

Definiert man die Vektoren $b_k = \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \end{pmatrix}$ für $k = 0, 1, \dots$, so lässt sich die Rekursion (1.10) auch als Matrix-Vektor-Produkt begreifen:

$$b_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad b_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} b_k, \quad k \geq 0. \tag{1.11}$$

Später, in Abschnitt 7.3, werden wir diese Schreibweise benutzen um eine explizite Darstellung für die Zahlen der Fibbonacci-Folge zu bestimmen.

1.5.3 Multiplikation von Matrizen

Das **Matrixprodukt** [*matrix product*] (oder kurz: **Produkt**) einer $m \times n$-Matrix A mit einer $n \times p$-Matrix B ist eine $m \times p$-Matrix $C = AB$, deren Einträge wie folgt definiert sind:

$$c_{ij} := \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = a_{i1} b_{1j} + a_{i2} b_{2j} + \cdots + a_{in} b_{nj}, \quad (i = 1, \dots, m;\ j = 1, \dots, p). \tag{1.12}$$

In Worten: Die Einträge der i-ten Zeile von A werden mit den Einträgen der j-ten Spalte von B multipliziert und die Summe dieser Produkte ergeben den (i, j)-Eintrag von C. Illustration

für $m = 5, n = 4, p = 3$:

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & j\text{-te Spalte} & & j\text{-te Spalte} & \\
 & & & \downarrow & & \downarrow & \\
i\text{-te Zeile} \rightarrow & \begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & = & \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} & \leftarrow i\text{-te Zeile} \\
 & A & & B & & C = AB &
\end{array}$$

Der Übersichtlichkeit halber empfiehlt es sich aber bei Handrechnungen die Matrix A links und die Matrix B oberhalb des zu berechnenden Matrixprodukts zu platzieren:

$$\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \\ \times & \times & \times & \times \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \\ \times & \times & \times \end{pmatrix} \\
A & C = AB
\end{array}$$

Bemerkung 1.6 *Während bei der Matrixaddition beide Summanden die gleiche Grösse haben müssen, kommt es beim Produkt darauf an, dass die "Breite" des linken Faktors mit der "Höhe" des rechten Faktors übereinstimmt.*

Beispiel 1.12: Für die beiden Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

berechnet sich das Produkt gemäss dem oben vorgeschlagenen Schema wie folgt:

$$\begin{array}{cc}
 & B \\
 & \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 18 & -14 & 1 & -2 \\ 42 & -32 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\
A & C = AB
\end{array}$$

Wie bei Matrix-Vektor-Produkten werden in MATLAB Matrixprodukte mit dem Operator `*` berechnet.

```
>> A = [ 1  2  3; ...
         4  5  6 ];
>> B = [ 7 -1  1  0;
        -8 -2  0 -1;
         9 -3  0  0 ];
>> A*B,
ans =
      18   -14     1    -2
      42   -32     4    -5
```

Dabei ergibt sich zum Beispiel das markierte Element aus der Rechnung

$$\begin{aligned} a_{21} b_{11} + a_{22} b_{21} + a_{23} b_{31} &= 4 \cdot 7 + 5 \cdot (-8) + 6 \cdot 9 \\ &= 28 - 40 + 54 = 42. \end{aligned}$$

♦

Bemerkung 1.7 *Der tiefere Grund für die komplizierte Art das Matrixprodukt zu definieren, wird später ersichtlich werden, wenn wir lineare Abbildungen mit Hilfe von Matrizen beschreiben. Die Multiplikation von Matrizen entspricht dann gerade der Verknüpfung von linearen Abbildungen.*

Multiplikation mit speziellen Matrizen. In Spezialfällen vereinfacht sich das Matrixprodukt erheblich.

Multiplikation mit der Nullmatrix. Ist einer der Faktoren die Nullmatrix (von passender Grösse) dann ist in jedem Produkt von (1.12) mindestens ein Faktor 0. Also ist das Matrixprodukt die Nullmatrix:

$$OA = O, \qquad AO = O,$$

für jede $m \times n$-Matrix A.

Multiplikation mit der Einheitsmatrix. Bei der Multiplikation einer $m \times n$-Matrix A mit der Einheitsmatrix $B = I_n$ ergibt sich für die Einträge von $C = AB$ aus der Definition (1.12)

$$c_{ij} = a_{i1} \underbrace{b_{1j}}_{=0} + \cdots + a_{i,j-1} \underbrace{b_{j-1,j}}_{=0} + a_{ij} \underbrace{b_{jj}}_{=1} + a_{i,j+1} \underbrace{b_{j+1,j}}_{=0} + \cdots + a_{in} \underbrace{b_{nj}}_{=0} = a_{ij}. \tag{1.13}$$

Also ist $AI_n = A$. Analog sieht man $I_m A = A$.

Multiplikation mit Diagonalmatrizen. Beim Matrixprodukt $C = AD$ einer $m \times n$-Matrix A mit einer Diagonalmatrix $D = \mathsf{diag}\,(d_{11}, \ldots, d_{nn})$ ergibt sich – ähnlich wie in (1.13) –

$$c_{ij} = a_{ij} d_{jj}. \tag{1.14}$$

Bezeichnet man die Spalten von A mit $a_1, \ldots, a_n$ und die Spalten von C mit $c_1, \ldots, c_n$ so lässt sich (1.14) wie folgt umschreiben:

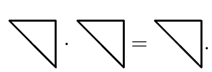
$$C = \left(\begin{array}{c|c|c|c} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} d_{11}a_1 & d_{22}a_2 & \cdots & d_{nn}a_n \end{array} \right).$$

Die Rechtsmultiplikation mit einer Diagonalmatrix entspricht also einer skalaren Multiplikation der Spalten mit den entsprechenden Diagonalelementen. Man spricht in diesem Fall auch von einer **Diagonalskalierung** [*diagonal scaling*]. Analog sieht man dass die Linksmultiplikation mit einer Diagonalmatrix einer skalaren Multiplikation der Zeilen mit den entsprechenden Diagonalelementen entspricht.

Multiplikation von Dreiecksmatrizen. Für obere $n \times n$-Dreiecksmatrizen A, B gelten $a_{ik} = 0$ für $i > k$ sowie $b_{kj} = 0$ für $k > j$. In der Summe für die Einträge von $C = AB$,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj},$$

sind also alle Summanden mit $i > k$ oder $k > j$ Null. Da nur Summanden mit $i \le k \le j$ übrigbleiben gilt zwangsläufig $c_{ij} = 0$ für $i > j$. Also ist C auch obere Dreiecksmatrix. (Dieser Beweis wird noch einmal ausführlicher in Lemma 2.13 dargestellt.) Symbolisch lässt sich diese Aussage darstellen als



Übung 1.2: Zeigen Sie, dass eine analoge Aussage für *untere* Dreiecksmatrizen gilt. ♦

Später werden wir noch einen weiteren wichtigen Spezialfall kennenlernen: Multiplikation mit Permutationsmatrizen in Kapitel 2.

1.5.4 Eigenschaften der Matrixoperationen

Aus den Definitionen der drei eingeführten Matrixoperationen (Skalarmultiplikation, Matrixaddition, Matrixprodukt) lassen sich eine ganze Reihe von Eigenschaften dieser Operationen herleiten, von denen die wichtigsten nachfolgend aufgeführt sind.

Satz 1.8 *Die Addition, die Multiplikation und die skalare Multiplikation von Matrizen (und Vektoren) haben die folgenden Eigenschaften, vorausgesetzt dass die Operationen definiert sind:*

$$(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A), \tag{1.15}$$
$$(\alpha A)B = \alpha(AB) = A(\alpha B), \tag{1.16}$$
$$(\alpha + \beta)A = (\alpha A) + (\beta A), \tag{1.17}$$
$$\alpha(A + B) = (\alpha A) + (\alpha B), \tag{1.18}$$
$$A + B = B + A \qquad (\textit{Add. kommutativ}), \tag{1.19}$$
$$(A + B) + C = A + (B + C) \qquad (\textit{Add. assoziativ}), \tag{1.20}$$
$$(AB)C = A(BC) \qquad (\textit{Mult. assoziativ}), \tag{1.21}$$
$$(A + B)C = (AC) + (BC) \qquad (\textit{Add./Mult. distributiv}), \tag{1.22}$$
$$A(B + C) = (AB) + (AC) \qquad (\textit{Add./Mult. distributiv}). \tag{1.23}$$

BEWEIS: Die Eigenschaften (1.15) und (1.17)–(1.20) ergeben sich sofort aus entsprechenden Regeln für reelle Zahlen und der Tatsache, dass die skalare Multiplikation und die Addition von Matrizen elementweise definiert sind, wobei natürlich vorausgesetzt werden muss, dass die in einer Regel auftretenden Matrizen die gleiche Grösse haben.

Etwas zu zeigen bleibt also nur, wenn Matrixmultiplikationen auftreten wie in (1.16) und (1.21)–(1.23). Es ist zunächst zu verifizieren, dass jeweils die linke und die rechte Seite unter den gleichen Bedingungen an die Grösse der Matrizen definiert sind. Dann zeigt man, dass das (i, j)–Element links und rechts gleich ist. Für (1.16) soll dieser Nachweis als Übung durchgeführt werden.

Für die Assoziativität der Multiplikation (1.21) müssen wir annehmen, dass A eine $m \times n$-Matrix, B eine $n \times p$-Matrix, und C eine $p \times q$-Matrix ist. Dann ist

$$((AB)C)_{ik} = \sum_{l=1}^{p} (AB)_{il} c_{lk} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} b_{jl} c_{lk},$$
$$(A(BC))_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} (BC)_{jk} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{p} a_{ij} b_{jl} c_{lk}.$$

Die zwei Summenzeichen darf man vertauschen, also sind die beiden Ausdrücke auf den rechten Seiten identisch.

Für das erste Distributivgesetz (1.22) brauchen wir stattdessen, dass A eine $m \times n$-Matrix, B eine $m \times n$-Matrix, und C eine $n \times p$-Matrix ist. Dann erhalten wir

$$\begin{aligned} ((A+B)C)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} (A+B)_{ik} c_{kj} = \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} + b_{ik})\, c_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (a_{ik} c_{kj} + b_{ik} c_{kj}) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} c_{kj} + \sum_{k=1}^{n} b_{ik} c_{kj} \\ &= (AC)_{ij} + (BC)_{ij} = (AC+BC)_{ij}. \end{aligned}$$

Der Beweis für das zweite Distributivgesetz (1.23) verläuft analog. ■

Einige Bemerkungen:

1. Mehrere der Aussagen von Satz 1.8 bedeuten, dass man im entsprechenden Ausdruck auf die Klammern verzichten kann, z.B. in $A(BC) = ABC$. Weitere Klammern fallen weg, weil wir vereinbaren, dass (wie in $\mathbb{R}$ und $\mathbb{C}$) die skalare Multiplikation und die Matrixmultiplikation stärker binden als die Addition. Es ist also etwa $(AB)+(CD) = AB+CD$.

2. Man beachte, dass Satz 1.8 eine *theoretische* Aussage liefert. In der Praxis kann es einen erheblichen Unterschied machen, ob man etwa zuerst A mit B oder zuerst B mit C in dem Ausdruck ABC miteinander multipliziert. Insbesondere trifft dies auf den Rechenaufwand bei Faktoren unterschiedlicher Grösse zu.

3. Da Operationen mit Vektoren ein Spezialfall von Operationen mit Matrizen sind, gelten die Aussagen von Satz 1.8 natürlich auch wenn einige oder alle der involvierten Grössen Vektoren sind. Z.B. folgt aus (1.21) die Beziehung $(AB)x = A(Bx)$ für jeden Spaltenvektor x, vorausgesetzt dass A, B Matrizen von passender Grösse sind. Auch hier lässt man die Klammern weg und schreibt ABx.

Die Matrixmultiplikation ist *nicht kommutativ*, d.h. im allgemeinen haben wir

$$\boxed{AB \neq BA\,.} \tag{1.24}$$

Dies sieht man sofort ein wenn die Dimensionen auf einer Seite nicht passen. Ist etwa A eine 5×3-Matrix und B eine 3×4-Matrix dann ist zwar AB definiert aber nicht BA, da die Anzahl der Spalten von B nicht der Anzahl der Zeilen von A entspricht. Doch selbst quadratische Matrizen gleicher Ordnung kommutieren im allgemeinen nicht.

Beispiel 1.13: Für die drei Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad C = \begin{pmatrix} 15 & 6 \\ 1 & 20 \end{pmatrix}$$

gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 11 & 6 \end{pmatrix}, \qquad BA = \begin{pmatrix} -7 & -25 \\ 5 & 19 \end{pmatrix},$$
$$AC = \begin{pmatrix} 36 & 132 \\ 22 & 146 \end{pmatrix}, \qquad CA = \begin{pmatrix} 36 & 132 \\ 22 & 146 \end{pmatrix}.$$

Es ist also

$$AB \neq BA, \qquad AC = CA.$$

♦

Gilt für zwei Matrizen A und B, dass $AB = BA$, so sagt man, dass diese Matrizen **kommutieren** [*commute*]. Dass Matrizen kommutieren ist eher die Ausnahme als die Regel. In Kapitel 7 werden wir eine Charakterisierung von kommutierenden Matrizen kennenlernen, die dies eindrücklich bestätigt.

Einheitsmatrizen kommutieren immer, d.h. für jede $n \times n$–Matrix A gilt $I_n A = A = A I_n$. Es gilt sogar die stärkere Aussage, dass skalare Vielfache von Einheitsmatrizen die einzigen Matrizen sind, die mit *jeder* quadratischen Matrix der gleichen Ordnung Matrix kommutieren (Nachweis Übung).

Linearkombinationen und Neuinterpretation der Matrixmultiplikation

Definition 1.9 *Eine* ***Linearkombination*** *[linear combination] von Spaltenvektoren gleicher Länge $a_1, a_2, \dots, a_n$ ist ein Ausdruck der Form*

$$\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n\,, \tag{1.25}$$

wobei $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ Zahlen (Skalare) sind.

Man beachte, dass man dank der Priorität der Multiplikation vor der Addition und dank der Assoziativität der Matrixaddition (siehe Satz 1.8) keine Klammern setzen muss. Derartige Vereinfachungen werden laufend benutzt, ohne dass wir erneut darauf hinweisen.

Oft ist es von Vorteil, die Vektoren in einer Linearkombination (1.25) als Spalten einer Matrix aufzufassen:

$$A := \left(\begin{array}{c|c|c|c} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{array} \right). \tag{1.26}$$

Mit dieser Notation lassen sich Matrix-Vektor-Produkte als Linearkombinationen der Matrixspalten interpretieren.

Satz 1.10 *Sind a_1, a_2, $\dots, a_n$ gemäss* (1.26) *die Spaltenvektoren der $m \times n$–Matrix A, und ist x ein Vektor der Länge n, so gilt:*

$$\boxed{Ax = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n\,.} \tag{1.27}$$

Ist insbesondere e_j der j–te Spaltenvektor der Einheitsmatrix I_n, so gilt:

$$\boxed{Ae_j = a_j\,.} \tag{1.28}$$

BEWEIS: Um (1.27) zu beweisen, betrachten wir die i-te Komponente. Wir bezeichnen jene von a_k mit $(a_k)_i$, so dass $(a_k)_i = a_{ik}$. Damit ist

$$(Ax)_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k)_i x_k = \sum_{k=1}^{n} (a_k x_k)_i = \sum_{k=1}^{n} (x_k a_k)_i.$$

Weiter ist Formel (1.28) bloss ein Spezialfall von (1.27). ■

Auf ähnliche Weise lässt sich das Produkt zweier Matrizen neu interpretieren.

Satz 1.11 *Ist A eine $m \times n$–Matrix und $B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_p \end{pmatrix}$ eine $n \times p$–Matrix, so gilt:*

$$AB = \left(\begin{array}{c|c|c|c} Ab_1 & Ab_2 & \cdots & Ab_p \end{array} \right). \tag{1.29}$$

BEWEIS: Nach Satz 1.10 ist $b_j = Be_j$, $j = 1,\dots,p$. Die j-te Spalte der Produktmatrix AB lässt sich deshalb schreiben als $(AB)e_j$. Dank der Assoziativität der Matrizen-Multiplikation folgt damit aus Satz 1.10 für $j = 1,\dots,p$:

$$(AB)e_j = A(Be_j) = Ab_j\,.$$

■

In Abschnitt 1.5.2, siehe insbesondere (1.9), haben wir bereits gesehen, dass lineare Gleichungssysteme in der Form $Ax = b$ geschrieben werden können. Aus Satz 1.10 ergibt sich sofort folgende Aussage.

Satz 1.12 *Das Gleichungssystem $Ax = b$ hat genau dann (mindestens) eine Lösung, wenn b eine Linearkombination der Spalten von A ist.*

Hat man ℓ verschiedene rechte Seiten $b_1, b_2, \dots, b_\ell$ und entsprechend ℓ Lösungsvektoren $x_1, x_2, \dots, x_\ell$, so kann man diese in die Spalten zweier Matrizen B und X wählen:

$$B := \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \cdots & b_\ell \end{pmatrix}, \quad X := \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_\ell \end{pmatrix}.$$

Diese ℓ Gleichungssysteme lassen sich wie folgt zusammenfassen:

$$\boxed{AX = B.} \tag{1.30}$$

1.6 Die Transponierte einer Matrix

Definition 1.13 *Ist A eine $m \times n$–Matrix, so heisst die $n \times m$–Matrix A^T mit $(A^\mathsf{T})_{ij} := (A)_{ji}$ die zu A* ***transponierte*** *[transposed] Matrix oder die* ***Transponierte*** *[transpose] von A.*

Anstatt vom Transponieren spricht man mitunter auch vom **Stürzen** einer Matrix. Bildlich lässt sich dies für $m > n$ so vorstellen, dass eine "hohe schlanke" Matrix umfällt und eine "niedrige breite" Matrix wird.

Beispiel 1.14:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \\ 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}.$$

In MATLAB wird die Transponierte (für Matrizen mit reellen Einträgen) mit einem Apostroph erzeugt.

```
>> A = [ 1 5; 2 6; 3 7; 4 8 ]; A'
ans =
     1     2     3     4
     5     6     7     8
```

♦

Die Transponierte einer unteren Dreiecksmatrix ist eine obere Dreiecksmatrix – und umgekehrt. Weiterhin gilt natürlich: *Die Transponierte eines Spaltenvektors ist ein Zeilenvektor — und umgekehrt.* Dies wird oft ausgenützt, um Spaltenvektoren Platz sparend aufzuschreiben:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 3 & 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Für das Transponieren gelten folgende einfache Rechenregeln:

Satz 1.14 *(i) Für jede Matrix A gilt*

$$\boxed{(A^\mathsf{T})^\mathsf{T} = A.} \tag{1.31}$$

(ii) Für jede Matrix A und jeden Skalar α gilt

$$\boxed{(\alpha A)^\mathsf{T} = \alpha A^\mathsf{T}.} \tag{1.32}$$

(iii) Für beliebige $m \times n$–Matrizen A und B gilt

$$\boxed{(A + B)^\mathsf{T} = A^\mathsf{T} + B^\mathsf{T}.} \tag{1.33}$$

(iv) Für jede $m \times n$–Matrix A und jede $n \times p$–Matrix B gilt

$$\boxed{(AB)^\mathsf{T} = B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}.} \tag{1.34}$$

BEWEIS: Die Aussagen (1.31)–(1.33) sollten klar sein.

Um (1.34) zu beweisen bemerken wir, dass AB eine $m \times p$–Matrix und somit $(AB)^\mathsf{T}$ eine $p \times m$–Matrix ist. Das Produkt $B^\mathsf{T} A^\mathsf{T}$ ist ebenfalls eine $p \times m$–Matrix. Für die entsprechenden Elemente gilt

$$\begin{aligned} ((AB)^\mathsf{T})_{ij} = (AB)_{ji} &= \sum_{k=1}^n a_{jk} b_{ki} = \sum_{k=1}^n b_{ki} a_{jk} \\ &= \sum_{k=1}^n (B^\mathsf{T})_{ik} (A^\mathsf{T})_{kj} = (B^\mathsf{T} A^\mathsf{T})_{ij}. \end{aligned}$$

■

1.7 Symmetrische Matrizen

Definition 1.15 *Eine quadratische Matrix A heisst* ***symmetrisch*** *[symmetric], falls*

$$A^\mathsf{T} = A, \qquad \text{d.h.} \quad (A)_{ij} = (A)_{ji} \quad (\forall i, j).$$

Beispiel 1.15: Die Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ 3 & -1 & 2 \\ -5 & 2 & 7 \end{pmatrix},$$

ist symmetrisch. ♦

Ein weiteres Beispiel für symmetrische Matrizen haben wir bereits kennengelernt: die Adjazenzmatrix (1.2) für einen ungerichteten Graphen. Quasi das Gegenteil von Symmetrie wird in der folgenden Definition eingeführt.

Definition 1.16 *Eine quadratische Matrix A heisst* ***schiefsymmetrisch*** *[skew-symmetric], falls $A^\mathsf{T} = -A$.*

Beispiel 1.16: Die Matrix

$$\begin{pmatrix} 0 & -3 & 5 \\ 3 & 0 & -4 \\ -5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

ist schiefsymmetrisch und hat wie jede andere solche Matrix lauter Nullen auf der Diagonale. ♦

Im allgemeinen ist das Produkt zweier symmetrischer Matrizen nicht symmetrisch. Zum Beispiel ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aber man hat die folgenden Aussage.

Satz 1.17 *Seien A eine $m \times n$-Matrix und B eine $m \times m$-Matrix. Ist B symmetrisch, so sind $A^\top BA$ und $ABA^\top$ ebenfalls symmetrisch.*

BEWEIS: Anwendung von Satz 1.14, insbesondere (1.31) und (1.34), ergibt

$$(A^\top BA)^\top = A^\top B^\top (A^\top)^\top = A^\top B^\top A,$$

also ist $A^\top BA$ symmetrisch wenn B symmetrisch ist. Die Symmetrie von $ABA^\top$ folgt analog. ■

Als Spezialfall von Satz 1.17 (mit $B = I$) folgt, dass für beliebige Matrizen A gilt:

$$A^\top A \text{ und } AA^\top \text{ sind symmetrisch.} \tag{1.35}$$

Übung 1.3: Sei A eine schiefsymmetrische $n \times n$-Matrix. Zeigen Sie $x^\top Ax = 0$ für jeden Vektor x der Länge n. *Tipp:* Eine schiefsymmetrische 1×1-Matrix ist immer 0. ♦

1.8 Die Inverse einer Matrix

Zwei quadratische Matrizen gleicher Ordnung kann man immer zueinander addieren, voneinander subtrahieren und miteinander multiplizieren. Wir werden in diesem Abschnitt sehen, dass man sie oft, aber nicht immer, in gewissem Sinne auch durcheinander dividieren kann.

Vergleicht man $n \times n$–Matrizen mit Zahlen, so nimmt die Nullmatrix O_n bei der Matrizen-Addition die Rolle der Null ein und die Einheitsmatrix I_n übernimmt bei der Matrizen-Multiplikation die Rolle der Eins.

Bei den Zahlen gibt es zu jedem $\alpha \neq 0$ ein ξ, nämlich $\xi = 1/\alpha$, so dass

$$\alpha\,\xi = 1 = \xi\,\alpha$$

ist. Gilt dies wohl analog für quadratische Matrizen? Das heisst, gibt es zu $A \neq O_n$ eine $n \times n$–Matrix X mit

$$AX = I_n = XA\,. \tag{1.36}$$

Ein einfaches Beispiel zeigt, dass das nicht so ist: für

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

folgt bei beliebiger Wahl von X

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq I_2\,.$$

Es ist im allgemeinen einer Matrix A nicht einfach "anzusehen" ob es ein solches X, das (1.36) erfüllt, gibt oder nicht. Zunächst bequemen wir uns damit, der Menge der Matrizen mit (1.36) einen Namen zu geben.

Definition 1.18 *Eine $n \times n$–Matrix A heisst **invertierbar** [invertible], falls es eine $n \times n$–Matrix X gibt, so dass $AX = I_n = XA$ ist. Die Matrix X heisst **Inverse** [inverse] von A und wird mit A^{-1} bezeichnet:*

$$\boxed{AA^{-1} = I_n = A^{-1}A\,.} \tag{1.37}$$

*Eine Matrix, die nicht invertierbar ist, bezeichnet man auch als **singulär** [singular].*

Das folgende Resultat erlaubt es uns von *der* Inversen einer Matrix zu sprechen.

Satz 1.19 *Ist A invertierbar, so ist die Inverse eindeutig bestimmt.*

BEWEIS: Den Beweis werden wir im allgemeinerem Rahmen in Kapitel 2 durchführen. ■

Beispiel 1.17: Es ist

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix};$$

die eine Matrix ist also die Inverse der anderen — und umgekehrt.
Wir haben oben bereits gesehen, dass die Matrixmultiplikation mit einer Diagonalmatrix einer Zeilen- bzw. Spaltenskalierung der anderen Matrix entspricht. Daraus folgt, dass die Inverse einer Diagonalmatrix mit von Null verschiedenen Diagonaleinträgen wieder eine Diagonalmatrix ist:

$$\mathrm{diag}\,(d_{11},\dots,d_{nn})^{-1} = \mathrm{diag}\,(1/d_{11},\dots,1/d_{nn}).$$

Insbesondere ist die Einheitsmatrix I_n natürlich invertierbar und ihre eigene Inverse, denn $I_n I_n = I_n$.

In MATLAB berechnet man die Inverse mit dem Befehl `inv`.

```
>> A = [ 2 2; 1 2 ]; inv(A)
ans =
    1.0000   -1.0000
   -0.5000    1.0000
```

Allerdings wird `inv` fast nie in der Praxis gebraucht! Anstatt der expliziten Inversen benötigt man typischerweise nur die Multiplikation der Inversen einer Matrix mit einer anderen Matrix. Dann sind die Befehle `A \ B` bzw. `B / A` wesentlich effizienter und genauer als `inv(A)*B` bzw. `B*inv(A)`.

```
>> b = [ 1; 0 ]; A \ b
ans =
    1.0000
   -0.5000
```

Die hinter \, / und `inv` stehenden Algorithmen werden in Kapitel 3 behandelt. ♦

Man kann die Bedingung für die Inverse effektiv abschwächen: Es genügt, dass $A\,X = I$ oder $X\,A = I$ gilt, dann folgt die andere Beziehung automatisch.

Satz 1.20 *Die folgenden Aussagen über eine $n \times n$–Matrix A sind äquivalent:*

i) *A ist invertierbar.*

ii) *Es gibt eine $n \times n$–Matrix X mit $AX = I_n$.*

iii) *Es gibt eine $n \times n$–Matrix X mit $XA = I_n$.*

BEWEIS: Auch diesen Beweis werden wir erst später, in Kapitel 3, durchführen. ■

Als nächstes stellen wir einige Eigenschaften der Inversen zusammen.

Satz 1.21 *Sind A und B invertierbare $n \times n$–Matrizen, so gilt:*

i) *A^{-1} ist invertierbar und*

$$\boxed{(A^{-1})^{-1} = A\,.} \tag{1.38}$$

ii) *AB ist invertierbar und*

$$\boxed{(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}\,.} \tag{1.39}$$

iii) *$A^\top$ ist invertierbar und*

$$\boxed{(A^\top)^{-1} = (A^{-1})^\top\,.} \tag{1.40}$$

BEWEIS: i) ergibt sich sofort aus der Definition (1.37).

Zu ii): Aus $(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AA^{-1} = I_n$ und Satz 1.20 folgt, dass $B^{-1}A^{-1}$ die Inverse von AB ist.

Zu iii): Gemäss (1.34) ist $A^{\mathsf{T}}(A^{-1})^{\mathsf{T}} = (A^{-1}A)^{\mathsf{T}} = I_n^{\mathsf{T}} = I_n$. Also ist wiederum nach Satz 1.20 $(A^{-1})^{\mathsf{T}}$ die Inverse von A^{T}. ■

Die Inverse und lineare Gleichungssysteme. Die Inverse einer Matrix ist eng mit der Lösung von linearen Gleichungssystemen verknüpft. Insbesondere kann man auf beiden Seiten von $Ax = b$ mit der Inversen von A (vorausgesetzt A ist invertierbar) multiplizieren und erhält

$$x = A^{-1}b. \tag{1.41}$$

Mit der Kenntnis der Inversen lassen sich also die Lösungen von linearen Gleichungssysteme einfach per Matrix-Vektor-Multiplikation berechnen. Dieser Weg wird aber praktisch nie verwendet.

Um die Inverse von A zu berechnen, betrachten wir die Spalten von $X = A^{-1}$:

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{c|c|c|c} A^{-1}e_1 & A^{-1}e_2 & \cdots & A^{-1}e_n \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{array} \right) = X,$$

wobei e_j die j-te Spalte der $n \times n$-Einheitsmatrix ist. Mit (1.41) folgt, dass sich die j-te Spalte von A^{-1} aus der Lösung des linearen Gleichungssystems

$$Ax_j = e_j$$

ergibt.

Beispiel 1.18: Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zur Berechnung der Inversen von A sind die drei linearen Gleichungssysteme $Ax_1 = e_1$, $Ax_2 = e_2$, $Ax_3 = e_3$ zu lösen. Aufgrund der oberen Dreiecksform von A lassen sich diese Lösungen recht einfach berechnen und man erhält

$$x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -3/2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Also ist die Inverse

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1/2 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

♦

1.9 Untermatrizen

Aus ausgewählten Elementen einer gegebenen Matrix lassen sich neue Matrizen, sogenannte Untermatrizen, konstruieren.

Definition 1.22 *Sei A eine $m \times n$-Matrix, und $\mathscr{I} = \{i_1, \dots, i_k\}$, $\mathscr{J} = \{j_1, \dots, j_\ell\}$ Indexmengen mit*

$$1 \le i_1 < \cdots < i_k \le m, \quad 1 \le j_1 < \cdots < j_\ell \le n.$$

Dann ist die $k \times \ell$-Matrix

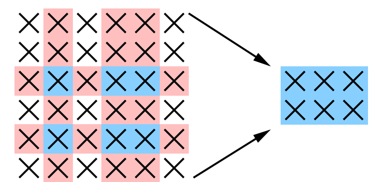
$$A(\mathscr{I}, \mathscr{J}) = \left(a_{i_p, j_q}\right), \quad p = 1, \dots, k, \quad q = 1, \dots, \ell,$$

die zugehörige ***Untermatrix*** *[submatrix] von A.*

Obige Definition lässt sich bildlich einfacher als mit Formeln beschreiben: Die Indexmenge $\mathscr{I}$ wählt Zeilen von A aus, die Indexmenge $\mathscr{J}$ wählt Spalten von A aus, und die Untermatrix $A(\mathscr{I}, \mathscr{J})$ besteht gerade aus den Elementen auf den "Kreuzungen" der ausgewählten Zeilen und Spalten.

Beispiel 1.19:

Die folgende Illustration veranschaulicht den Begriff der Untermatrix für $m = n = 6$ und $\mathscr{I} = \{3, 5\}$, $\mathscr{J} = \{2, 4, 5\}$:



In MATLAB

```
>> A = magic(6)
A =
    35     1     6    26    19    24
     3    32     7    21    23    25
    31     9     2    22    27    20
     8    28    33    17    10    15
    30     5    34    12    14    16
     4    36    29    13    18    11
>> A([3,5],[2,4,5])
ans =
     9    22    27
     5    12    14
```

♦

Definition 1.23 *Die einer $m \times n$ Matrix $A = \left(a_{ij} \right)_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ zugeordneten $\min\{m, n\}$ quadratischen Teilmatrizen*

$$A_k = \left(a_{ij} \right)_{1 \le i \le k, 1 \le j \le k} \qquad (k = 1, \dots, \min\{m, n\}) \tag{1.42}$$

heissen ***führende Hauptuntermatrizen*** *[leading principal submatrices] von A.*

Kapitel 2

Algebraische Strukturen

Operationen mit Matrizen erfüllen eine ganze Reihe von Rechenregeln, siehe insbesondere Satz 1.8, die bereits von Operationen mit Zahlen bekannt sind. Es gibt aber auch einige wesentliche Unterschiede zu Zahlen: der Verlust der Kommutativität bei Multiplikation und die Tatsache, dass nicht alle von Null verschiedenen Matrizen invertierbar sind. Im folgenden wollen wir diese Gemeinsamkeiten und Unterschiede in algebraischen Strukturen "einfangen" und damit nicht nur Zahlen und Matrizen sondern viele weitere Objekte (Funktionen, Polynome, Restklassen, ...) abdecken.

2.1 Gruppen

Wir beginnen mit Halbgruppen, eine Struktur mit wenigen Forderungen aber auch dementsprechend wenig nützlichen Eigenschaften.

Definition 2.1 *Eine* ***Halbgruppe*** *[semigroup] ist eine Menge H mit einer Abbildung, genannt* Verknüpfung *oder* Operation*,*

$$\circ : H \times H \to H, \quad (a,b) \mapsto a \circ b,$$

für die folgende Regel erfüllt ist:

1. *Die Verknüpfung $\circ$ ist assoziativ, d.h., $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$ für alle $a, b, c \in H$.*

Aus Satz 1.8 (insbesondere (1.20) und (1.21)) folgt, dass für jedes fest vorgegebene n die Menge der $n \times n$-Matrizen eine Halbgruppe sowohl mit der Addition als auch mit der Matrixmultiplikation bildet. Die Assoziativität von $\circ$ erlaubt es uns – wie bei der Matrixmultiplikation – die Klammerung bei mehrfachen Verknüpfungen einfach wegzulassen oder beliebig zu setzen.

Etwas versteckt in Definition 2.1 ist die Annahme, dass $a \circ b \in H$ für alle $a, b \in H$ gelten muss. Diese Forderung der *Abgeschlossenheit* von H unter der Verknüpfung $\circ$ ist keineswegs selbstverständlich. Zum Beispiel ist die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen zwar eine Halbgruppe bezüglich der Addition aber *nicht* bezüglich der Multiplikation, da das Produkt zweier symmetrischer Matrizen im allgemeinen keine symmetrische Matrix ergibt.

Um sinnvolle Aussagen treffen zu können, braucht es über Definition 2.1 hinausgehende Forderungen an die algebraische Struktur. Insbesondere ist die Existenz eines neutralen Elements unerlässlich.

Definition 2.2 *Sei $(H, \circ)$ Halbgruppe. Dann heisst $e \in H$* ***neutrales Element*** *[identity element, neutral element], wenn $e \circ a = a \circ e = a$ für alle $a \in H$ gilt.*

Bei der Matrixaddition ist die Nullmatrix neutrales Element, bei der Matrixmultiplikation die Einheitsmatrix. Das folgende Lemma zeigt, dass es höchstens ein neutrales Element in einer Halbgruppe geben kann.

Lemma 2.3 *Seien e und e' neutrale Elemente einer Halbgruppe $(H, \circ)$. Dann gilt $e = e'$.*

BEWEIS: Aus Definition 2.2 folgt sofort $e = e \circ e' = e'$, wobei bei der ersten Gleichheit die Neutralität von e' und bei der zweiten Gleichheit die Neutralität von e ausgenutzt wurden. ■

Die Existenz eines neutralen Elementes erlaubt die sinnvolle Definition des Inversen.

Definition 2.4 *Sei $(H, \circ)$ Halbgruppe mit neutralem Element e. Ein Element $a \in H$ heisst* ***invertierbar*** *[invertible], wenn es ein Element $b \in H$ gibt mit $b \circ a = a \circ b = e$. Das Element b wird* ***Inverses*** *von a genannt.*

Invertierbarkeit lässt sich abschwächen indem man nur verlangt, dass a *linksinvertierbar* ($b \circ a = e$) oder *rechtsinvertierbar* ($a \circ b = e$) ist.

Lemma 2.5 *Sei $(H, \circ)$ Halbgruppe mit neutralem Element e und $a \in H$. Gibt es $b, b' \in H$ mit $b \circ a = e$ und $a \circ b' = e$, so gilt $b = b'$.*

BEWEIS:

$$\begin{array}{rcll} b & = & b \circ e & (e \text{ neutral}), \\ & = & b \circ (a \circ b') & (b' \text{ Rechtsinverses}) \\ & = & (b \circ a) \circ b' & (\circ \text{ assoziativ}) \\ & = & e \circ b' & (b \text{ Linksinverses}) \\ & = & b'. & (e \text{ neutral}). \end{array}$$

■

Lemma 2.5 zeigt unter anderem, dass das Inverse immer eindeutig bestimmt ist. Als weitere Implikation erhalten wir, dass es bei *invertierbaren* Elementen genügt eine der beiden Beziehungen $b \circ a = e$ oder $a \circ b = e$ zu überprüfen, um nachzuweisen dass b das Inverse ist (Beweis Übung). Im allgemeinen werden wir das Inverse von a mit a^{-1} bezeichnen. Beschreibt die Gruppe aber eine additive Struktur (z.B. Addition von Zahlen, Matrizen, oder Funktionen), so ist es praktischer das Inverse mit $-a$ zu bezeichnen.

Nicht jedes Element einer Halbgruppe mit neutralem Element ist notwendigerweise invertierbar, wie das Beispiel der Matrixmultiplikation anschaulich verdeutlicht. Die Forderung nach der Invertierbarkeit von jedem Element ergibt die folgende Struktur.

Definition 2.6 *Eine* ***Gruppe*** *[group] ist ein Paar $(G, \circ)$ mit den folgenden Eigenschaften:*

1. *$(G, \circ)$ ist Halbgruppe.*
2. *Es gibt ein neutrales Element $e \in G$.*
3. *Jedes $a \in G$ ist invertierbar.*

Lemma 2.7 *Sei $(G, \circ)$ Gruppe und $a, b \in G$. Dann gelten $(a^{-1})^{-1} = a$ und $(a \circ b)^{-1} = b^{-1} \circ a^{-1}$.*

BEWEIS: Übung. ■

Eine Gruppe $(G, \circ)$ heisst **abelsch** [*abelian*] oder **kommutativ** wenn $a \circ b = b \circ a$ gilt für alle $a, b \in G$.

2.1.1 Beispiele von Gruppen

Zahlen. $(\mathbb{Z},+),(\mathbb{Q},+),(\mathbb{R},+)$ sowie $(\{+1,-1\},\cdot),(\mathbb{Q}\setminus\{0\},\cdot),(\mathbb{R}\setminus\{0\},\cdot)$ sind abelsche Gruppen.

Die kleinste Gruppe. $G=\{e\}$ mit $e\circ e=e$.

Matrizen. Für jedes feste $m,n\in\mathbb{N}$ bilden die $m\times n$ Matrizen zusammen mit der Matrixaddition eine abelsche Gruppe. Für jedes feste $n\in\mathbb{N}$ bilden die invertierbaren $n\times n$ Matrizen eine Gruppe, welche mit $Gl(n)$ bezeichnet wird. Letzteres Beispiel ist Prototyp für das folgende Resultat.

Lemma 2.8 *Sei $(H,\circ)$ Halbgruppe mit neutralem Element und bezeichne H^* die Menge der invertierbaren Elemente in H. Dann ist $(H^*,\circ)$ Gruppe.*

BEWEIS: Seien $a_1,a_2\in H^*$ mit Inversen a_1^{-1},a_2^{-1} und bezeichne e das neutrale Element. Dann gelten

$$(a_2^{-1}\circ a_1^{-1})\circ(a_1\circ a_2)=a_2^{-1}\circ(a_1^{-1}\circ a_1)\circ a_2=a_2^{-1}\circ a_2=e$$

und analog $(a_1\circ a_2)\circ(a_2^{-1}\circ a_1^{-1})=e$. Also ist auch $(a_1\circ a_2)\in H^*$. Die Assoziativität "erben" die Elemente aus H^* von H; also ist $(H^*,\circ)$ Halbgruppe. Da beiden anderen Gruppeneigenschaften (ii) und (iii) von Definition 2.6 sind per Voraussetzung erfüllt. ■

Abbildungen. Sei X eine Menge und $\mathrm{Abb}(X,X)$ die Menge aller Abbildungen von X nach X. Bezeichne nun $f\circ g$ die Verkettung (auch Komposition oder Kombination genannt) zweier Abbildungen $f,g\in\mathrm{Abb}(X,X)$, d.h., $(f\circ g)(x)=f(g(x))$ für jedes $x\in X$. Dann ist $f\circ g\in\mathrm{Abb}(X,X)$. Desweiteren ist $\circ$ offenbar assoziativ, also ist $(\mathrm{Abb}(X,X),\circ)$ Halbgruppe mit neutralem Element id, der identischen Abbildung $\mathrm{id}(x)=x$ für alle $x\in X$. .

Ist $f\in\mathrm{Abb}(X,X)$ invertierbar (im Sinne der Halbgruppe), dann gibt es $g\in\mathrm{Abb}(X,X)$ mit $g\circ f=\mathrm{id}$. Also ist g Umkehrfunktion und damit muss f bijektiv sein. Die Rückrichtung gilt auch: Ist f bijektiv, dann gibt es eine Umkehrfunktion $g\circ f=\mathrm{id}$. Die Umkehrfunktion von g ist wieder f und damit $f\circ g=\mathrm{id}$. Also ist f invertierbar.

Damit entspricht die Menge $\mathrm{Abb}(X,X)^*$ der invertierbaren Funktionen gerade der Menge der bijektiven Funktionen auf X. Nach Lemma 2.8 ist $(\mathrm{Abb}(X,X)^*,\circ)$ Gruppe.

Ist X endlich, so wird $S(X):=\mathrm{Abb}(X,X)^*$ als **symmetrische Gruppe** von X bezeichnet. Für den wichtigen Spezialfall $X=\{1,2,\dots,n\}$ mit festem $n\in\mathbb{N}$ setzen wir $S_n:=S(X)=\mathrm{Abb}(X,X)^*$. Die Elemente von S_n heissen **Permutationen** [*permutations*] und werden häufig in der Form

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\ \pi(1)&\pi(2)&\cdots&\pi(n)\end{pmatrix},\quad\pi\in S_n,\tag{2.1}$$

angegeben. Damit ergibt sich für die Verkettung $\pi\circ\sigma$ mit $\pi,\sigma\in S_n$:

$$\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ \pi(1)&\cdots&\pi(n)\end{pmatrix}\circ\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ \sigma(1)&\cdots&\sigma(n)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\cdots&n\\ \pi(\sigma(1))&\cdots&\pi(\sigma(n))\end{pmatrix}.$$

Die Umkehrfunktion π^{-1} von π ist die Abbildung $\pi(i)\mapsto i$ für $i=1,\dots,n$. Das entsprechende Schema erhält man, indem die beiden Zeilen in (2.1) vertauscht werden,

$$\begin{pmatrix}\pi(1)&\cdots&\pi(n)\\ 1&\cdots&n\end{pmatrix},$$

und die obere Zeile in die richtige Reihenfolge gebracht wird.

Beispiel 2.1: Seien

$$\pi=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&2&3&1\end{pmatrix},$$
$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}.$$

Das Inverse von σ ist

$$\sigma^{-1}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&3&4&2\end{pmatrix}.$$

Die Verkettung $\pi\circ\sigma$ ist

$$\pi\circ\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\ \pi(1)&\pi(4)&\pi(2)&\pi(3)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\4&1&2&3\end{pmatrix}.$$

In MATLAB speichert man Permutationen am besten als Vektoren ab:

```
>> pi    = [ 4 2 3 1 ];
>> sigma = [ 1 4 2 3 ];
```

Der Befehl `pi(sigma)` ergibt einen Vektor mit den Einträgen `pi(sigma(1))`, `pi(sigma(2))`, ..., also gerade den Vektor der Verkettung von π und σ.

```
>> pi(sigma)
ans =
     4   1   2   3
```

Das Inverse σ^{-1} erfüllt $\sigma^{-1}(\sigma(1))=1$, $\sigma^{-1}(\sigma(2))=2$, ... In MATLAB lassen sich diese Beziehungen wie folgt schreiben:

```
>> r = [];
>> r(sigma) = 1:4,
r =
     1   3   4   2
```

♦

Endliche Gruppen. Ist G eine endliche (und nicht allzu grosse) Menge mit einer Verknüpfung $\circ$, dann ist es oft sinnvoll die sogenannte **Verknüpfungstafel** [*Cayley table*] anzugeben:

$\circ$	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	$a_1\circ a_1$	$a_1\circ a_2$	$\cdots$	$a_1\circ a_n$
a_2	$a_2\circ a_1$	$a_2\circ a_2$	$\cdots$	$a_2\circ a_n$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
a_n	$a_n\circ a_1$	$a_n\circ a_2$	$\cdots$	$a_n\circ a_n$

Ist $(G,\circ)$ eine Gruppe, so wird die Verknüpfungstafel auch als **Gruppentafel** bezeichnet. Im folgenden werden wir eine sehr praktische Charakterisierung für Gruppentafeln herleiten. Dazu bemerken wir zunächst, dass in einer Gruppe die Gleichungen $a\circ x=b$ und $y\circ a=b$ die Lösungen $x=a^{-1}\circ b$ bzw. $y=b\circ a^{-1}$ haben. Das folgende Lemma zeigt, dass diese Lösungen sogar eindeutig sind

Lemma 2.9 *Sei $(G,\circ)$ Gruppe und $a,x,x',y,y'\in G$. Dann gelten die sogenannten Kürzungsregeln*

$$a\circ x=a\circ x'\ \Rightarrow\ x=x',\qquad y\circ a=y'\circ a\ \Rightarrow y=y'.\tag{2.2}$$

BEWEIS: $x=e\circ x=a^{-1}\circ a\circ x=a^{-1}\circ a\circ x'=e\circ x'=x'$. Die andere Kürzungsregel wird analog bewiesen. ■

Satz 2.10 *Für eine Halbgruppe $(H,\circ)$ mit einer* endlichen *Menge H gilt: $(H,\circ)$ ist genau dann Gruppe wenn die Kürzungsregeln (2.2) für alle $a,x,x',y,y'\in H$ gelten.*

BEWEIS: Für ein festes $c\in H$ betrachten wir die Funktionen $f_c:H\to H$ mit $f_c:x\mapsto c\circ x$ und $g_c:H\to H$ mit $g_c:y\mapsto y\circ c$. Sind die Kürzungsregeln (2.2) erfüllt, so sind f_c,g_c injektiv. Da H endlich ist, folgt die Surjektivität von f_c,g_c. Insbesondere hat die Gleichung

$c \circ e = c$ eine Lösung $e \in H$. Für jedes beliebige $a \in H$ hat auch die Gleichung $b \circ c = a$ eine Lösung $b \in H$. Also gilt

$$a \circ e = b \circ c \circ e = b \circ c = a$$

für alle $a \in H$. Analog zeigt man die Existenz von e' mit $e' \circ a = a$ für alle H. Wie im Beweis von Lemma 2.3 gilt aber $e = e \circ e' = e'$ und damit ist e neutrales Element. Wegen Surjektivität von f_a, g_a sind die Gleichungen $a \circ x = e$ und $y \circ a = e$ für jedes $a \in H$ lösbar und nach Lemma 2.5 ist $x = y$ Inverses von a. Also ist $(H, \circ)$ eine Gruppe.

Die Umkehrung ist bereits durch Lemma 2.9 bewiesen. ■

Satz 2.11 *Die Verknüpfungstafel einer Halbgruppe $(G, \circ)$ ist genau dann Gruppentafel, wenn jedes Element von G in jeder Zeile und jeder Spalte höchstens einmal vorkommt.*

BEWEIS: Sei $G = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Der Eintrag in der i-ten Zeile und j-ten Spalte der Verknüpfungstafel ist von der Form $a_i \circ a_j$. Die Forderung, dass jedes Element in der j-ten Spalte höchstens einmal vorkommt entspricht der ersten Kürzungsregel (2.2) für $x = a_j$. Die Forderung, dass jedes Element in der i-ten Zeile höchstens einmal vorkommt entspricht der zweiten Kürzungsregel (2.2) für $y = a_i$. Also sind die beiden Forderungen äquivalent zu den Kürzungsregeln. Mit Satz 2.10 folgt die Behauptung. ■

Für eine zweielementige Menge $G = \{e, a\}$ ist nur eine Gruppentafel möglich:

$\circ$	e	a
e	e	a
a	a	e

Sei nun $G = \{e, a, b\}$ mit dem neutralen Element e. Dann hat die Verknüpfungstafel die folgende Gestalt:

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	?	?
b	b	?	?

Die unbestimmten Einträge ? ermittelt man – wie bei Sudoku – aus der Forderung von Satz 2.11:

$\circ$	e	a	b
e	e	a	b
a	a	b	e
b	b	e	a

(2.3)

Man überzeuge sich durch Nachrechnen, dass $\circ$ assoziativ ist.[7] Damit ist (2.3) Gruppentafel.

2.1.2 Untergruppen

Definition 2.12 *Sei $(G, \circ)$ Gruppe und $U \subset G$. Dann heisst $(U, \circ)$* ***Untergruppe*** *[subgroup] von $(G, \circ)$ wenn $(U, \circ)$ selbst Gruppe ist.*

Da $(U, \circ)$ die Assoziativität von $(G, \circ)$ erbt, ist $(U, \circ)$ Untergruppe wenn Abgeschlossenheit gilt und wenn mit $a \in U$ auch das Inverse a^{-1} in U liegt. Für $U \neq \emptyset$ wählt man ein $a \in U$ aus und das neutrale Element $e = a \circ a^{-1}$ liegt dann automatisch in U.

Jede Gruppe $(G, \circ)$ mit neutralem Element e hat die trivialen Untergruppen $(\{e\}, \circ)$ und $(G, \circ)$. Spannender sind Untergruppen die zwischen diesen beiden Extremen liegen.

[7] Die Assoziativität sieht man der Verknüpfungstafel leider nicht an und muss “per Hand” überprüft werden.

Matrixuntergruppen, Teil I. Wir betrachten die Gruppe $Gl(2)$ der invertierbaren 2×2-Matrizen und die *Rotationsmatrizen*

$$SO(2) := \left\{ G(\phi) = \begin{pmatrix} \cos(\phi) & \sin(\phi) \\ -\sin(\phi) & \cos(\phi) \end{pmatrix} : \phi \in [0, 2\pi) \right\}.$$

$SO(2)$ ist abgeschlossen bezüglich Matrixmultiplikation (Beweis Übung) und Matrixinversion: $G(\phi)^{-1} = G(-\phi)$. Damit bildet $SO(2)$ eine Untergruppe von $Gl(2)$.

Matrixuntergruppen, Teil II. Wir betrachten

$$M_2 := \left\{ A(a,b) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} : a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Offenbar gelten $A(a_1, b_1) + A(a_2, b_2) = A(a_1 + a_2, b_1 + b_2)$ und $-A(a, b) = A(-a, -b)$. Damit bildet M_2 eine Untergruppe der 2×2-Matrizen bezüglich der Matrixaddition.

Bezüglich der Matrixmultiplikation gelten $A(a_1, b_1)A(a_2, b_2) \in M_2$ und $A(a, b)^{-1} \in M_2$ ausser wenn $a = b = 0$. Der Beweis dieser beiden Aussagen ist Übung. Nach Lemma 2.8 ist $M_2 \setminus \{A(0,0)\}$ Untergruppe von $Gl(2)$ bezüglich der Matrixmultiplikation.

Matrixuntergruppen, Teil III. Wir betrachten die Menge der oberen Dreiecksmatrizen mit von Null verschiedenen Diagonalelementen:

$$\widetilde{\mathrm{triu}}(n) = \left\{ R = \begin{pmatrix} r_{11} & \dots & r_{1n} \\ & \ddots & \vdots \\ & & r_{nn} \end{pmatrix} : r_{11} \neq 0, \dots, r_{nn} \neq 0 \right\}$$

Lemma 2.13 *Das Produkt von zwei oberen $n \times n$-Dreiecksmatrizen ist wieder eine Dreiecksmatrix.*

BEWEIS: Sei $T = RS$ mit oberen Dreiecksmatrizen R, S. Dann gilt $r_{ik} = 0$ für $i > k$ und $s_{kj} = 0$ für $k > j$. Für $i > j$ gilt

$$t_{ij} = \sum_{k=1}^{n} r_{ik} s_{kj} = t_{ij} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{r_{ik}}_{=0} s_{kj} + \sum_{k=i}^{n} r_{ik} \underbrace{s_{kj}}_{=0} = 0.$$

Damit ist T obere Dreiecksmatrix. Desweiteren gilt

$$t_{ii} = \sum_{k=1}^{i-1} \underbrace{r_{ik}}_{=0} s_{ki} + r_{ii} s_{ii} + \sum_{k=i+1}^{n} r_{ik} \underbrace{s_{ki}}_{=0} = r_{ii} s_{ii}. \tag{2.4}$$

■

Wegen Lemma 2.13 und (2.4) ist $\widetilde{\mathrm{triu}}(n)$ bezüglich der Matrixmultiplikation abgeschlossen.

Lemma 2.14 *Sei $R \in \widetilde{\mathrm{triu}}(n)$. Dann ist R invertierbar und $R^{-1} \in \widetilde{\mathrm{triu}}(n)$.*

BEWEIS: Der Beweis erfolgt mittels Induktion über n. Für $n = 1$ ist die Aussage trivialerweise erfüllt. Sei die Aussage nun für $n - 1$ erfüllt. Dann partitionieren wir

$$R = \begin{pmatrix} R_{11} & r_n \\ 0 & r_{nn} \end{pmatrix},$$

so dass $R_{11} \in \widetilde{\mathrm{triu}}(n-1)$ und $r_{nn} \neq 0$. Per Induktionsvoraussetzung ist R_{11} invertierbar. Für die Matrix

$$R^{-1} = \begin{pmatrix} R_{11}^{-1} & -R_{11}^{-1} r_n r_{nn}^{-1} \\ 0 & r_{nn}^{-1} \end{pmatrix}$$

lassen sich die Beziehungen $R^{-1}R = RR^{-1} = I_n$ leicht überprüfen. Also ist R^{-1} Inverses von R und $R^{-1} \in \widetilde{\mathrm{triu}}(n)$. ■

Zusammenfassend kann man sagen, dass $\widetilde{\mathrm{triu}}(n)$ eine Untergruppe von $Gl(n)$ bezüglich der Matrixmultiplikation bildet. Eine analoge Aussage trifft auf untere Dreiecksmatrizen mit von Null verschiedenen Diagonalelementen zu.

2.1.3 Gruppenhomomorphismen

Definition 2.15 *Seien $(G,\circ)$ und $(H,*)$ Gruppen. Ein* ***(Gruppen-)Homomorphismus*** *[group homomorphism] ist eine Abbildung $\varphi: G \to H$ mit $\varphi(a \circ b) = \varphi(a) * \varphi(b)$ für alle $a,b \in G$. Ist darüberhinaus φ bijektiv so bezeichnet man φ als* ***(Gruppen-)Ismorphismus*** *[group isomorphism].*

Lemma 2.16 *Seien $(G,\circ),(H,*)$ Gruppen und $\varphi: G \to H$ Homomorphismus.*

a) Ist e das neutrale Element von G, so ist $\varphi(e)$ das neutrale Element von H.

b) $\varphi(a^{-1}) = \big(\varphi(a)\big)^{-1}$ für jedes $a \in G$.

BEWEIS: a) $\varphi(e) * \varphi(a) = \varphi(e \circ a) = \varphi(a)$; $\varphi(a) * \varphi(e) = \varphi(a \circ e) = \varphi(a)$.
b) $\varphi(a^{-1}) * \varphi(a) = \varphi(a^{-1} \circ a) = \varphi(e) = \varphi(a \circ a^{-1}) = \varphi(a) * \varphi(a^{-1})$. ■

Gruppen zwischen denen ein Isomorphismus besteht heissen **isomorph** zueinander. Formal schreibt man $(G,\circ) \cong (H,*)$. Die Klassifizierung von Gruppen durch Homo- und Isomorphismen ist ein wichtiges Teilgebiet der Algebra und ragt weit über den Vorlesungskanon der linearen Algebra hinaus.

2.2 Ringe

Bei Gruppen betrachtet man jeweils nur eine Verknüpfung und kann dadurch keine Interaktionen zwischen zwei verschiedenen Verknüpfungen beschreiben. Ein Beispiel für solche Interaktionen sind die Distributivgesetze der Matrixaddition und -multiplikation, siehe Satz 1.8. Im folgenden wollen wir daher Strukturen mit zwei Verknüpfungen betrachten. Dabei sollte man sich zunächst die Addition und Multiplikation (von Zahlen oder Matrizen) als Paten für die beiden Verknüpfungen vorstellen. Wir werden später noch weitere Beispiele kennenlernen.

Definition 2.17 *Ein* ***Ring*** *[ring] $(R,+,\cdot)$ ist eine Menge R mit zwei Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} + : R \times R \to R, &\qquad (a,b) \mapsto a+b, \\ \cdot : R \times R \to R, &\qquad (a,b) \mapsto a \cdot b, \end{aligned} \tag{2.5}$$

für die folgende Regeln erfüllt sind:

(1) $a+b = b+a, \quad \forall a,b \in R$. *(Kommutativität+)*

(2) $a+(b+c) = (a+b)+c, \quad \forall a,b,c \in R$. *(Assoziativität+)*

(3) Es gibt $0 \in R$ mit $0+a = a$ für alle $a \in R$. *(Nullelement)*

(4) Zu jedem $a \in R$ gibt es $-a \in R$ mit $a+(-a) = 0$. *(Inverses+)*

(5) $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c, \quad \forall a,b,c \in R$. *(Assoziativität·)*

(6) $(a+b) \cdot c = (a \cdot c) + (b \cdot c), \quad \forall a,b,c \in R$. *(Distributivität I)*

(7) $a \cdot (b+c) = (a \cdot b) + (a \cdot c), \quad \forall a,b,c \in R$. *(Distributivität II)*

Wie bei den Gruppen wieder der Hinweis, dass die in (2.5) versteckte Abgeschlossenheit der beiden Verknüpfungen ein wichtiges Merkmal von Ringen ist. Gemäss den Regeln (1)–(4) ist $(R,+)$ kommutative Gruppe während $(R,\cdot)$ aufgrund von Regel (5) lediglich eine Halbgruppe zu sein braucht.

Wie bei den Zahlen und Matrizen werden wir in folgenden eine vereinfachte Schreibweise $ab = a \cdot b$ verwenden. Die Regel "Punkt vor Strich" erlaubt es uns Klammern einzusparen: $a + (bc) = a + bc$.

Die Existenz eines neutralen Elements bezüglich $\cdot$ wird in der Definition eines Rings selbst nicht gefordert, ist aber oft gegeben.

Definition 2.18 *Sei $(R,+,\cdot)$ Ring.*

1. *Gibt es $1 \in R$ mit $1 \cdot a = a \cdot 1$ für alle $a \in R$, so wird 1 als* ***Einselement*** *des Rings bezeichnet. In diesem Fall nennt man $(R,+,\cdot)$* ***Ring mit Eins****.*

2. *Ein Ring heisst* ***kommutativ*** *wenn $ab = ba$ für alle $a,b \in R$ gilt.*

Einige (Gegen-)Beispiele für Ringe:

- Die Mengen $\mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ bilden zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation jeweils einen kommutativen Ring mit Eins.

- Für jedes feste $n \in \mathbb{N}$ bildet die Menge $n\mathbb{Z} = \{nz : z \in \mathbb{Z}\}$ zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation einen kommutativen Ring (ohne Einselement, es sei denn $n = 1$).

- Die Menge der $n \times n$-Matrizen bildet zusammen mit Matrixaddition und -multiplikation einen Ring mit Eins. Dies folgt aus Satz 1.8 und der Einheitsmatrix als Einselement. Dagegen bildet die Menge $Gl(n)$ der invertierbaren $n \times n$-Matrizen mit diesen Operationen keinen Ring, weil z.B. $O \notin Gl(n)$.

- Betrachte auf der Menge $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ die Operationen

  $$a \oplus b = \min\{a,b\}, \qquad a \odot b = a + b.$$

  Dann bildet $\big(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, \oplus, \odot\big)$ *keinen* Ring. (Übung: Welche Regeln sind (nicht) erfüllt?)

- Sei X eine nichtleere Menge und $(R,+,\cdot)$ ein Ring. Dann bildet die Menge der Abbildungen nach R,

  $$\mathrm{Abb}(X,R) := \big\{ f : f \text{ ist Abbildung von } X \text{ nach } R \big\}$$

  zusammen mit den Operationen

  $$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (f \cdot g)(x) := f(x)g(x)$$

  einen Ring.

- Sei $(R,+,\cdot)$ ein Ring. Ein Polynom über R in einer Unbekannten t hat die Form

$$p = a_0 \cdot t^0 + a_1 \cdot t^1 + a_2 \cdot t^2 + \cdots + a_n \cdot t^n, \quad a_0, a_1, \ldots, a_n \in R. \tag{2.6}$$

Oft schreibt man auch einfach $a_0 \cdot t^0 = a_0$ und $a_1 \cdot t^1 = a_1 \cdot t$. Der **Grad** *[degree]* von p, bezeichnet mit $\deg(p)$, ist der grösste Index j für den $a_j \neq 0$ gilt. Die Menge aller Polynome über R bezeichnen wir mit $R[t]$.

Man muss an dieser Stelle sehr vorsichtig sein und nicht zu vorschnellen Schlüssen neigen: Der Ausdruck (2.6) ist zunächst rein formal zu verstehen; t ist lediglich ein Platzhalter für ein unbestimmtes Objekt. Auch die Potenzen t^j und die Summationszeichen sind rein formal zu verstehen und stehen einfach dort, weil man sich dann die folgenden Rechenregeln einfacher merken kann. Erst wenn das Polynom ausgewertet wird (was wir an dieser Stelle nicht tun werden), muss man sich darauf verständigen, was Potenzen von t, die Multiplikation mit Elementen aus R und die Addition wirklich bedeuten.

Seien $p, q \in R[t]$ mit

$$p = a_0 + a_1 \cdot t + \cdots + a_m \cdot t^m, \quad q = b_0 + b_1 \cdot t + \cdots + b_n \cdot t^n.$$

Dann definieren wir die folgenden Verknüpfungen:

$$\begin{aligned} p+q &:= (a_0+b_0) + (a_1+b_1) \cdot t + \cdots + (a_{\max\{m,n\}} + b_{\max\{m,n\}}) \cdot t^{\max\{m,n\}} \\ p \cdot q &:= c_0 + c_1 \cdot t + \cdots + c_{m+n} \cdot t^{m+n}, \qquad c_k := \sum_{i+j=k} a_i b_j. \end{aligned}$$

(Sollten die Polynome unterschiedlich lang sein, also $m \neq n$, so füllt man einfach die Koeffizienten des kürzeren Polynoms mit Nullen auf.)

Wie man sich leicht überzeugen kann, ist $(R[t],+,\cdot)$ wieder ein Ring. Das Nullelement ist $0 \cdot t^0$. Ist $(R,+,\cdot)$ kommutativer Ring mit Eins, so ist auch $(R[t],+,\cdot)$ kommutativer Ring mit Eins. Das Einselement ist $1 \cdot t^0$.

Das folgende Resultat enthält aus Definition 2.17 abgeleitete Rechenregeln, die für viele der oben genannten Beispiele als vollkommen selbstverständlich angesehen werden.

Lemma 2.19 *Sei $(R,+,\cdot)$ Ring. Dann gilt für alle $a,b \in R$:*

(i) $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$;

(ii) $(-a)b = a(-b) = -(ab)$;

(iii) $(-a)(-b) = ab$.

BEWEIS:

(i) Aus Distributivität I folgt

$$0 \cdot a = 0 \cdot a + 0 = 0 \cdot a + 0 \cdot a + (-(0 \cdot a)) = (0+0) \cdot a + (-(0 \cdot a)) = 0 \cdot a + (-(0 \cdot a)) = 0.$$

Analog folgt $a \cdot 0 = 0$.

(ii) Aus Distributivität I bzw. II, zusammen mit Teil (i), folgen

$$ab + (-a)b = (a + (-a))b = 0 \cdot b = 0$$

bzw.

$$ab + a(-b) = a(b + (-b)) = a \cdot 0 = 0.$$

(iii) folgt sofort aus (ii) und Lemma 2.7: $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$. ∎

Lemma 2.19 erlaubt es uns, $-ab$ ohne Uneindeutigkeiten zu schreiben. Es kann leicht gezeigt werden, dass die beiden Distributivgesetze auch gelten wenn Addition durch Subtraktion

$$a - b := a + (-b)$$

ersetzt wird.

Analog wie bei Gruppen lassen sich auch bei Ringen Homo- und Isomorphismen definieren.

Definition 2.20 *Es seien $(R,+,\cdot)$ und $(S,\oplus,\odot)$ Ringe. Ein* ***Ringhomomorphismus*** *ist eine Abbildung $\varphi : R \to S$*

$$\varphi(a+b) = \varphi(a) \oplus \varphi(b), \qquad \varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \odot \varphi(b),$$

für alle $a,b \in R$. Ist φ zusätzlich bijektiv, dann heisst φ ***Ringisomorphismus*** *und wir schreiben $(R,+,\cdot) \cong (S,\oplus,\odot)$*

Ebenso überträgt sich das Konzept von Untergruppen auf Ringe.

Definition 2.21 *Sei $(R,+,\cdot)$ Ring und $U \subset R$. Dann heisst $(U,+,\cdot)$* ***Unterring*** *[subring] von $(R,+,\cdot)$ wenn $(U,+,\cdot)$ selbst ein Ring ist.*

Natürlich braucht man bei Unterringen nicht alle Regeln von Definition 2.17 zu überprüfen.

Satz 2.22 *Sei $(R,+,\cdot)$ Ring und $U \subset R$ mit $U \neq \emptyset$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $(U,+,\cdot)$ ist Unterring von $(R,+,\cdot)$.

(ii) Für alle $a,b \in U$ sind auch $a-b$ und ab in U.

BEWEIS: (i)⇒(ii) ist trivial.
(ii)⇒(i). Wähle ein $a \in U$ aus, dann ist wegen $0 = a - a \in U$ das Nullelement in U enthalten. Für jedes $b \in U$ gilt $-b = 0 - b$, also ist $-b \in U$ enthalten. Für alle $a,b \in U$ gilt $a + b = a - (-b) \in U$ wegen $-b \in U$, also ist die Addition innerhalb von U abgeschlossen. Die restlichen Ringeigenschaften erbt U von R. ∎

Zum Beispiel ist $n\mathbb{Z}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ Unterring von $\mathbb{Z}$. Die auf Seite 34 eingeführte Menge M_2 bilden einen Unterring der 2×2-Matrizen mit Matrixaddition und -multiplikation.

2.3 Körper

In einem Ring $(R,+,\cdot)$ mit Einselement 1 versteht man die Invertierbarkeit von $a \in R$ bezüglich der Verknüpfung $\cdot$. Dementsprechend erfüllt das Inverse von a die Beziehung $a^{-1}a = aa^{-1} = 1$. Um degenerierte Fälle auszuschliessen, verlangt man üblicherweise $1 \neq 0$. Wegen Lemma 2.19 kann dann 0 niemals invertierbar sein. Fordert man aber die Invertierbarkeit aller anderen Elemente, so erhält man die folgenden Strukturen.

Definition 2.23 *Sei $(R,+,\cdot)$ Ring mit Einselement $1 \neq 0$. Ist jedes $a \in R \setminus \{0\}$ invertierbar, so nennt man $(R,+,\cdot)$* ***Schiefkörper*** *[skew field] oder* ***Divisionsring*** *[division ring]. Ein kommutativer Schiefkörper heisst* ***Körper*** *[field].*

Die folgende Charakterisierung eines Schiefkörpers ist mitunter handlicher.

Satz 2.24 *Ein Ring* $(R,+,\cdot)$ *ist genau dann Schiefkörper, wenn* $(R\setminus\{0\},\cdot)$ *eine Gruppe ist.*

BEWEIS: Für einen Schiefkörper ist definitionsgemäss $(R,\cdot)$ Halbgruppe und alle Elemente aus $R\setminus\{0\}$ sind invertierbar. Da das Produkt von zwei invertierbaren Elementen wieder invertierbar ist, folgt Abgeschlossenheit von $R\setminus\{0\}$. Also ist $R\setminus\{0\}$ eine Gruppe.

Ist umgekehrt $(R\setminus\{0\},\cdot)$ eine Gruppe, so gibt es ein neutrales Element $e\in R\setminus\{0\}$). Wegen $0\cdot e = e\cdot 0 = 0$ ist e auch Einselement von $(R,+,\cdot)$. Die restlichen Eigenschaften eines Schiefkörpers sind per Voraussetzung erfüllt. ■

Der Übersicht halber führen wir alle Regeln, die in einem *Körper* gelten müssen, explizit auf:

$$a+b\in R,\quad a\cdot b\in R\quad \forall a,b\in R. \tag{Abgeschlossenheit}$$

$$a+b=b+a,\quad \forall a,b\in R. \tag{Kommutativität+}$$

$$a+(b+c)=(a+b)+c,\quad \forall a,b,c\in R. \tag{Assoziativität+}$$

$$\text{Es gibt } 0\in R \text{ mit } 0+a=a \text{ für alle } a\in R. \tag{Nullelement}$$

$$\text{Zu jedem } a\in R \text{ gibt es } -a\in R \text{ mit } a+(-a)=0. \tag{Inverses+}$$

$$a\cdot b=b\cdot a,\quad \forall a,b\in R. \tag{Kommutativität$\cdot$}$$

$$a\cdot(b\cdot c)=(a\cdot b)\cdot c,\quad \forall a,b,c\in R. \tag{Assoziativität$\cdot$}$$

$$\text{Es gibt } 1\in R\setminus\{0\} \text{ mit } 1\cdot a=a \text{ für alle } a\in R. \tag{Einselement}$$

$$\text{Zu jedem } a\in R\setminus\{0\} \text{ gibt es } a^{-1}\in R \text{ mit } a\cdot a^{-1}=1. \tag{Inverses$\cdot$}$$

$$(a+b)\cdot c=(a\cdot c)+(b\cdot c),\quad \forall a,b,c\in R. \tag{Distributivität I}$$

$$a\cdot(b+c)=(a\cdot b)+(a\cdot c),\quad \forall a,b,c\in R. \tag{Distributivität II}$$

Aufgrund der Kommutativität von $\cdot$ folgt Distributivität II aus Distributivität I und ist hier nur der Vollständigkeit halber mit aufgezählt.

Einige (Gegen-)Beispiele für Körper:

- $\mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ bilden zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation Körper. $\mathbb{Z}$ und $n\mathbb{Z}$ bilden keine Körper.
- Die Menge der $n\times n$-Matrizen bildet keinen Körper.
- Die auf Seite 34 eingeführte Menge M_2 bildet zusammen mit Matrixaddition und -multiplikation einen Körper.

Wir werden in den Abschnitten 2.5 und 2.6 zwar noch weitere Beispiele kennenlernen, aber insgesamt ist die Auswahl an Körpern nicht furchtbar gross. Körper stellen hohe Ansprüche an $(R,+,\cdot)$ und sind die Diven unter den algebraischen Strukturen, die wir kennengelernt haben.

Homo- und Isomorphismen von Körpern sind die Homo- und Isomorphismen der zugrundeliegenden Ringe.

2.4 Matrizen über Ringen und Körpern

Unsere ursprüngliche Definition 1.1 einer Matrix erlaubte nur Einträge mit reellen Zahlen. Im folgenden wollen wir den Begriff einer Matrix wesentlich allgemeiner fassen.

Definition 2.25 *Sei $(R,+,\cdot)$ kommutativer Ring mit Eins. Ein rechteckiges Schema der Form*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

*mit $a_{ij} \in R$, $i = 1,\dots,m$, $j = 1,\dots,n$, heisst **$m \times n$-Matrix über R**. Die Menge aller $m \times n$-Matrizen über R wird mit $R^{m\times n}$ bezeichnet.*

Alle Definitionen und Aussagen von Kapitel 1 zu Matrizen lassen sich direkt auf Matrizen über $(R,+,\cdot)$ übertragen, da nirgends spezielle Eigenschaften von $\mathbb{R}$ ausgenutzt wurde. Insbesondere besteht jetzt die Nullmatrix aus lauter Nullelementen aus R und die Einheitsmatrix hat Einselemente auf der Diagonalen und sonst nur Nullelemente. Die Matrixaddition und -multiplikation sind genau wie in Kapitel 1 definiert, nur dass die gewöhnliche Addition und Multiplikation von reellen Zahlen durch die Addition und Multiplikation des Ringes ersetzt werden. Sätze 1.4 und 1.8 übertragen sich auf $R^{m\times n}$ und liefern das folgende Resultat.

Satz 2.26 *Sei $(R,+,\cdot)$ kommutativer Ring mit Eins. Dann bildet $R^{n\times n}$ zusammen mit der Matrixaddition und -multiplikation einen Ring mit Eins.*

Invertierbarkeit einer Matrix $A \in R^{n\times n}$ bedeutet Existenz einer Matrix $X \in R^{n\times n}$, so dass

$$AX = XA = I_n$$

mit der Einheitsmatrix $I_n \in R^{n\times n}$. Hier muss man ein wenig vorsichtig sein: Matrizen die in einem Ring invertierbar sind können in einem anderen Ring betrachtet ihre Invertierbarkeit verlieren. Zum Beispiel ist $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ invertierbar:

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}.$$

Doch die gleiche Matrix ist in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ nicht invertierbar: Gäbe es $X \in \mathbb{Z}^{2\times 2}$ mit $AX = XA = I_n$, so hätte $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ zwei verschiedene Inverse, nämlich X und A^{-1}. Dies stünde aber im Widerspruch zur Eindeutigkeit der Inversen.

2.5 Komplexe Zahlen

Die Menge der komplexen Zahlen ist definiert als

$$\mathbb{C} = \{x + y\mathrm{i} : x, y \in \mathbb{R}\},$$

wobei i die **imaginäre Einheit** [*imaginary unit*] ist mit $\mathrm{i}^2 = -1$. Für eine komplexe Zahl $z = x + y\mathrm{i}$ heisst x **Realteil** [*real part*] und y **Imaginärteil** [*imaginary part*] von z. Wir schreiben $x = \mathrm{Re}(z)$ und $y = \mathrm{Im}(z)$.

Vom algebraischen Standpunkt betrachtet, sind komplexe Zahlen einfach Paare von reellen Zahlen und die Bezeichung $x + y\mathrm{i}$ hilft lediglich, sich die folgenden Operationen besser merken zu können. Wir definieren auf $\mathbb{C}$ die folgenden Verknüpfungen als Addition und Multiplikation:

$$\begin{aligned} +: \quad & \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (x_1 + y_1\mathrm{i}) + (x_2 + y_2\mathrm{i}) := (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\mathrm{i}, \\ \cdot: \quad & \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}, \quad (x_1 + y_1\mathrm{i})\cdot(x_2 + y_2\mathrm{i}) := (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + y_1x_2)\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Beispiel 2.2:

Zum Beispiel gelten

$$(1+\mathrm{i}) + (-2+\mathrm{i}) = -1 + 2\mathrm{i}$$

und

$$(1+\mathrm{i})(-2+\mathrm{i}) = -3 - \mathrm{i}.$$

In MATLAB ist die imaginäre Einheit `i` (oder `j`).

```
>> (1+1i) + (-2+1i),
ans =
  -1.0000 + 2.0000i
>> (1+1i) * (-2+1i),
ans =
  -3.0000 - 1.0000i
```

Es empfiehlt sich `i` nie alleinstehend zu verwenden sondern immer in der Form `1i`, da MATLAB `i` als eine mit einen anderen Wert überschriebene Variable interpretieren könnte. ♦

Es ist leicht zu sehen, dass $(\mathbb{C},+)$ die Eigenschaften von $(\mathbb{R},+)$ erbt und eine abelsche Gruppe bildet. Das neutrale Element ist $0 = 0 + 0\mathrm{i}$ und das additive Inverse von $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}$ ist $-z := -x - y\mathrm{i}$. Die Subtraktion zweier komplexer Zahlen $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$ und $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$ ist demnach

$$z_1 - z_2 := z_1 + (-z_2) = (x_1 - x_2) + (y_1 - y_2)\mathrm{i}.$$

Um uns aller Mühen beim Nachweis der Eigenschaften der Multiplikation von komplexen Zahlen zu entledigen, definieren wir die Abbildung

$$\varphi: \mathbb{C} \to M_2, \quad \varphi: x + y\mathrm{i} \mapsto \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}, \tag{2.7}$$

wobei M_2 auf Seite 34 definiert wurde. Offenbar ist φ bijektiv und bildet einen Gruppenisomorphismus zwischen $(\mathbb{C},+)$ und $(M_2,+)$. Desweiteren gilt

$$\begin{aligned} \varphi(x_1 + y_1\mathrm{i})\varphi(x_2 + y_2\mathrm{i}) &= \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ -y_1 & x_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ -y_2 & x_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} x_1x_2 - y_1y_2 & x_1y_2 + y_1x_2 \\ -y_1x_2 - x_1y_2 & -y_1y_2 + x_1x_2 \end{pmatrix} = \varphi\big((x_1 + y_1\mathrm{i})(x_2 + y_2\mathrm{i})\big). \end{aligned}$$

Da $(M_2 \setminus \{0\},\cdot)$ Gruppe ist, folgt, dass auch $(\mathbb{C}\setminus\{0\},\cdot)$ Gruppe ist. Das neutrale Element ist $1 = \varphi^{-1}(I_2) = 1 + 0\mathrm{i}$ und das multiplikative Inverse von $z = x + y\mathrm{i} \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ ist

$$\begin{aligned} z^{-1} = \varphi^{-1}(\varphi(z)^{-1}) &= \varphi^{-1}\left(\begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^{-1}\right) \\ &= \varphi^{-1}\left(\frac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1}\right) = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}. \end{aligned}$$

Aufgrund des Isomorphismus φ übertragen sich die Distributivitätsgesetze der Matrixaddition und -multiplikation auf $(\mathbb{C},+,\cdot)$. Desweiteren sieht man leicht dass die Multiplikation in $\mathbb{C}$ (und M_2) kommutativ ist und somit erhalten wir zusammenfassend:

Satz 2.27 $(\mathbb{C},+,\cdot)$ *ist ein Körper.*

Betrachtet man – wie oben empfohlen – komplexe Zahlen als Paare von reellen Zahlen, so ist die obige Konstruktion der Multiplikation schon recht speziell. Es stellt sich die naheliegende Frage, ob und wie sich diese Konstruktion sinnvoll auf Tripel, Quadrupel oder gar beliebige Tupel von reellen Zahlen übertragen lässt. Für Quadrupel ist dies tatsächlich möglich und führt auf die sogenannten **Quaternionen** *[quaternions]*, die einen Schiefkörper (aber keinen Körper) bilden.

Definition 2.28 *Sei $z = x + yi \in \mathbb{C}$. Dann ist $\bar{z} := x - yi$ die zu z* ***Konjugierte*** *[conjugate]. Der* ***Betrag*** *[absolute value] ist $|z| := \sqrt{x^2+y^2}$.*

In M_2 entspricht Konjugation der Matrixtransposition:

$$\varphi(\bar{z}) = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix}^{\mathsf{T}} = \varphi(z)^{\mathsf{T}}. \tag{2.8}$$

Die Konjugation ist mit Addition und Multiplikation verträglich

$$\overline{z_1+z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}, \quad \overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}, \quad \forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}. \tag{2.9}$$

Bei der Addition sieht man dies sofort ein. Bei der Multiplikation liesse sich dies auch einfach nachrechnen oder man bemüht (2.8):

$$\varphi(\overline{z_1 \cdot z_2}) = \varphi(z_1 z_2)^{\mathsf{T}} = \varphi(z_2)^{\mathsf{T}}\varphi(z_1)^{\mathsf{T}} = \varphi(z_1)^{\mathsf{T}}\varphi(z_2)^{\mathsf{T}} = \varphi(\overline{z_1})\varphi(\overline{z_2}) = \varphi(\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}).$$

Die Beziehungen (2.9) sagen aus, dass Konjugation ein Körperisomorphismus von $(\mathbb{C},+,\cdot)$ auf sich selbst[8] ist.

Lemma 2.29 *Es gelten die folgenden Rechenregeln für $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$:*

(i) $\mathrm{Re}(z) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})$

(ii) $\mathrm{Im}(z) = \frac{1}{2}(z-\bar{z})$

(iii) $z \cdot \bar{z} = |z|^2$

(iv) $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}, \quad (z \neq 0)$

(v) $\overline{z^{-1}} = \bar{z}^{-1}, \quad (z \neq 0)$

BEWEIS: Übung. ■

Die Division zweier komplexer Zahlen $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ mit $z_2 \neq 0$ ist definiert als $z_1/z_2 := z_1 z_2^{-1}$. Mit Lemma 2.29 (iv) ergibt sich

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{|z_2|^2}.$$

[8] Ein Isomorphismus einer algebraischen Struktur auf sich selbst heisst Automorphismus.

2.5.1 Matrizen über komplexen Zahlen

Als Spezialfall von Definition 2.25 ergibt sich für $R = \mathbb{C}$ die Menge $\mathbb{C}^{m\times n}$ der $m \times n$-Matrizen über den komplexen Zahlen (oder kurz: komplexe $m \times n$-Matrizen).

Die Konjugation überträgt sich auf Matrizen, indem man einfach jeden Eintrag konjugiert:

$$A \in \mathbb{C}^{m\times n} \quad \Rightarrow \quad \overline{A} \in \mathbb{C}^{m\times n} \text{ mit } (\overline{A})_{ij} := \overline{a_{ij}}, \; i = 1,\dots,m, \; j = 1,\dots,n.$$

Beispiel 2.3:

Seien

$$A = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ 3 & -\mathrm{i} \\ 2-\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 1-\mathrm{i} \\ -1-\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Dann ergeben sich

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 1+\mathrm{i} \\ 3 & \mathrm{i} \\ 2+\mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad AB = \begin{pmatrix} -3+3\mathrm{i} & 5+\mathrm{i} \\ 2+4\mathrm{i} & 4-4\mathrm{i} \\ 2-2\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix}.$$

In MATLAB gibt man komplexe Matrizen wie reelle Matrizen ein.

```
>> A = [1+2i 1-1i;
        3    -1i;
        2-1i 2+1i];
>> B = [1+1i 1-1i;
       -1-1i 1+1i];
>> conj(A),
ans =
   1 - 2i   1 + 1i
   3 - 0i  -0 + 1i
   2 + 1i   2 - 1i
>> A*B,
ans =
  -3 + 3i   5 + 1i
   2 + 4i   4 - 4i
   2 - 2i   2 + 0i
```

♦

Die in Abschnitt 1.6 eingeführte Transponierte einer reellen Matrix kann trivialerweise auf komplexe Matrizen erweitert werden. Bei komplexen Matrizen macht es aber in der Regel mehr Sinn[9], die Einträge nicht nur zu stürzen sondern auch noch zu konjugieren.

Definition 2.30 *Ist $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, so heisst $A^{\mathsf{H}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ mit $(A^{\mathsf{H}})_{ij} := \overline{a_{ji}}$, für $i = 1,\dots,n$ und $j = 1,\dots,m$, die zu A* ***konjugiert-transponierte*** *[conjugate transpose] oder* ***Hermitesch-transponierte*** *[Hermitian transpose] Matrix.*

Beispiel 2.4:

Sei A wie in Beispiel 2.3. Dann sind

$$A^{\mathsf{H}} = \begin{pmatrix} 1-2\mathrm{i} & 3 & 2+\mathrm{i} \\ 1+\mathrm{i} & \mathrm{i} & 2-\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad A^{\mathsf{T}} = \begin{pmatrix} 1+2\mathrm{i} & 3 & 2-\mathrm{i} \\ 1-\mathrm{i} & -\mathrm{i} & 2+\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

In MATLAB wird die Hermitesch Transponierte, wie bei der Transposition von *reellen* Matrizen, berechnet indem man ein Apostroph hinter die Matrix gestellt. Für die selten benötigte (komplex) Transponierte ist ein Punkt vor das Apostroph zu stellen.

```
>> A'
ans =
   1 - 2i   3 - 0i   2 + 1i
   1 + 1i  -0 + 1i   2 - 1i
>> A.'
ans =
   1 + 2i   3 + 0i   2 - 1i
   1 - 1i  -0 - 1i   2 + 1i
```

♦

[9] Dies wird leider erst im Verlaufe der Vorlesung, bei der Cholesky-Zerlegung und bei den Eigenwerten, richtig klar werden.

Aus Definition 2.30 folgt sofort die Beziehung

$$A^{\mathsf{H}} = (\overline{A})^{\mathsf{T}} = \overline{A^{\mathsf{T}}}. \tag{2.10}$$

Da im Beweis von Satz 1.14 keine besonderen Eigenschaften der reellen Zahlen ausgenutzt wurden, übertragen sich dessen Rechenregeln für die Transposition direkt auf Matrizen über beliebigen kommutativen Ringen, inbesondere auf komplexe Matrizen. Kombiniert mit (2.10) erhalten wir daraus unmittelbar entsprechende Rechenregeln für Hermitesche Transposition.

Korollar 2.31 *(i) Für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ gilt*

$$\boxed{(A^{\mathsf{H}})^{\mathsf{H}} = A.}$$

(ii) Für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{C}$ gilt

$$\boxed{(\alpha A)^{\mathsf{H}} = \overline{\alpha} A^{\mathsf{H}}.}$$

(iii) Für $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ gilt

$$\boxed{(A+B)^{\mathsf{H}} = A^{\mathsf{H}} + B^{\mathsf{H}}.}$$

(iv) Für $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ und $B \in \mathbb{C}^{n\times p}$ gilt

$$\boxed{(AB)^{\mathsf{H}} = B^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}}.}$$

BEWEIS: Den Nachweis von (i)–(iii) überlassen wir dem geneigten Leser zur Übung. Zum Nachweis von (iv) bemerken wir zunächst, dass aus der Verträglichkeit (2.9) von Konjugation mit Addition und Multiplikation die Beziehung $\overline{AB} = \overline{A} \cdot \overline{B}$ folgt. Zusammen mit (2.10) und Satz 1.14 (iv) ergibt sich

$$(AB)^{\mathsf{H}} = \left(\overline{AB}\right)^{\mathsf{T}} = \left(\overline{A} \cdot \overline{B}\right)^{\mathsf{T}} = \overline{B}^{\mathsf{T}} \overline{A}^{\mathsf{T}} = B^{\mathsf{H}} A^{\mathsf{H}}.$$

■

Definition 2.32 *Eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ heisst* ***Hermitesch*** *[Hermitian], falls*

$$A^{\mathsf{H}} = A, \qquad \text{dass heisst } a_{ij} = \overline{a_{ji}} \text{ für } i,j = 1,\dots,n.$$

Zum Beispiel ist bei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2+3\mathrm{i} & 4+5\mathrm{i} \\ 2-3\mathrm{i} & 6 & 7+8\mathrm{i} \\ 4-5\mathrm{i} & 7-8\mathrm{i} & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1+\mathrm{i} & 2+3\mathrm{i} & 4+5\mathrm{i} \\ 2+3\mathrm{i} & 6+2\mathrm{i} & 7+8\mathrm{i} \\ 4+5\mathrm{i} & 7+8\mathrm{i} & 9-3\mathrm{i} \end{pmatrix},$$

die Matrix A Hermitesch. Die Matrix B ist (komplex) symmetrisch aber nicht Hermitesch. Bei Hermiteschen Matrizen sind die Diagonalelemente immer reell.

2.6 Restklassenringe und -körper

Zum Abschluss dieses Kapitels wollen wir uns noch mit algebraischen Strukturen beschäftigen, die einerseits in der Codierungstheorie wichtig sind und andererseits illustrieren, wie man aus bestehenden Strukturen mit Hilfe von Äquivalenzrelationen neue Strukturen gewinnen kann.

Zunächst wiederholen wir den bereits aus der Analysis bekannten Begriff einer Äquivalenzrelation.

Definition 2.33 *Sei X eine Menge. Eine Teilmenge R von $X \times X$ heisst* ***Äquivalenzrelation*** *[equivalence relation] auf X wenn:*

(i) $(x,x) \in R$ für alle $x \in R$; *(reflexiv)*

(ii) aus $(x,y) \in R$ folgt $(y,x) \in R$; *(symmetrisch)*

(iii) aus $(x,y) \in R$ und $(y,z) \in R$ folgt $(x,z) \in R$. *(transitiv)*

Ist klar welches R gemeint ist, so schreibt man kürzer $x \sim y$ an Stelle von $(x,y) \in R$. Zu jedem $x \in X$ heisst

$$[x]_R := \{y \in X : x \sim y\}$$

die **Äquivalenzklasse** *[equivalence class]* von x (bezüglich R). Die Menge der Äquivalenzklassen wird mit

$$X/R := \{[x]_R : x \in X\}$$

bezeichnet. Äquivalenzrelationen und -klassen erlauben es, eine gegebene Menge X in gewissermassen gleichgesinnte Elemente zu partitionieren.

Lemma 2.34 *Für eine Menge $X \neq 0$ und eine Äquivalenzrelation R auf X gelten:*

(i) $X = \bigcup_{x\in X} [x]_R$;

(ii) $[x]_R \neq \emptyset$ *für alle* $x \in X$;

(iii) $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \quad \Leftrightarrow \quad x \sim y \quad \Leftrightarrow \quad [x]_R = [y]_R$.

BEWEIS: Aufgrund von Reflexivität gilt $x \in [x]_R$. Dies zeigt (i) und (ii).

Sei $z \in [x]_R \cap [y]_R$, d.h. $z \sim x$ und $z \sim y$. Aufgrund von Symmetrie und Transitivität folgt daraus $x \sim y$. Dies zeigt $[x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset \Rightarrow x \sim y$. Sei nun $x \sim y$ und $z \in [x]_R$, also $z \sim x$. Wieder aufgrund von Symmetrie und Transitivität folgt daraus $z \sim y$, also $z \in [y]_R$. Dies zeigt $[x]_R \subset [y]_R$ und analog zeigt man $[y]_R \in [x]_R$. Also haben wir $x \sim y \Rightarrow [x]_R = [y]_R$. Mit der trivialen Implikation $[x]_R = [y]_R \Rightarrow [x]_R \cap [y]_R \neq \emptyset$ schliesst sich der Kreis und (iii) ist bewiesen. ■

Für uns sind im Moment (zum Glück) nur Äquivalenzrelationen auf $\mathbb{Z}$ von Interesse.

Beispiel 2.5: Eine ganze Zahl hat bei Division durch 3 entweder den Rest 0, 1, oder 2. (Um Missverständnisse bei negativen Zahlen zu vermeiden: Subtrahiert man den Rest von der Zahl, so ergibt sich ein Vielfaches von 3.) Betrachten wir die Äquivalenzrelation: $x \sim y$ wenn x und y den gleichen Rest bei Division durch 3 haben, so ergeben sich die folgenden Äquivalenzklassen:

$$[0] = \{\dots,-6,-3,0,3,6,\dots\},$$
$$[1] = \{\dots,-5,-2,1,4,7,\dots\},$$
$$[2] = \{\dots,-4,-1,2,5,8,\dots\}.$$

♦

Wir wollen im Folgenden Beispiel 2.5 verallgemeinern. Sei $p \in \mathbb{N}$ fest gewählt. Dann gibt es zu jedem $x \in \mathbb{Z}$ eindeutig bestimmte $q, r \in \mathbb{Z}$ mit

$$x = pq + r, \quad 0 \le r \le q-1. \tag{2.11}$$

Dabei heisst r der **Rest** *[remainder]* von x bei der Division mit p. Mit Hilfe von 2.11 erklären wir auf $\mathbb{Z}$ eine Relation R_p durch

$$(x,y) \in R_p \quad \Leftrightarrow \quad x \text{ und } y \text{ haben bei der Division mit } p \text{ den gleichen Rest.}$$

Man sieht leicht ein, dass R_p Äquivalenzrelation ist. Anstatt von $(x,y) \in R_p$ oder $x \sim y$ ist die folgende Schreibweise üblicher:

$$x \equiv y \mod p.$$

Aus $x = pq_x + r_x$ und $y = pq_y + r_y$ folgt $x - y = p(q_x - q_y) + (r_x - r_y)$ und damit haben wir

$$x \equiv y \mod p \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in p\mathbb{Z}. \tag{2.12}$$

Die zu R_p gehörigen Äquivalenzklassen sind also

$$[x] = \{y \in \mathbb{Z} : x - y \in p\mathbb{Z}\} = \{x + pq : q \in \mathbb{Z}\} = x + p\mathbb{Z}.$$

Die Menge aller Restklassen wird mit $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ bezeichnet.[10] Jede Restklasse gehört zu einem Rest, also

$$\mathbb{F}_p = \{[0],[1],[2],\ldots,[p-1]\}.$$

Um algebraische Strukturen betrachten zu können, benötigen wir noch Verknüpfungen auf $\mathbb{F}_p$. Verknüpfungen auf Äquivalenzklassen definiert man am besten mittels Verknüpfungen auf Repräsentanten; die Definition darf aber nicht von der Wahl der Repräsentanten abhängen.

Definition 2.35 *Sei R eine Äquivalenzrelation auf X und $\circ : X \times X \to X$ eine Verknüpfung. Dann heisst $\circ$* ***verträglich*** *[compatible, class invariant] mit R, wenn aus $x \sim x'$ und $y \sim y'$ stets $(x \circ y) \sim (x' \circ y')$ folgt.*

Satz 2.36 *Sei die Relation R auf X verträglich mit $\circ : X \times X \to X$. Ist $(X,\circ)$ Halbgruppe, so bildet auch X/R zusammen mit*

$$[x]_R \circ [y]_R = [x \circ y]_R \tag{2.13}$$

eine Halbgruppe.

BEWEIS: Zunächst muss gezeigt werden, dass (2.13) tatsächlich Sinn macht. Seien dazu $[x]_R = [x']_R$ und $[y]_R = [y']_R$. Nach Lemma 2.34 ist dies gleichbedeutend mit $x \sim x'$ und $y \sim y'$. Wegen Verträglichkeit folgt $(x \circ y) \sim (x' \circ y')$ und damit $[x \circ y]_R = [x' \circ y']_R$. Also ist (2.13) unabhängig von der Wahl der Repräsentanten und bildet somit eine wohldefinierte Verknüpfung auf X/R. Die Assoziativität von $(X/R,\circ)$ folgt direkt aus der Assoziativität von $(X/R,\circ)$. ■

Mit Hilfe von (2.13) lässt sich auf $\mathbb{F}_p$ eine Addition und Multiplikation mittels der entsprechenden Operationen auf $\mathbb{Z}$ erklären.

Korollar 2.37 *Sei $p \in \mathbb{N}$. Dann sind $(\mathbb{F}_p,+)$ und $(\mathbb{F}_p,\cdot)$ Halbgruppen.*

BEWEIS: Nach Satz 2.36 muss nur noch überprüft werden, dass Addition und Multiplikation mit mod p verträglich sind. Seien $x \equiv x' \mod p$ und $y \equiv y' \mod p$. Wegen (2.12) sind $x - x' \in p\mathbb{Z}$, $y - y' \in p\mathbb{Z}$ und damit

$$xy - x'y' = (x - x')y + x'(y - y') \in p\mathbb{Z} \quad \Rightarrow \quad xy \sim x'y'.$$

[10] Diese Bezeichnung stammt wohl vom englischen Wort *field* für Körper, da – wie wir im folgenden sehen werden – $\mathbb{F}_p$ für bestimmte p Paradebeispiele für endliche Körper ergeben.

Noch einfacher folgt die Verträglichkeit der Addition:

$$(x+y) - (x'-y') = (x-x') + (y-y') \quad \Rightarrow \quad (x+y) \sim (x'+y').$$

■

Beispiel 2.6: Im Folgenden die Verknüpfungstafeln für $p = 2,3,4$. Aus Bequemlichkeit lassen wir die eckigen Klammern weg.

$\mathbb{F}_2$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

·	0	1
0	0	0
1	0	1

$\mathbb{F}_3$:

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

·	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

$\mathbb{F}_4$:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

·	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	0	2
3	0	3	2	1

Nach der Sudoku-Regel (Satz 2.11) sind $(\mathbb{F}_2,+)$, $(\mathbb{F}_2 \setminus \{[0]\},\cdot)$, $(\mathbb{F}_3,+)$, $(\mathbb{F}_3 \setminus \{[0]\},\cdot)$, $(\mathbb{F}_4,+)$ Gruppen. $(\mathbb{F}_4 \setminus \{[0]\},\cdot)$ ist *keine* Gruppe, z.B. ist das Element $[2]$ nicht invertierbar. ♦

Wegen

$$[x] + [-x] = [0]$$

sind in $(\mathbb{F}_p,+)$ für jedes $p \in \mathbb{N}$ alle Elemente invertierbar. Wir betrachten jetzt die Invertierbarkeit in $(\mathbb{F}_p,\cdot)$. Sei $[x] \in \mathbb{F}_p \setminus \{[0]\}$. Wir suchen $y,q \in \mathbb{Z}$ so dass

$$xy + pq = 1. \tag{2.14}$$

Der grösste gemeinsame Teiler $\mathrm{ggT}(x,p)$ teilt offenbar die linke Seite der Gleichung. Damit folgt aus (2.14) dass $\mathrm{ggT}(x,p) = 1$. Gilt umgekehrt $\mathrm{ggT}(x,p) = 1$, so findet man $y,q \in \mathbb{Z}$, die (2.14) mit Hilfe des erweiterten Euklidischen Algorithmus. Insgesamt erhalten wir:

Lemma 2.38 $(\mathbb{F}_p \setminus \{[0]\},\cdot)$ *ist genau dann Gruppe wenn p Primzahl ist.*

Da sich alle Ringeigenschaften von $(\mathbb{Z},+,\cdot)$ auf $(\mathbb{F}_p,+,\cdot)$ übertragen, erhalten wir letztendlich.

Korollar 2.39 $(\mathbb{F}_p,+,\cdot)$ *ist kommutativer Ring mit Eins für alle $p \in \mathbb{N}$. $(\mathbb{F}_p,+,\cdot)$ ist Körper genau dann wenn p Primzahl ist.*

Man nennt den Körper $(\mathbb{F}_p,+,\cdot)$ auch **Primkörper**.

In MATLAB wird Divison mit Rest mit dem Befehl `mod` durchgeführt. Die Lösung der Gleichung (2.14) kann mit `[y,q] = gcd(x,p)` berechnet werden.

Es lassen sich ohne weiteres Matrizen über $\mathbb{F}_p$ definieren. Bei der Matrixmultiplikation (von Hand oder mit MATLAB) ist es oft bequemer, zunächst irgendwelche Repräsentanten für die Matrixeinträge zu bestimmen, mit der normalen Addition und Multiplikation in $\mathbb{Z}$.

Erst zum Schluss wird die Division mit Rest durchgeführt, um die Einträge in den Bereich $0,\dots,p-1$ zu bringen.

Beispiel 2.7:

Seien $A \in \mathbb{F}_5^{3\times 2}, B \in \mathbb{F}_5^{2\times 2}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dann ist

$$C = AB = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

In MATLAB gibt es keine dedizierten Befehle oder Datenstrukturen um mit Matrizen über Primkörpern zu arbeiten. Die Matrixmultiplikation lässt sich dennoch einfach durchführen:

```
>> A = [ 2 3; 4 1; 2 4];
>> B = [ 1 1; 1 3 ];
>> mod( A*B, 5 ),
ans =
   0   1
   0   2
   1   4
```

♦

Kapitel 3

Die Treppennormalform

Im folgenden sei $(K,+,\cdot)$ Körper; insbesondere denken wir an $K=\mathbb{R}$, $K=\mathbb{C}$ oder $K=\mathbb{F}_2$. Ein grundlegende und immer wiederkehrende Idee in der Linearen Algebra ist die Transformation (oder Reduktion) einer gegebenen Matrix $A\in K^{m\times n}$ auf eine Matrix $\widetilde{A}\in K^{m\times n}$ von einfacherer Form (z.B. Diagonalmatrix, obere Dreiecksmatrix, …). Für $\widetilde{A}\in K^{m\times n}$ kann dann der Nachweis gewisser Eigenschaften oft erheblicher einfacher durchgeführt werden. Im Folgenden werden wir als erstes Beispiel Äquivalenztransformationen kennenlernen, die sich u.a. zum Nachweis der Invertierbarkeit und zur Lösung von linearen Gleichungssystemen eignen.

3.1 Elementarmatrizen

Die oben erwähnten Transformationen setzen sich aus den folgenden drei Formen von Elementarmatrizen zusammen.

Elementarmatrix I: P_{ij}. Zu einer gegebenen Permutation $\pi\in S_n$ wird eine $n\times n$-Matrix wie folgt konstruiert:

$$P_\pi=\begin{pmatrix} e^{\mathsf{T}}_{\pi(1)}\\ e^{\mathsf{T}}_{\pi(2)}\\ \vdots\\ e^{\mathsf{T}}_{\pi(n)}\end{pmatrix}, \tag{3.1}$$

wobei e_i der i-te Einheitsvektor der Länge n ist. (e_i hat als i-ten Eintrag Eins und sonst nur Nullen). Eine Matrix der Form (3.1) heisst **Permutationsmatrix**.

Beispiel 3.1: Die zu

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\1&4&2&3\end{pmatrix}$$

gehörige Permutationsmatrix ist

$$P_\sigma=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Permutationsmatrizen in MATLAB:

```
>> sigma = [ 1 4 2 3 ];
>> P = eye(4); P = P(sigma,:)
P =
   1   0   0   0
   0   0   0   1
   0   1   0   0
   0   0   1   0
```

♦

Lemma 3.1 *Eine $n\times n$-Matrix ist genau dann Permutationsmatrix wenn sie in jeder Zeile und Spalte genau eine Eins und sonst nur Nullen hat.*

BEWEIS: Übung. ■

Die Matrix-Vektor-Multiplikation mit Permutationsmatrizen bewirkt die entsprechende Permutation der Einträge des Vektors:

$$P_\pi v=\begin{pmatrix} e^{\mathsf{T}}_{\pi(1)}\\ \vdots\\ e^{\mathsf{T}}_{\pi(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_{\pi(1)}\\v_{\pi(2)}\\ \vdots\\ v_{\pi(n)}\end{pmatrix}.$$

Setzen wir $\tilde v:=P_\pi v$; es gilt also $\tilde v_i=v_{\pi(i)}$ für $i=1,\dots,n$.

Wenn wir mit einer weiteren Permutationsmatrix P_σ multiplizieren, so erhalten wir

$$P_\sigma P_\pi v=P_\sigma\tilde v=\begin{pmatrix}\tilde v_{\sigma(1)}\\ \tilde v_{\sigma(2)}\\ \vdots\\ \tilde v_{\sigma(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}v_{\pi(\sigma(1))}\\ v_{\pi(\sigma(2))}\\ \vdots\\ v_{\pi(\sigma(n))}\end{pmatrix}=P_{\pi\circ\sigma}v.$$

Da v beliebig ist, muss

$$P_\sigma P_\pi=P_{\pi\circ\sigma} \tag{3.2}$$

gelten. Man beachte die umgekehrte Reihenfolge von π und σ!

Betrachten wir für eine gegebene Permutation $\sigma\in S_n$ die inverse Abbildung $\sigma^{-1}\in S_n$, so gilt wegen (3.2)

$$\sigma^{-1}\circ\sigma=\mathrm{id}=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad P_\sigma P_{\sigma^{-1}}=P_{\sigma^{-1}\circ\sigma}=P_{\mathrm{id}}=I_n.$$

Auf der anderen Seite gilt

$$P_\sigma P_\sigma^{\mathsf{T}}=\begin{pmatrix} e^{\mathsf{T}}_{\sigma(1)}\\ \vdots\\ e^{\mathsf{T}}_{\sigma(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} e_{\sigma(1)} & \cdots & e_{\sigma(n)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} e^{\mathsf{T}}_{\sigma(1)}e_{\sigma(1)} & \cdots & e^{\mathsf{T}}_{\sigma(1)}e_{\sigma(n)}\\ \vdots & & \vdots\\ e^{\mathsf{T}}_{\sigma(n)}e_{\sigma(1)} & \cdots & e^{\mathsf{T}}_{\sigma(n)}e_{\sigma(n)}\end{pmatrix}=I_n.$$

Wegen der Eindeutigkeit der Inversen (siehe Sätze 1.19 und 1.20) erhalten wir

$$P_\sigma^{-1}=P_{\sigma^{-1}}=P_\sigma^T. \tag{3.3}$$

Satz 3.2 *Die $n\times n$-Permutationsmatrizen bilden zusammen mit der Matrixmultiplikation eine Untergruppe von $Gl(n)$.*

BEWEIS: Aus (3.2) folgt Abgeschlossenheit und wegen (3.3) ist die Inverse einer Permutationsmatrix auch wieder Permutationsmatrix. Damit folgt die Aussage, siehe Bemerkungen nach Definition 2.12. ■

Definition 3.3 *Eine* ***Transposition*** *[transposition] ist eine Permutation, die genau zwei Elemente vertauscht:*

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad 1 \le i < j \le n.$$

Die zugehörige Permutationsmatrix wird mit P_{ij} bezeichnet.

Jede Permutation lässt sich als Verkettung von (maximal $n-1$) Transpositionen darstellen; dies werden wir in Kapitel 6 noch ausführlicher behandeln. Multipliziert man P_{ij} von links mit einer Matrix so werden die Zeilen i und j dieser Matrix vertauscht. Multipliziert man P_{ij} von rechts mit einer Matrix so werden die Spalten i und j dieser Matrix vertauscht.

Beispiel 3.2:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P_{13}A = \begin{pmatrix} 7 & 8 & 9 \\ 4 & 5 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad AP_{13} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 6 & 5 & 4 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}.$$

♦

Man überzeugt sich leicht, dass P_{ij} symmetrisch ist, es gilt also nach (3.3),

$$P_{ij} = P_{ij}^{\mathsf{T}} = P_{ij}^{-1}.$$

Elementarmatrix II: $M_i(\lambda)$. Für $\lambda \in K$ definieren wir die $n \times n$-Diagonalmatrix

$$M_i(\lambda) = \mathrm{diag}\,(\underbrace{1,\ldots,1}_{i-1 \text{ Mal}},\lambda,\underbrace{1,\ldots,1}_{n-i \text{ Mal}})$$

Multipliziert man $M_i(\lambda)$ von links an eine Matrix so werden die Einträge in der i-ten Zeile dieser Matrix mit λ multipliziert.

Beispiel 3.3:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad M_2(3)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 12 & 15 & 18 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

♦

Aus der bekannten Regel für die Invertierung von Diagonalmatrizen (siehe Beispiel 1.17) folgt, dass $M_i(\lambda)$ für $\lambda \neq 0$ invertierbar ist, mit

$$M_i(\lambda)^{-1} = M_i(\lambda^{-1}).$$

Elementarmatrix III: $G_{ij}(\lambda)$. Für $n \ge 2$ und $\lambda \in K, 1 \le i < j \le n$, definieren wir die $n \times n$-Matrix

$$G_{ij}(\lambda) = I_n + \lambda e_j e_i^{\mathsf{T}} = \begin{array}{r} \\ \\ \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} & & \overset{i}{\downarrow} & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

Multiplikation von $G_{ij}(\lambda)$ mit einer $n \times p$-Matrix A ergibt

$$G_{ij}(\lambda)A = (I_n + \lambda e_j e_i^{\mathsf{T}})A = A + \lambda e_j e_i^{\mathsf{T}} A = A + \begin{array}{r} \\ j \rightarrow \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \lambda a_{i1} & \cdots & \lambda a_{ip} \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Zu der j-ten Zeile wird also das λ-Fache der i-ten Zeile hinzuaddiert. Analog wird bei der Multiplikation von $G_{ij}(\lambda)^{\mathsf{T}}$ das λ-Fache der j-ten Zeile auf die i-te Zeile addiert:

$$G_{ij}(\lambda)^{\mathsf{T}} A = (I_n + \lambda e_i e_j^{\mathsf{T}})A = A + \lambda e_i e_j^{\mathsf{T}} A.$$

Beispiel 3.4:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \Rightarrow G_{13}(-2)A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 5 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \ G_{13}(-2)^{\mathsf{T}} A = \begin{pmatrix} -13 & -14 & -15 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}.$$

♦

Lemma 3.4 $G_{ij}(\lambda)^{-1} = G_{ij}(-\lambda)$.

BEWEIS:

$$\begin{aligned} G_{ij}(\lambda)G_{ij}(-\lambda) &= (I_n + \lambda e_j e_i^{\mathsf{T}})(I_n - \lambda e_j e_i^{\mathsf{T}}) \\ &= I_n + \lambda e_j e_i^{\mathsf{T}} - \lambda e_j e_i^{\mathsf{T}} - \lambda^2 e_j \underbrace{e_i^{\mathsf{T}} e_j}_{=0} e_i^{\mathsf{T}} = I_n. \end{aligned}$$

■

3.2 Konstruktion der Treppennormalform

Zu einer gegebenen Matrix $A \in K^{m \times n}$ wollen wir nun eine invertierbare Matrix $B \in K^{m \times m}$ konstruieren, so dass BA so einfach wie möglich "aussieht". Die Konstruktion beruht auf dem *Gauß'schen Algorithmus*, welcher vielleicht bereits in der Schule zur Lösung von linearen Gleichungssystemen eingesetzt wurde. Im Unterschied zur üblichen Herleitung werden wir aber die einzelnen Zeilenumformungen des Gauß'schen Algorithmus durch die Multiplikation mit Elementarmatrizen ausdrücken:

I. P_{ij} – Vertauschen der Zeilen i und j.

II. $M_i(\lambda)$ – Multiplikation der i-ten Zeile mit λ.

III. $G_{ij}(\lambda)$ – Addition des λ-Fachen der i-ten Zeile auf die j-te Zeile.

Die Matrix B wird als Matrixprodukt dieser Elementarmatrizen konstruiert werden.

Definition 3.5 *Eine Matrix $C \in K^{m \times n}$ ist in* ***Treppennormalform (TNF)*** *(auch:* ***Zeilenstufenform****, [staircase form] [(reduced) row echelon form]) wenn sie in der Form*

$$C = \left(\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc} 0 & 1 & \star & 0 & \star & 0 & \star & & 0 & \star \\ & & & 1 & \star & 0 & \star & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & & & 1 & \star & & \vdots & \vdots \\ & & & & 0 & & & & 0 & \star \\ & & & & & & 0 & \ddots & 1 & \star \\ & & & & & & & & & \\ & & & & & & & & & 0 \end{array}\right) \tag{3.4}$$

ist. Hierbei ist $\star$ Platzhalter für beliebige Einträge in C.

Formal lässt sich die Form (3.4) wie folgt ausdrücken: Es gibt natürliche Zahlen $j_1, \ldots, j_r \in \mathbb{N}$ mit $1 \leq j_1 < \cdots < j_r \leq n$ und $1 \leq r \leq \min\{m,n\}$, so dass

- $c_{ij} = 0$ für $0 < i \leq m$ und $0 < j < j_1$;
- $c_{ij} = 0$ für $k < i \leq m$ und $j_k \leq j < j_{k+1}$, mit $k = 1, \ldots, r$;
- $c_{ij_k} = 0$ für $1 \leq i < j_k$ und $c_{kj_k} = 1$, mit $k = 1, \ldots, r$.

Beispiel 3.5: Die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ist in TNF mit $r = 3$ und $j_1 = 2, j_2 = 3, j_3 = 5$. ♦

Satz 3.6 *Sei $A \in K^{m \times n}$. Dann gibt es eine invertierbare Matrix $B \in K^{m \times m}$, so dass B Produkt von Elementarmatrizen ist und $C := BA$ in Treppennormalform* (3.4) *ist. Für $m = n$ ist A invertierbar genau dann wenn $C = I_n$ gilt. In diesem Fall ist $A^{-1} = B$.*

BEWEIS: Für $A = 0$ gilt die Aussage mit $B = I_m$ trivialerweise. Sei nun $A \neq 0$ und j_1 der Index der ersten Spalte von A, die nicht aus lauter Nullen besteht. Bezeichne a_{i_1,j_1} das erste Nichtnullelement dieser Spalte; $A^{(1)} := A$ hat also die Form

$$A^{(1)} = \begin{array}{c} \\ \\ i_1 \rightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} & j_1 & \\ & \downarrow & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & \star \\ & & \\ 0 & a^{(1)}_{i_1,j_1} & \star \\ & & \\ 0 & \star & \star \end{pmatrix} \end{array}.$$

Durch Vertauschen bringen wir das sogenannte Pivotelement $a^{(1)}_{i_1,j_1}$ in die erste Zeile und dividieren diese durch $a^{(1)}_{i_1,j_1}$:

$$\tilde{A}^{(1)} := M_1\big(1/a^{(1)}_{i_1,j_1}\big) P_{1,i_1} A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & \star \\ 0 & \tilde{a}^{(1)}_{2,j_1} & \star \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{a}^{(1)}_{m,j_1} & \star \end{array}\right).$$

Jetzt entledigen wir uns der Einträge unterhalb der Eins indem passende Vielfache der ersten Zeile auf die anderen Zeilen hinzuaddiert werden:

$$A^{(2)} := G_{1,m}\big(-\tilde{a}^{(1)}_{m,j_1}\big) \cdots G_{1,2}\big(-\tilde{a}^{(1)}_{2,j_1}\big) \tilde{A}^{(1)} = \left(\begin{array}{c|cc} 0 & 1 & \star \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \hat{A}^{(2)} \\ 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Alle bisher durchgeführten Transformationen werden in der (invertierbaren) Matrix

$$B_1 = G_{1,m}\big(-\tilde{a}^{(1)}_{m,j_1}\big) \cdots G_{1,2}\big(-\tilde{a}^{(1)}_{2,j_1}\big) M_1\big(1/a^{(1)}_{i_1,j_1}\big) P_{1,i_1} A^{(1)}$$

gesammelt.

Ist $\hat{A}^{(2)} \neq 0$ so wird der eben beschriebene Prozess auf $\hat{A}^{(2)}$ angewandt. Bezeichnet j_2 den Index der ersten von Null verschiedenen Spalte innerhalb von $\hat{A}^{(2)}$ und $i_2 \geq 2$ den Index des ersten Nichtnulleintrags in dieser Spalte, so gilt

$$M_2\big(1/a^{(2)}_{i_2,j_2}\big) P_{2,i_2} A^{(2)} = \left(\begin{array}{c|cccc} 0 & 1 & \star & \star & \star \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \star \\ & & & \tilde{a}^{(2)}_{3,j_2} & \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \star \\ & & & \tilde{a}^{(2)}_{m,j_2} & \end{array}\right).$$

Hierbei wurde ausgenutzt, dass die angewandten Transformationen die erste Zeile nicht verändern. Die störenden Nichtnulleinträge unterhalb der 1 verschwinden wieder durch Addition passender Vielfache der zweiten Zeile auf die Zeilen $3, \ldots, m$. Setzen wir also

$$B_2 = G_{1,m}\big(-\tilde{a}^{(2)}_{m,j_2}\big) \cdots G_{1,3}\big(-\tilde{a}^{(2)}_{3,j_2}\big) M_2\big(1/a^{(2)}_{i_2,j_2}\big) P_{2,i_2},$$

so ergibt sich insgesamt

$$A^{(3)} := B_2 B_1 A = \left(\begin{array}{c|cc|cc} 0 & 1 & \star & \star & \star \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 & \star \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{A}^{(3)} \end{array}\right).$$

Der Prozess wird jetzt auf $\hat{A}^{(3)}$ angewandt, danach wieder auf die verbleibende Untermatrix, usw. Dies wird solange wiederholt bis die verbleibende Untermatrix Null ist oder verschwindet. Nach insgesamt $r \leq \min\{m,n\}$ Schritten ergibt sich

$$A^{(r)} := B_r \cdots B_2 B_1 A = \left(\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc|} & 1 & \star & \star & \star & \star & \star & & \star & \star \\ \cline{2-3} 0 & & & 1 & \star & \star & \star & & \vdots & \vdots \\ \cline{4-5} & & 0 & & & 1 & \star & & \vdots & \vdots \\ \cline{6-7} & & & & 0 & & & & \star & \star \\ & & & & & & 0 & \ddots & 1 & \star \\ \cline{9-10} & & & & & & & & & 0 \end{array}\right). \tag{3.5}$$

Per Konstruktion stehen die Einsen an den Stellen

$$(1, j_1),\ (2, j_2),\ \ldots,\ (r, j_r). \tag{3.6}$$

Im Vergleich zur TNF (3.4) stören uns in (3.5) noch die Einträge oberhalb der Einsen wenn $r > 1$. Um diese wegzukriegen, setzen wir $C^{(r)} := A^{(r)}$ und definieren rekursiv für $k = r, r-1, \ldots, 2$:

$$C^{(k-1)} := \tilde{B}_k C^{(k)},$$

mit

$$\tilde{B}_k := \big(G_{1,k}(-c^{(k)}_{1,j_k})\big)^{\mathsf{T}} \big(G_{2,k}(-c^{(k)}_{2,j_k})\big)^{\mathsf{T}} \cdots \big(G_{k-1,k}(-c^{(k)}_{k-1,j_k})\big)^{\mathsf{T}}.$$

Am Schluss erhalten wir, dass $C := C^{(1)}$ in TNF ist. Dies zeigt den ersten Teil der Aussage mit der invertierbaren Matrix

$$B := \tilde{B}_2 \cdots \tilde{B}_r B_r \cdots B_1.$$

Sei nun $m = n$ und $C = BA$ in TNF. Ist A invertierbar, so ist C als Produkt von invertierbaren Matrizen auch invertierbar. Eine invertierbare Matrix darf aber keine Nullspalten oder Nullzeilen haben[11], also muss $C = I_n$ gelten. Ist andererseits $C = I_n$, so gilt $A = B^{-1}$ und damit ist A natürlich invertierbar. ■

Beispiel 3.6: Betrachte

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 4}.$$

Wir wenden die Transformation wie im Beweise von Satz 3.6 an:

$$\begin{aligned}
B_1 :&\quad \overset{M_1(1/2)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \overset{\substack{G_{12}(-2)\\ G_{13}(-2)}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \\
B_2 :&\quad \overset{M_2(-1)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \overset{G_{23}(1)}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\check{B}_3 :&\quad \overset{\substack{G_{23}(-2)^\mathsf{T}\\ G_{13}(-3/2)^\mathsf{T}}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
\check{B}_2 :&\quad \overset{G_{12}(-1/2)^\mathsf{T}}{\Rightarrow} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = C.
\end{aligned}$$

Die Transformationsmatrix B ergibt sich aus dem Produkt der Elementarmatrizen:

$$\begin{aligned}
B &= \check{B}_2 \check{B}_3 B_2 B_1 \\
&= G_{12}(-1/2)^\mathsf{T} G_{13}(-3/2)^\mathsf{T} G_{23}(-2)^\mathsf{T} G_{23}(1) M_2(-1) G_{13}(-2) G_{12}(-2) M_1(1/2) \\
&= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1/2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Man überzeugt sich leicht, dass tatsächlich $BA = C$ gilt. ♦

Die Positionen $(1, j_1)$, $(2, j_2)$, $\ldots$, (r, j_r) der Einsen in der TNF (siehe (3.6)) werden als **Pivotpositionen** bezeichnet.

Aus Satz 3.6 folgt nun (endlich!) der nichttriviale Teil der Aussage von Satz 1.20.

Korollar 3.7 *Sei $A \in K^{n\times n}$.*

(i) Gibt es $X \in K^{n\times n}$ mit $AX = I_n$, so ist A invertierbar.

(ii) Gibt es $X \in K^{n\times n}$ mit $XA = I_n$, so ist A invertierbar.

BEWEIS: (i) Seien $AX = I_n$ und $C = BA$ in TNF mit B invertierbar gemäss Satz 3.6. Dann folgt $BAX = CX = B$. Wäre A nicht invertierbar, dann wäre $C \neq I_n$ und insbesondere die letzte Zeile von C Nullzeile. Demzufolge wäre auch die letzte Zeile von $B = CX$ eine Nullzeile. Dies ist aber ein Widerspruch, da B invertierbar ist.

(ii) folgt aus (i) denn aus $XA = I_n$ folgt $A^\mathsf{T} X^\mathsf{T} = I$ und A ist genau dann invertierbar wenn A^T invertierbar ist. ■

[11] Beweis Übung.

3.3 Äquivalenz von Matrizen und Rang einer Matrix

In der TNF wurden nur Zeilentransformationen (Transformationsmatrizen von links) verwendet. Es stellt sich die naheliegende Frage inwiefern sich die Form weiter vereinfacht wenn auch Spaltentransformationen (Transformationsmatrizen von rechts) erlaubt sind.

Definition 3.8 *Zwei Matrizen $A, B \in K^{m\times n}$ sind* ***äquivalent*** *zueinander, wenn es invertierbare Matrizen $Q \in K^{m\times m}$ und $Z \in K^{n\times n}$ mit $A = QBZ$ gibt.*

Man sieht leicht, dass Äquivalenz von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $K^{m\times n}$ erzeugt.

Reflexivität: A ist äquivalent zu sich selbst, mit $Q = I_m$, $Z = I_n$.

Symmetrie: Aus $A = QBZ$ folgt $B = Q^{-1}AZ^{-1}$.

Transitivität: Aus $A = Q_1 B Z_1$ und $B = Q_2 C Z_2$ folgt $A = (Q_1 Q_2) C (Z_2 Z_1)$.

Die zu A gehörige Äquivalenzklasse ist

$$[A] = \{QAZ : Q \in K^{m\times m}, Z \in K^{n\times n} \text{ invertierbar}\}.$$

Satz 3.9 *(i) Habe $A \in K^{m\times n}$ die TNF (3.4) gemäss Satz 3.6. Dann ist A äquivalent zu*

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

wobei r die Anzahl der Pivotpositionen in der TNF ist.

(ii) Zwei Matrizen $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$ und $\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{m\times n}$ sind genau dann äquivalent, wenn $r = s$.

BEWEIS: (i). Wegen Satz 3.6 gibt es eine invertierbare Matrix Q so dass $C = QA$ in TNF ist. Definiere eine Permutation der Form

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & r & r+1 & \cdots & n \\ j_1 & j_2 & \cdots & j_r & \star & \cdots & \star \end{pmatrix}. \tag{3.7}$$

Die entsprechende Permutationsmatrix P_σ sortiert die Spalten von A mit den Pivotelementen nach vorn[12]:

$$AP_\sigma^\mathsf{T} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \star \\ 0 & 0 \end{array}\right) =: \left(\begin{array}{c|c} I_r & X \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Die Matrix $Z_0 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & -X \\ 0 & I_{n-r} \end{array}\right)$ ist invertierbar, mit der Inversen $Z_0^{-1} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & X \\ 0 & I_{n-r} \end{array}\right)$. Wir erhalten

$$QAP_\sigma^\mathsf{T} Z_0 = \left(\begin{array}{c|c} I_r & X \\ 0 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{c|c} I_r & -X \\ 0 & 0 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right).$$

Mit $Z = P_\sigma^\mathsf{T} Z_0$ folgt die Behauptung von Teil (i).

[12] Um sich dies klar zu machen, hilft es die Transponierte $(AP_\sigma^\mathsf{T})^\mathsf{T} = P_\sigma A^\mathsf{T}$ zu betrachten.

(ii). Es ist klar, dass die beiden Matrizen für $s = r$ äquivalent sind. Für die andere Richtung erfolgt der Beweis per Widerspruch. Sei $r \neq s$, o.B.d.A sei $r < s$, und nehmen wir an es gibt invertierbare Matrizen Q, Z mit

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & I_{s-r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Q_{11} & Q_{12} & Q_{13} \\ Q_{21} & Q_{22} & Q_{23} \\ Q_{31} & Q_{32} & Q_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_r & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} Q_{11}Z_{11} & Q_{11}Z_{12} & Q_{11}Z_{13} \\ Q_{21}Z_{11} & Q_{21}Z_{12} & Q_{21}Z_{13} \\ Q_{31}Z_{11} & Q_{31}Z_{12} & Q_{31}Z_{13} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

wobei Q und Z entsprechend partitioniert wurden. Insbesondere folgt daraus die Beziehung $Q_{11}Z_{11} = I_r$ und damit nach Korollar 3.7 die Invertierbarkeit von Q_{11}. Multiplizieren wir nun Q_{11}^{-1} von links auf die Beziehung $Q_{11}Z_{12} = 0$, so folgt $Z_{12} = 0$. Dies steht aber im Widerspruch zu der Beziehung $Q_{21}Z_{12} = I_{s-r}$. ■

Bemerkung 3.10 *In der "Sprache der Äquivalenzklassen" bedeutet Satz 3.9:*

$$K^{m\times n} = \bigcup_{r=0}^{\min\{m,n\}} \left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

mit

$$\left[\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] \cap \left[\begin{pmatrix} I_s & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right] = \emptyset \quad \text{für } r \neq s.$$

Als Nebenprodukt von Satz 3.9 erhalten wir ausserdem, dass jede TNF einer Matrix die gleiche Anzahl r der Pivotpositionen hat.[13]

Korollar 3.11 *Seien $A \in K^{m\times n}$ und $Q_1, Q_2 \in K^{m\times m}$ invertierbare Matrizen, so dass Q_1A und Q_2A beide in TNF sind. Dann ist die Anzahl der Pivotpositionen in Q_1A und Q_2A gleich.*

BEWEIS: Nach Satz 3.9 (i) sind Q_1A bzw. Q_2A jeweils äquivalent zu $E_1 = \begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ bzw. $E_2 = \begin{pmatrix} I_{r_2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Da Q_1A und Q_2A selbst zueinander äquivalent sind, folgt aus Transitivität dass auch E_1 und E_2 zueinander äquivalent sind. Also folgt wegen Satz 3.9 (ii) $r_1 = r_2$. ■

Definition 3.12 *Die Anzahl r der Pivotpositionen einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ wird als* ***Rang*** *[rank] von A bezeichnet. Wir schreiben $r = \operatorname{Rang}(A)$.*

Der nächste Satz enthält zwei grundlegende Eigenschaften des Rangs.

Satz 3.13 *Für $A \in K^{m\times n}$ gelten die folgenden Aussagen:*

(i) Sind $Q \in K^{m\times m}$ und $Z \in K^{n\times n}$ invertierbar, so gilt

$$\operatorname{Rang}(QAZ) = \operatorname{Rang}(A).$$

[13] Man kann sogar zeigen, dass die gesamte TNF einer gegebenen Matrix A eindeutig bestimmt ist. Der Beweis ist aber etwas technisch und wird im folgenden nicht benötigt.

(ii) Ist $A = BC$ mit $B \in K^{m\times s}, C \in K^{s\times n}$, so gilt

$$\operatorname{Rang}(A) \le \operatorname{Rang}(B), \qquad \operatorname{Rang}(A) \le \operatorname{Rang}(C).$$

(iii) $\operatorname{Rang}(A^\mathsf{T}) = \operatorname{Rang}(A)$.

BEWEIS: (i). Aus Satz 3.9 folgt direkt, dass zueinander äquivalente Matrizen den gleichen Rang haben.

(iii). Nach Satz 3.9 (i) gibt es invertierbare Matrizen Q, Z mit $QAZ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Durch Transponieren erhält man

$$Z^\mathsf{T} A^\mathsf{T} Q^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Der Rang der Matrix auf der rechten Seite ist offenbar $r = \operatorname{Rang}(A)$ und nach (i) hat damit auch A^T Rang r.

(ii) Wir beweisen zunächst $\operatorname{Rang}(A) \le \operatorname{Rang}(B)$. Sei Q invertierbare Matrix mit QB in TNF. Dann sind die letzten $m - \operatorname{Rang}(B)$ Zeilen von QB und damit auch die letzten $m - \operatorname{Rang}(B)$ Zeilen von $QA = QBC$ Nullzeilen. Eine Matrix mit $m - \operatorname{Rang}(B)$ Nullzeilen kann aber nicht mehr als $\operatorname{Rang}(B)$ Pivotelemente haben. Zusammen mit (i) ergibt sich die Behauptung: $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(QA) \le \operatorname{Rang}(B)$.

Die Aussage $\operatorname{Rang}(A) \le \operatorname{Rang}(C)$ folgt nach Transponieren, $A^\mathsf{T} = C^\mathsf{T}B^\mathsf{T}$, zusammen mit (iii) aus der ersten Ungleichung: $\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(A^\mathsf{T}) \le \operatorname{Rang}(C^\mathsf{T}) = \operatorname{Rang}(C)$. ■

3.4 Anwendung auf lineare Gleichungssysteme

Die TNF und der Rang einer Matrix eignen sich vorzüglich, um die Lösbarkeit und Lösungsmengen von linearen Gleichungssystemen (LGS) zu charakterisieren. Im folgenden betrachten wir ein LGS über $(K, +, \cdot)$ mit m Gleichungen in n Unbekannten:

$$\begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & +\cdots+ & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & +\cdots+ & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & +\cdots+ & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{array}$$

Wie gehabt, definiert man $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^{m\times 1}$ mit den Einträgen a_{ij} bzw. b_i und erhält die kompakte Schreibweise für das LGS:

$$Ax = b. \tag{3.8}$$

Ist $b = 0$, so bezeichnet man das LGS (3.8) als **homogen** [*homogeneous*] und anderenfalls als **inhomogen** [*inhomogeneous*]. Jedes $x \in K^n$, dass (3.8) erfüllt, wird als **Lösung** [*solution*] des LGS bezeichnet. Die Menge aller Lösungen bildet die **Lösungsmenge**

$$L(A,b) = \{x \in K^n : Ax = b\}.$$

Das folgende Lemma liefert eine nützliche Charakterisierung von Lösungsmengen.

Lemma 3.14 *Sei $A \in K^{m\times n}, b \in K^n$ und $x_p \in L(A,b)$. Dann gilt*

$$L(A,b) = x_p + L(A,0) := \{x_p + x_h : \ x_h \in L(A,0)\}.$$

BEWEIS: (a) $x_p + L(A,0) \in L(A,b)$: Sei $x_h \in L(A,0)$, also $x_p + x_h \in x_p + L(A,0)$. Dann folgt

$$A(x_p + x_h) = Ax_p + Ax_h = b + 0 \quad \Rightarrow \quad x_p + x_h \in L(A,b).$$

(b) $L(A,b) \subset x_p + L(A,0)$: Für $x \in L(A,b)$ folgt

$$A(x - x_p) = Ax - Ax_b = b - b = 0 \quad \Rightarrow \quad x - x_p \in L(A,0),$$

also $x = x_p + (x - x_p) \in x_p + L(A,0)$. ■

In Worten sagt Lemma 3.14 folgendes aus: Um die Lösungsmenge eines inhomogenen LGS zu bestimmen, addiert man zu (irgendeiner) partikulären Lösung die Lösungsmenge des entsprechenden homogenen LGS.

Sei $Q \in K^{m\times m}$ invertierbar. Durch Multiplikation mit Q bzw. Q^{-1} erhalten wir

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QAx = Qb,$$

also

$$L(A,b) = L(QA,Qb). \tag{3.9}$$

Wir können insbesondere A durch QA in TNF ersetzen *ohne* dass sich die Lösungsmenge ändert:

$$\left(\begin{array}{c|cc|cc|cc|c|cc} 0 & 1 & \star & 0 & \star & 0 & \star & & 0 & \star \\ & & & 1 & \star & 0 & \star & & \vdots & \vdots \\ & 0 & & & & 1 & \star & & \vdots & \vdots \\ & & & 0 & & & & \ddots & 0 & \star \\ & & & & & 0 & & & 1 & \star \\ & & & & & & & & 0 & \end{array}\right) x = \tilde{b},$$

mit $\tilde{b} = Qb$. Diese Form des LGS ist noch ein wenig unbequem und wir konstruieren eine Permutationsmatrix P wie im Beweis von Satz 3.9 (siehe inbesondere (3.7)), so dass

$$\tilde{A} := QAP^{\mathsf{T}} = \left(\begin{array}{c|c} I_r & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$$

Ersetzt man A durch $\tilde{A}$ so ändert sich die Lösungsmenge:

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad QAP^{\mathsf{T}}Px = Qb \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

wobei $\tilde{x} = Px$. Allerdings lassen sich die Lösungen von $Ax = b$ und $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ durch Vertauschen der Einträge einfach ineinander überführen. Durch enstsprechendes Partitionieren von $\tilde{x}$ und $\tilde{b}$ lässt sich $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ wie folgt schreiben:

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & \tilde{A}_{12} \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right) \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \hline \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ \hline \tilde{b}_2 \end{pmatrix}, \quad \tilde{x}_1 \in K^r, \tilde{x}_2 \in K^{n-r}, \quad \tilde{b}_1 \in K^r, \tilde{b}_2 \in K^{m-r}. \tag{3.10}$$

Der untere Teil der Gleichung $0 = 0 \cdot \tilde{x}_2 = \tilde{b}_2$ ist offenbar nicht lösbar wenn $\tilde{b}_2 \neq 0$ gilt. Nimmt man andererseits $\tilde{b}_2 = 0$ an, so sieht man sofort, dass

$$\tilde{x}_p = \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 \\ 0 \end{pmatrix} \in L(\tilde{A},\tilde{b}) \neq \emptyset. \tag{3.11}$$

Also ist $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ genau dann lösbar wenn $\tilde{b}_2 = 0$ gilt. Diese Forderung lässt sich noch eleganter ausdrücken.

Lemma 3.15 *Sei $A \in K^{m\times n}$ und $b \in K^{m\times 1}$. Dann gilt $L(A,b) \neq \emptyset$ genau dann, wenn*

$$\operatorname{Rang}\left(\left(A \mid b \right)\right) = \operatorname{Rang}(A).$$

BEWEIS: Wir zeigen die Aussage zunächst für die reduzierte Gleichung (3.10):

$$\left(\tilde{A} \mid \tilde{b} \right) = \left(\begin{array}{ccc} I_r & \tilde{A}_{12} & \tilde{b}_1 \\ \hline 0 & 0 & \tilde{b}_2 \end{array}\right).$$

Ist $\tilde{b}_2 = 0$ dann ist der Rang dieser Matrix $r = \operatorname{Rang}(\tilde{A})$. Ist dagegen $\tilde{b}_2 \neq 0$ so würde die Konstruktion der TNF einen weiteren Schritt durchführen und ein weiteres Pivotelement produzieren, also ist dann der Rang $r + 1 \neq \operatorname{Rang}(\tilde{A})$. Aufgrund der obigen Überlegungen gilt aber $\tilde{b}_2 = 0$ genau dann wenn $L(A,b) \neq \emptyset$. Damit gilt die Behauptung für (3.10).

Für das ursprüngliche LGS $Ax = b$ erhält man die Aussage mittels Satz 3.13 (i):

$$\operatorname{Rang}(A) = \operatorname{Rang}(QA) = \operatorname{Rang}(\tilde{A}),$$

$$\operatorname{Rang}\left(\left(A \mid b \right)\right) = \operatorname{Rang}\left(Q\left(A \mid b \right)\right) \operatorname{Rang}\left(\left(\tilde{A} \mid \tilde{b} \right)\right).$$

■

Die in Lemma 3.15 konstruierte Matrix $\left(A \mid b \right) \in K^{m\times(n+1)}$ heisst **erweiterte Koeffizientenmatrix**.

Um die Lösungsmenge von $\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b}$ zu charakterisieren, verwenden wir Lemma 3.14. Ein partikuläre Lösung $\tilde{x}$ ist bereits in (3.11) angegeben. Für den homogenen Fall setzen wir $\tilde{b}_1 = 0$ und erhalten

$$L(\tilde{A},0) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{x}_{h1} \\ \tilde{x}_{h2} \end{pmatrix} : \ \tilde{x}_{h2} \in K^{n-r}, \tilde{x}_{h1} = -\tilde{A}_{12}\tilde{x}_{h2} \right\},$$

also

$$L(\tilde{A},\tilde{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} \tilde{b}_1 - \tilde{A}_{12}\tilde{x}_{h2} \\ \tilde{x}_{h2} \end{pmatrix} : \ \tilde{x}_{h2} \in K^{n-r} \right\}.$$

Da $\tilde{x}_{h2}$ frei wählbar ist, gibt es genau eine Lösung wenn $n = r$ und mehr als eine Lösung wenn $n > r$ gilt. Da $L(A,b) = P^{\mathsf{T}}L(\tilde{A},\tilde{b})$, überträgt sich diese Aussage auf Lösungen von $Ax = b$.

Zusammenfassung: Lösbarkeit des LGS $Ax = b$ mit $A \in K^{m\times n}, b \in K^{m\times 1}$:

1. Ist $\operatorname{Rang}\left(\left(A \mid b \right)\right) > \operatorname{Rang}(A)$, so gibt es keine Lösung: $L(A,b) \neq \emptyset$.
2. Ist $\operatorname{Rang}\left(\left(A \mid b \right)\right) = \operatorname{Rang}(A) = n$, so gibt es genau eine Lösung.
3. Ist $\operatorname{Rang}\left(\left(A \mid b \right)\right) = \operatorname{Rang}(A) < n$, so gibt es mehr als eine Lösung.

Wieviele Lösungen es im Fall 3 genau gibt, hängt vom Körper ab. Gibt es unendlich viele Elemente im Körper K (z.B. $\mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$), so gibt es auch unendlich viele Lösungen. Wir werden die Struktur von Lösungsmengen noch genauer in einem allgemeineren Rahmen in Kapitel 4 studieren.

Beispiel 3.7: Obige Überlegungen lassen sich auch ganz praktisch einsetzen, um die Lösungsmenge eines LGS zu bestimmen. Dabei gibt es noch einen Trick, der viel Rechenarbeit spart. Um $\tilde{b} = Qb$ zu bestimmen, muss die Transformationsmatrix Q, die A auf TNF bringt, nicht explizit ausgerechnet werden. Stattdessen wendet man die einzelnen Transformationen während der Reduktion auf TNF gleichzeitig auf b an. Seien z.B. $K = \mathbb{Q}$ und

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die TNF erhalten wir ähnlich wie in Beispiel 3.6:

$$\begin{aligned}
\left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right) &\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/2 & 3/2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
&\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 1/2 & 0 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\
&= \left(\begin{array}{c|c} QA & Qb \end{array} \right).
\end{aligned}$$

Zum Schluss müssen noch die Spalten richtig sortiert werden:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{array}{c|c} \tilde{A} & \tilde{b} \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c} QAP^{\mathsf{T}} & Qb \end{array} \right) = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Schlussendlich ergibt sich

$$L(\tilde{A}, \tilde{b}) = \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ \tilde{x}_4 \end{pmatrix} : \tilde{x}_4 \in \mathbb{Q} \right\} \quad \Rightarrow \quad L(A, b) = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} : x_1 \in \mathbb{Q} \right\}.$$

♦

3.5 Die LR-Zerlegung

Die TNF in einer Matrix ist für theoretische Zwecke hervorragend geeignet und wird uns im Verlauf der Vorlesung noch weitere wertvolle Dienste leisten. In der Praxis, d.h. in numerischen Algorithmen, wird sie hingegen kaum eingesetzt, um z.B. den Rang einer Matrix zu bestimmen oder die Lösung eines LGS zu berechnen. Zum Einen liegt dies daran, dass die Entscheidung, ob gewisse Einträge Null oder nicht Null sind, numerisch wenig sinnvoll ist: Durch Rundungsfehler werden aus Berechnungen hervorgegangene Einträge faktisch nie Null, selbst wenn sie eigentlich theoretisch Null sein sollten. Zum Anderen ist die Konstruktion im Beweis von Satz 3.6 numerisch instabil; dies wird in nahezu jedem einführenden Buch der numerischen Mathematik näher erläutert.

In der Praxis verwendet man auf dem Gauß'schen Algorithmus beruhende Verfahren daher oft nur wenn $m = n$ und $A \in K^{n\times n}$ invertierbar ist. Davon wollen wir im folgenden ausgehen. Die sogenannte **LR-Zerlegung** [*LU decomposition*] erhält man, indem die Konstruktion im Beweis von Satz 3.6 nur zur Hälfte durchgeführt wird, nicht durch die Pivotelemente geteilt wird und die Elementarmatrizen geschickt zusammengefasst werden.

Satz 3.16 *Sei $A \in K^{n\times n}$ invertierbar. Dann gibt es eine Permutationsmatrix $P \in K^{n\times n}$, eine untere Dreiecksmatrix $L \in K^{n\times n}$ (mit Einsen auf der Diagonalen) und eine obere Dreiecksmatrix $R \in K^{n\times n}$, so dass*

$$PA = LR. \tag{3.12}$$

BEWEIS: Wir geben lediglich eine Beweisskizze an; die Vorgehensweise ist dem ersten Teil des Beweises von Satz 3.6 recht ähnlich. Sei $A^{(1)} := A$. Wegen Invertierbarkeit kann die erste Spalte von $A^{(1)}$ nicht Null sein und somit gibt es i_1 mit $a^{(1)}_{i_1,1} \neq 0$.[14] Dann haben wir

$$\tilde{A}^{(1)} = P_{1,i_1} A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{a}^{(1)}_{11} & \star \\ \hline \tilde{a}^{(1)}_{21} & \star \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{a}^{(1)}_{n1} & \star \end{array} \right), \quad \tilde{a}^{(1)}_{11} \neq 0.$$

Setze $\ell_{i1} = \tilde{a}^{(1)}_{i1} / \tilde{a}^{(1)}_{11}$ für $i = 2, \dots, n$ und

$$L_1 = G_{1n}(-\ell_{n1}) \cdots G_{13}(-\ell_{31}) G_{12}(-\ell_{21}) = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ -\ell_{21} & 1 & & \\ \vdots & & \ddots & \\ -\ell_{n1} & & & 1 \end{pmatrix}.$$

Per Konstruktion gilt

$$A^{(2)} := L_1 P_{1,i_1} A^{(1)} = \left(\begin{array}{c|c} \tilde{a}^{(1)}_{11} & \star \\ \hline 0 & \hat{A}^{(2)} \end{array} \right).$$

Dieser Prozess wird für $\hat{A}^{(2)}$ rekursiv solange wiederholt bis man bei der letzten Spalte ankommt. Am Ende steht die Zerlegung

$$L_{n-1} P_{n-1,i_{n-1}} \cdots L_2 P_{2,i_2} L_1 P_{1,i_1} A = \begin{pmatrix} \tilde{a}^{(1)}_{11} & \star & \cdots & \star \\ & \tilde{a}^{(2)}_{22} & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ & & & \tilde{a}^{(n)}_{nn} \end{pmatrix} =: R. \tag{3.13}$$

für gewisse i_k mit $i_k \geq k$ und

$$L_k = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{k-1} & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -\ell_{k+1,k} & \\ & \vdots & I_{n-k} \\ & -\ell_{n,k} & \end{array} \right), \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Uns stören noch die Permutationsmatrizen zwischen den L-Faktoren. Glücklicherweise gilt für $j = 1, \dots, k-1$

$$P_{k,j_k} \left(\begin{array}{c|c|c} I_{j-1} & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -\ell_{j+1,j} & \\ & \vdots & I_{n-j} \\ & -\ell_{n,j} & \end{array} \right) = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{j-1} & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -\check{\ell}_{j+1,j} & \\ & \vdots & I_{n-j} \\ & -\check{\ell}_{n,j} & \end{array} \right) P_{k,j_k}$$

[14] In der Numerik wählt man i_1 so, dass $a^{(1)}_{i_1,1}$ der betragsgrösste Eintrag in der ersten Spalte ist. Dies vermeidet, dass man mit potentiell sehr kleinen Einträgen teilen muss, was zu sehr grossen Einträgen in den Faktoren führen kann und numerisch ungünstig ist.

wobei $\breve{\ell}_{j+1,j},\dots,\breve{\ell}_{n,j}$ einfach eine passende Permutation von $\ell_{j+1,j},\dots,\ell_{n,j}$ ist. (Am besten einmal am Beispiel überlegen.) So kann man die Permutationsmatrizen in (3.13) sukzessive durch die L-Faktoren nach rechts an A ranschieben und erhält

$$\tilde{L}_{n-1}\cdots\tilde{L}_2\tilde{L}_1 P_{n-1,i_{n-1}}\cdots P_{2,i_2}P_{1,i_1}A = R, \tag{3.14}$$

mit gewissen

$$\tilde{L}_k = \left(\begin{array}{c|c|c} I_{k-1} & & \\ \hline & 1 & \\ \hline & -\tilde{\ell}_{k+1,k} & \\ & \vdots & I_{n-k} \\ & -\tilde{\ell}_{n,k} & \end{array}\right).$$

Wir setzen nun $P := P_{n-1,i_{n-1}}\cdots P_{2,i_2}P_{1,i_1}$ und

$$L := \tilde{L}_1^{-1}\tilde{L}_2^{-1}\cdots\tilde{L}_{n-1}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ \tilde{\ell}_{21} & 1 & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ \tilde{\ell}_{n1} & \cdots & \tilde{\ell}_{n,n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

(Beweis der letzten Gleichheit durch Nachrechnen.) Dann folgt aus (3.14) die Behauptung. ■

Beispiel 3.8: Sei

$$A^{(1)} = A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ -5 & 6 & -7 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Die beiden Schritt im Beweis von Satz 3.16 entsprechen

$$A^{(2)} := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \end{pmatrix} = L_1 A^{(1)}, \quad \text{mit} \quad L_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1 & 0 \\ -3/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^{(3)} := \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix} = L_2 A^{(2)}, \quad \text{mit} \quad L_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Insgesamt haben wir

$$A = LR, \quad \text{mit} \quad L = L_1^{-1}L_2^{-1}L_3^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}.$$

♦

Mit einer LR-Zerlegung $PA = LR$ kann die Lösung eines LGS wesentlich vereinfacht werden. Da P, L, R invertierbar sind, gilt

$$Ax = b \quad \Leftrightarrow \quad PAx = Pb \quad \Leftrightarrow \quad LRx = Pb \quad \Leftrightarrow \quad x = R^{-1}L^{-1}Pb.$$

Dies rechtfertigt das folgende Vorgehen:

1. Berechne $\tilde{b} = Pb$.
2. Löse das LGS $Lc = \tilde{b}$. (Vorwärtseinsetzen)

3. Löse das LGS $Rx = c$. (Rückwärtseinsetzen)

LGS mit unteren (oder oberen) Dreiecksmatrizen lassen sich einfach lösen indem man die Einträge des Lösungsvektors sukzessive von oben nach unten (von unten nach oben) bestimmt.

Beispiel 3.9: Wir setzen Beispiel 3.8 fort und betrachten die Lösung von $Ax = b$ für $b = \left(6,-7,9\right)^{\mathsf{T}}$ mit Hilfe der berechneten LR-Zerlegung $A = LR$.

$$Lc = b: \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5/2 & 1 & 0 \\ 3/2 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \\ 9 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -40 \end{pmatrix},$$

$$Rx = c: \quad \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -20 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 8 \\ -40 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

♦

Kapitel 4

Vektorräume

In diesem Kapitel werden wir die grundlegende algebraische Struktur der linearen Algebra behandeln: die Struktur eines Vektorraums.

4.1 Definitionen und Eigenschaften

Im folgenden ist K immer Körper mit der entsprechenden Addition und Multiplikation.

Definition 4.1 *Ein* ***Vektorraum*** *(auch:* ***linearer Raum****) [vector space, linear space] über K ist eine Menge V mit zwei Verknüpfungen*

$$\begin{aligned} + &: V \times V \to V, \qquad (v,w) \mapsto v+w, \\ \cdot &: K \times V \to V, \qquad (\alpha, v) \mapsto \alpha \cdot v, \end{aligned} \tag{4.1}$$

Addition *und* ***Skalarmultiplikation*** *genannt, für die folgende Regeln erfüllt sind:*

(1) $v+w = w+v, \quad \forall v,w \in V.$ *(Kommutativität+)*

(2) $u+(v+w) = (u+v)+w, \quad \forall u,v,w \in V.$ *(Assoziativität+)*

(3) Es gibt $0_V \in V$ mit $0_V + v = v$ für alle $v \in V$. *(Nullelement in V)*

(4) Zu jedem $v \in V$ gibt es $-v \in V$ mit $v+(-v) = 0_V$. *(Inverses+)*

(5) $\alpha \cdot (\beta \cdot v) = (\alpha\beta) \cdot v, \quad \forall \alpha, \beta \in K, v \in V.$ *(Kompatibilität·)*

(6) $1 \cdot v = v, \quad \forall v \in V.$ *(Neutralität 1)*

(7) $(\alpha+\beta) \cdot v = (\alpha \cdot v) + (\beta \cdot v), \quad \forall \alpha, \beta \in K, v \in V.$ *(Distributivität I)*

(8) $\alpha \cdot (v+w) = (\alpha \cdot v) + (\alpha \cdot w), \quad \forall \alpha \in K, v,w \in V.$ *(Distributivität II)*

Einige Bemerkungen:

- In Definition 4.1 werden für die Addition/Multiplikation des Körpers die gleichen Symbole $+/\cdot$ wie für die Addition/Multiplikation des Vektorraums verwendet. Welche Verknüpfung gemeint ist ergibt sich aus dem Kontext. Bei der Skalarmultiplikation spart schreibt man oft kürzer: $\alpha v = \alpha \cdot v$. Wegen der Kompatibilität kann man die

  Klammern bei wiederholter Skalarmultiplikation weglassen: $\alpha\beta v = \alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v$. Mit der Vereinbarung, dass Skalarmultiplikation stärker bindet als Addition, erspart man sich weitere Klammern: $\alpha v + \beta w = (\alpha v) + (\beta w)$.
- Wieder der Hinweis, dass die Abgeschlossenheit der beiden Verknüpfungen eine wichtige Eigenschaft ist und in (4.1) "versteckt" ist.
- (1)–(4) geht auch kürzer: $(V,+)$ ist kommutative Gruppe.
- Wie gewohnt schreiben wir $v - w := v + (-w)$.
- Die Elemente eines Vektorraums werden als Vektoren bezeichnet.[15]

Beispiele für Vektorräume

Spaltenvektoren. Der Prototyp eines Vektorraums ist die Menge der Spaltenvektoren $K^{n\times 1}$ mit der gewöhnlichen (Matrix-)Addition und skalaren Multiplikation. Wir werden bald – in Abschnitt 5.2 – sehen, dass sich viele andere Vektorräume auf diesen Vektorraum zurückführen lassen.

Matrizen. Die Menge $K^{m\times n}$ der $m \times n$-Matrizen über K mit der gewöhnlichen Matrixaddition und skalaren Multiplikation bildet einen Vektorraum.

Polynome. Ein **Polynom** über K in einer Unbekannten t hat die Form

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t^n, \quad \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K, \tag{4.2}$$

siehe Seite 37. Der **Grad** *[degree]* eines Polynoms ist die grösste Zahl $k \in \mathbb{N}_0$, für die der Koeffizient α_k nicht Null ist. Der Grad wird mit $\deg(p)$ bezeichnet. Per Vereinbarung hat das Nullpolynom $p = 0$ den Grad 0.

Wir betrachten nun die Menge der Polynome vom Grad höchstens n:

$$K_n[t] := \big\{ p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n : \ \alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \big\}, \tag{4.3}$$

Es leicht einzusehen, dass $K_n[t]$ unter der übliche Polynomaddition abgeschlossen ist und eine kommutative Gruppe bildet. Als Skalarmultiplikation definieren wir für $p \in K_n[t]$:

$$\beta \cdot p := \beta\alpha_0 + \beta\alpha_1 t + \beta\alpha_2 t^2 + \cdots + \beta\alpha_n t^n.$$

Die Regeln (5)–(8) folgen sofort aus den entsprechenden Regeln, die im Körper K gelten. Damit bildet $(K_n[t], +, \cdot)$ einen Vektorraum über K.

Auf der Menge der Polynome kann man also sowohl die Struktur eines Ringes (siehe Seite 37) als auch die Struktur eines Vektorraums definieren. Man beachte, dass die Addition in beiden Fällen zwar gleich, die Multiplikation aber grundverschieden ist.

Zahlenfolgen. Seien $v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $v_n \in K$ und $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $w_n \in K$ Zahlenfolgen. Zusammen mit den Verknüpfungen

$$v + w := \{v_n + w_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha \cdot v := \{\alpha v_n\}_{n=1}^{\infty}, \quad \alpha \in K,$$

bildet die Menge aller Zahlenfolgen einen Vektorraum.

[15] Nicht zu verwechseln mit den bereits kennengelernten *Spalten*vektoren und *Zeilen*vektoren, die lediglich einen Spezialfall darstellen.

Abbildungen. Seien X nichtleere Menge und $\mathsf{Abb}(X,K)$ die bereits in Abschnitt 2.2 betrachtete Menge aller Abbildungen von X nach K. Zusammen mit den Verknüpfungen

$$(f+g)(x) := f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x) := \alpha f(x), \quad f,g \in \mathsf{Abb}(X,K),\ \alpha \in K,$$

bildet $\mathsf{Abb}(X,K)$ einen Vektorraum über K.

Wie schon bei Ringen gilt es zunächst aus Definition 4.1 einige, für alle obigen Beispiele vollkommen trivial erscheinende Folgerungen abzuleiten.

Lemma 4.2 *Sei $(V,+,\cdot)$ Vektorraum. Dann gelten die folgenden Aussagen.*

(i) $0 \cdot v = 0_V$ *für alle* $v \in V$*;*

(ii) $\alpha \cdot 0_V = 0_V$ *für alle* $\alpha \in K$*;*

(iii) $(-1) \cdot v = -v$ *für alle* $v \in V$*;*

(iv) $-(\alpha \cdot v) = (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot (-v)$ *für alle* $\alpha \in K$, $v \in V$.

Bevor wir zum Beweis kommen, noch einmal (i) und (iii) in Worten: (i) Skalarmultiplikation mit dem Nullelement aus dem Körper mit irgendeinem Element aus dem Vektorraum ergibt das Nullelement des Vektorraums. (iii) Skalarmultiplikation mit dem additiven Inversen des Einselements ergibt das additive Inverse des Vektors.
BEWEIS: (i) $0_V = 0 \cdot v - (0 \cdot v) = (0+0) \cdot v - (0 \cdot v) = 0 \cdot v + 0 \cdot v - (0 \cdot v) = 0 \cdot v$.
(ii) $0_V = \alpha \cdot 0_V - \alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot (0_V + 0_V) - \alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot 0_V + \alpha \cdot 0_V - \alpha \cdot 0_V = \alpha \cdot 0_V$.
(iii) $v + (-1) \cdot v = 1 \cdot v + (-1) \cdot v = (1-1) \cdot v = 0 \cdot v = 0$.
(iv) $(-\alpha) \cdot v = (-1) \cdot (\alpha \cdot v) = -(\alpha \cdot v)$. $\quad (-\alpha) \cdot v = \alpha \cdot ((-1) \cdot v) = \alpha \cdot (-v)$. ■

Definition 4.3 *Sei $(V,+,\cdot)$ Vektorraum und $U \subset V$. Dann heisst $(U,+,\cdot)$* ***Unterraum*** *(auch:* ***Untervektorraum***, ***Teilraum****) [subspace] von $(V,+,\cdot)$ wenn $(U,+,\cdot)$ selbst Vektorraum ist.*

Um uns Schreibarbeit zu ersparen, schreiben wir im folgenden immer V statt $(V,+,\cdot)$ wenn die beiden Verknüpfungen klar sind. Wie schon bei Untergruppen und Unterringen vererben sich die meisten Eigenschaften von V automatisch auf U und brauchen nicht zu überprüft werden.

Lemma 4.4 *Sei V Vektorraum und $U \subset V$ nicht leer. U ist genau dann Unterraum wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $v + w \in U$ *für alle* $v, w \in U$*;*

(ii) $\alpha v \in U$ *für alle* $\alpha \in K$, $v \in U$.

BEWEIS: Übung. ■

In der Praxis lohnt es sich oft zunächst einmal zu überprüfen, ob 0_V in U enthalten ist. Gleichzeitig überprüft man damit die erste Forderung von Lemma 4.4: U ist nicht leer wenn $0_V \in U$. Tatsächlich ist $\{0_V\}$ selbst immer Unterraum von V. Auch ist V Unterraum seiner selbst. Natürlich liegen die interessanten Fälle zwischen diesen beiden Extremen.

Beispiele für Unterräume

Lösungsmengen homogener Gleichungssysteme. Sei $A \in K^{m \times n}$. Aus $Ax = 0, Ay = 0$ folgen $A(x+y) = 0$ und $A(\alpha x) = 0$. Da $0 \in L(A,0)$ gilt $L(A,0) \neq \emptyset$ und damit ist $L(A,0)$ Unterraum von $K^{n \times 1}$.

Symmetrische Matrizen. Die Menge der symmetrischen $n \times n$-Matrizen über K ist ein Unterraum von $K^{n \times n}$ (mit der gewöhnlichen Matrixaddition und skalaren Multiplikation).

Polynome. Für den oben eingeführten Vektorraum $K_n[t]$ der Polynome vom Grad höchstens n ist $K_m[t]$ ein Unterraum von $K_n[t]$ für $m \leq n$.

Konvergente Zahlenfolgen. Für zwei konvergente Zahlenfolgen $v = \{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $v_n \overset{n\to\infty}{\to} \bar{v} \in K$ und $w = \{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ mit $w_n \overset{n\to\infty}{\to} \bar{w} \in K$ gilt

$$v_n + w_n \overset{n\to\infty}{\to} \bar{v} + \bar{w} \qquad \alpha v_n \overset{n\to\infty}{\to} \alpha \bar{v}.$$

Also sind auch $v + w$ und αv konvergente Zahlenfolgen. Da die Menge der konvergenten Zahlenfolgen offensichtlich nicht leer ist, bildet sie einen Unterraum des oben betrachteten Vektorraums aller Zahlenfolgen.

Schnittmengen. Sei V Vektorraum und $\{W_i : i \in I\}$ eine Menge von Unterräumen von V mit einer Indexmenge I. Dann ist $\bigcap_{i \in I} W_i$ wieder Unterraum. Beweis: Übung.

Aus jeder beliebigen Menge von Vektoren kann ein Unterraum konstruiert werden, indem man alle Vektoren, die gemäss Lemma 4.4 noch fehlen, einfach hinzunimmt.

Definition 4.5 *Sei $(V,+,\cdot)$ Vektorraum über einen Körper K und $v_1, \ldots, v_n \in V$. Ein Vektor v der Form*

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in V$$

heisst ***Linearkombination*** *[linear combination] von $v_1, \ldots, v_n$ mit den Koeffizienten $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$. Die* ***lineare Hülle*** *(auch* ***Spann****) [linear hull, span] von $v_1, \ldots, v_n$ ist die Menge aller möglichen Linearkombinationen:*

$$\mathsf{span}(v_1, \ldots, v_n) := \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i : \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \Big\}.$$

Definition 4.5 lässt sich auf Familien von unendlich vielen Vektoren verallgemeinern. Sei dazu eine Familie[16] $(v_i)_{i \in I}$ gegeben, mit einer (allenfalls unendlich grossen) Indexmenge I. Dann ist $\mathsf{span}(v_i)_{i \in I}$ die Menge aller möglichen Linearkombinationen von *endlich* vielen Elementen aus S:

$$\mathsf{span}(v_i)_{i \in I} := \big\{ \alpha_1 v_{i_1} + \cdots + \alpha_n v_{i_n} : n \in \mathbb{N}, \{i_1, \ldots, i_n\} \subset I, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K \big\}.$$

Entspricht $(v_i)_{i \in I}$ einer Menge M so kann man auch $\mathsf{span}(M)$ schreiben. Für den Spezialfall $M = \emptyset$ setzt man $\mathsf{span}(M) = \{0\}$.

[16] Im Gegensatz zu einer Menge können in einer Familie einzelne Elemente mehrfach vorkommen, wenn z.B. das gleiche Element aus V zwei verschiedenen Indizes entspricht.

Lemma 4.6 *Sei V Vektorraum und $(v_i)_{i\in I} \subset V$. Dann ist $\mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$ Unterraum von V.*

BEWEIS: Sind $x, y \in \mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$, dann gibt es endliche Indexmengen $I_x, I_y \subset I$ und Koeffizienten $\alpha_i, \beta_i \in K$ mit

$$x = \sum_{i\in I_x} \alpha_i v_i, \qquad y = \sum_{i\in I_y} \beta_i v_i.$$

Daraus folgt

$$x + y = \sum_{i\in I_x\cup I_y} (\alpha_i + \beta_i) v_i \in \mathsf{span}(S), \quad \lambda x = \sum_{i\in I_x} (\lambda\alpha_i) v_i \in \mathsf{span}(S),$$

wobei im ersten Fall die fehlenden Koeffizienten als 0 angenommen werden. ■

Beispiel 4.1:

(i) Wir betrachten $V = K^{n\times 1}$. Jeder Spaltenvektor $x \in K^{n\times 1}$ lässt sich als Linearkombination der Einheitsvektoren $e_1, \ldots, e_n$ schreiben:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^n x_i e_i.$$

Insbesondere gilt $K^{n\times 1} = \mathsf{span}\{e_1, \ldots, e_n\}$.

(ii) Matrix-Vektor-Multiplikationen lassen sich als Linearkombinationen interpretieren: Unterteile dazu die Matrix $A \in K^{m\times n}$ in ihre Spalten: $A = \big(a_1, a_2, \ldots, a_n\big)$ mit $a_j \in K^{m\times 1}$. Dann folgt für $x \in K^{n\times 1}$:

$$Ax = A\Big(\sum_{i=1}^n x_i e_i\Big) = \sum_{i=1}^n x_i A e_i = \sum_{i=1}^n x_i a_i.$$

Also ist Ax Linearkombination der Spalten von A. Der entsprechende Unterraum

$$\mathsf{Bild}(A) := \mathsf{span}(a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

wird als **Spaltenraum** [*column subspace*] oder **Bild**[17] [*image*] von A bezeichnet. Offenbar hat ein Gleichungssystem $Ax = b$ genau dann mindestens eine Lösung wenn $b \in \mathsf{Bild}(A)$.

(iii) Wir betrachten den Vektorraum aller Zahlenfolgen und darin die Zahlenfolgen

$$\begin{aligned} z_1 &= (1,0,0,0,0,\ldots) \\ z_2 &= (0,1,0,0,0,\ldots) \\ z_3 &= (0,0,1,0,0,\ldots) \\ &\vdots \quad \vdots \end{aligned}$$

Jede Zahlenfolge mit *endlich* vielen von Null verschiedenen Folgengliedern lässt sich als Linearkombination von $z_1, z_2, \ldots$ darstellen. Zahlenfolgen mit *unendlich* vielen von Null verschiedenen Folgengliedern, wie z.B. $(1,1,1,\ldots)$, lassen sich *nicht* als Linearkombination von $z_1, z_2, \ldots$ darstellen.

♦

[17] Wir werden den Begriff des Bildes später noch einmal im allgemeineren Rahmen in Kapitel 5 definieren und untersuchen.

4.2 Lineare Unabhängigkeit, Basen und Dimension

Oben haben wir gesehen, wie eine gegebene Familie von Vektoren einen Unterraum aufspannt. Im Folgenden wollen wir den umgedrehten Weg gehen und untersuchen, wie man für einen gegebenen Unterraum bzw. Vektorraum eine möglichst kleine Familie von Vektoren finden kann, die diesen aufspannen.

Definition 4.7 *Sei V Vektorraum. Eine Familie $(v_i)_{i\in I} \subset V$ heisst* ***Erzeugendensystem*** *von V wenn $V = \mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$.*

Die Wahl des Erzeugendensystems ist hochgradig uneindeutig. Zum Beispiel bilden sowohl

$$\{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

als auch

$$\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Erzeugendensysteme für $\mathbb{R}^{3\times 1}$. Im ersten Erzeugendensystem ist die Darstellung jedes Spaltenvektors als Linearkombination eindeutig, insbesondere gilt für die Darstellung des Nullvektors:

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0.$$

Im zweiten Erzeugendensystem ist dies nicht der Fall, wir haben z.B.

$$0 = 0\cdot v_1 + 0\cdot v_2 + 0\cdot v_3 + 0\cdot v_4 = 1\cdot v_1 + 1\cdot v_2 + 1\cdot v_3 + (-1)\cdot v_4.$$

Diese Betrachtungen motvieren die folgende Definition

Definition 4.8 *Sei V Vektorraum. Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heissen* ***linear unabhängig*** *[linearly independent] falls gilt: Aus*

$$0 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K,$$

folgt

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0.$$

Ist die Bedingung von Definition 4.8 verletzt, gibt es also $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ mit mindestens einem $\alpha_j \neq 0$ so dass $0 = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i$, dann heissen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ **linear abhängig**.

Eine unendliche Familie $(v_i)_{i\in I}$ heisst linear unabhängig wenn *jede* endliche Teilfamilie linear unabhängig ist.

Beispiel 4.9 *Mit der Matrix-Vektor-Interpretation aus Beispiel 4.1 (ii) lässt sich die lineare Unabhängigkeit von Spaltenvektoren $a_1, \ldots, a_n \in K^{m\times 1}$ recht einfach überprüfen. Definiert man die $m\times n$-Matrix $A = (a_1, \ldots, a_n)$, so sind die Spaltenvektoren linear unabhängig wenn*

$$Ax = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0,$$

also $L(A, 0) = \{0\}$. Gemäss den Erkenntnissen von Abschnitt 3.4 ist dies genau dann der Fall wenn $\mathsf{Rang}(A) = n$ gilt.

Man sieht leicht ein, dass eine Familie, die den Nullvektor enthält, niemals linear unabhängig sein kann. Genauswenig kann eine Familie, die einen Vektor mehrmals enthält, linear unabhängig sein. Linear unabhängige Familien könnten also ohne Verluste als Mengen betrachtet werden.

Lemma 4.10 *Sei $(v_i)_{i\in I}$ eine Familie von Vektoren eines Vektorraums V. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent:*

(i) $(v_i)_{i\in I}$ ist linear unabhängig.

(ii) Jeder Vektor $v \in \mathsf{span}(v_i)_{i\in I}$ lässt sich in eindeutiger Weise als Linearkombination von Vektoren aus $(v_i)_{i\in I}$ darstellen.

BEWEIS: Die Richtung (ii)⇒(i) folgt sofort mit der Wahl $v = 0$.
Zu (i)⇒(ii): Betrachte zwei (endliche) Linearkombinationen

$$v = \sum_{i\in I_1} \alpha_i v_i = \sum_{i\in I_2} \beta_i v_i.$$

Bilde

$$0 = v - v = \sum_{i\in I_1} \alpha_i v_i - \sum_{i\in I_2} \beta_i v_i = \sum_{i\in I_1\cup I_2} (\alpha_i - \beta_i) v_i,$$

wobei $\alpha_i := 0$ für $i \in I_2 \setminus I_1$ und $\beta_i := 0$ für $i \in I_1 \setminus I_2$. Aus (i) folgt dann $\alpha_i - \beta_i = 0$ für alle i, also kann es keine zwei verschiedenen Linearkombinationen für v geben. ■

Das folgende Lemma enthält eine Charakterisierung von linearer Abhängigkeit, die vielleicht einleuchtender als obige Definition ist, sich aber schlechter handhaben lässt.

Lemma 4.11 *Sei V Vektorraum. Eine Familie von Vektoren $\{v_i\}_{i\in I}$ mit mindestens zwei Elementen ist genau dann linear abhängig wenn sich mindestens einer dieser Vektoren als Linearkombinationen der anderen Vektoren schreiben lässt.*

BEWEIS: Sei $\{v_i\}_{i\in I}$ linear abhängig. Dann gibt es eine endliche Teilmenge $I_0 \subset I$ und eine Linearkombination $\sum_{i\in I_0} \alpha_i v_i = 0$ mit $\alpha_i \in K$ für alle $i \in I_0$ und $\alpha_j \neq 0$ für ein $j \in I_0$. Also folgt

$$v_j = -\sum_{i\in I_0\setminus\{j\}} \frac{\alpha_i}{\alpha_j} v_i.$$

Für die Rückrichtung nehmen wir an, dass es ein $j \in I$ und eine endliche Teilmenge $I_1 \subset I \setminus \{j\}$ sowie Koeffizienten $\beta_i \in K$ für $i \in I_1$ gibt, so dass $v_j = \sum_{i\in I_1} \beta_i v_i$. Dann folgt $1 \cdot v_j - \sum_{i\in I_1} \beta_i v_i = 0$, also ist $\{v_i\}_{i\in I}$ linear abhängig. ■
Nun kommen wir zu einem der grundlegenden Konzepte bei der Arbeit mit Vektorräumen.

Definition 4.12 *Eine Familie $\mathscr{B} = (v_i)_{i\in I}$ in einem Vektorraum V heisst* ***Basis*** *wenn*

(i) $(v_i)_{i\in I}$ ein Erzeugendensystem von V ist; und

(ii) $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig ist.

Beispiele für Basen

Spaltenvektoren. $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \dots, e_n)$, wobei e_i der i-te Einheitsvektor der Länge n ist, ist eine Basis von $K^{n\times 1}$. Diese Basis heisst **kanonische Basis**. Allgemeiner formen die Spalten $(b_1, \dots, b_n)$ von jeder invertierbaren Matrix $B \in K^{n\times n}$ eine Basis von $K^{n\times 1}$. Dies folgt aus der Interpretation von Linearkombinationen als Matrix-Vektor-Multiplikationen (siehe Beispiel 4.9) kombiniert mit der Tatsache, dass die Lösung eines LGS $Bx = c$ mit invertierbarem B eindeutig ist.

Polynome. Die Monome $1, t, t^2, \dots, t^n$ bilden eine Basis des Vektorraums $K_n[t]$ der Polynome vom Höchstgrad n.

Nullvektorraum. Besteht der Vektorraum nur aus $\{0_V\}$, so ist die leere Menge $\mathscr{B} = \emptyset$ eine Basis.

Im folgenden werden uns vor allem mit *endlichen* Erzeugendensystemen und Basen $v_1, \dots, v_n$ beschäftigen. Auf den allgemeineren Fall werden wir in Abschnitt 4.2.1 kurz eingehen.

Wird ein Vektorraum aus endlich vielen Vektoren erzeugt, so lässt sich immer eine Basis finden. Der folgende Satz geht sogar noch weiter und zeigt, dass in diesem Fall sich jede linear unabhängige Menge zu einer Basis ergänzen lässt.

Satz 4.13 (Basisergänzungssatz) *Sei V Vektorraum und $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s \in V$, so dass $v_1, \dots, v_r$ linear unabhängig sind und $\mathsf{span}(v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_s) = V$. Dann kann $v_1, \dots, v_r$ durch Hinzunahme von geeigneten Elementen aus $w_1, \dots, w_s$ zu einer Basis ergänzt werden.*

BEWEIS: Die Aussage wird per Induktion über s bewiesen. Für $s = 0$ ist $(v_1, \dots, v_r)$ bereits eine Basis von V per Vorraussetzung. Sei die Aussage nun für $s - 1 \geq 0$ und für beliebiges r erfüllt. Im folgenden soll die Aussage für s bewiesen werden. Falls $(v_1, \dots, v_r)$ bereits Basis ist, so sind wir fertig. Anderenfalls gilt $\mathsf{span}(v_1, \dots, v_r) \neq V$; es gibt also mindestens ein $w_j \neq 0$, $1 \leq j \leq s$, welches nicht in $\mathsf{span}(v_1, \dots, v_r)$ enthalten ist. Insbesondere folgt aus

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \beta w_j = 0,$$

dass $\beta = 0$ und damit – wegen der linearen Unabhängigkeit von $v_1, \dots, v_r$ – auch $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$ gelten. Also ist $v_1, \dots, v_r, w_j$ linear unabhängig. Nach Induktionsannahme lässt sich $v_1, \dots, v_r, w_j$ mit Elementen aus der Familie $w_1, \dots, w_{j-1}, w_{j+1}, \dots, w_s$ (die $s - 1$ Elemente hat) ergänzen. Damit gilt die Aussage für s. (Induktionsschritt) ■

Beispiel 4.2: Die Aussage von Satz 4.13 lässt sich im Vektorraum $K^{m\times 1}$ konkretisieren. Wir schreiben dazu die Vektoren aus dem Satz in eine $m \times (r + s)$-Matrix

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & \cdots & v_r & w_1 & \cdots & w_s \end{array} \right)$$

und berechnen die TNF: $C = BA$ mit $B \in K^{m\times m}$ invertierbar. Da die Spalten den gesamten Raum $K^{m\times 1}$ aufspannen, gilt $\mathsf{Rang}(A) = m$. Wäre nämlich $\mathsf{Rang}(A) < m$, so gäbe es $b \in K^{m\times 1}$ mit $L(A, b) = \emptyset$ oder $b \notin \mathsf{Bild}(A)$, siehe Diskussion am Ende von Abschnitt 3.4, und damit läge b nicht im Spann der Spaltenvektoren von A. Darüberhinaus haben haben die ersten r Spalten von A vollen Rang r und damit sind die Pivotpositionen der TNF C von der Form

$$(1,1), (2,2), \dots, (r,r), (r+1, j_{r+1}), (r+2, j_{r+2}), \dots, (r+s, j_{r+s}).$$

Also bilden die Spalten von

$$B^{-1} = B^{-1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} e_1 & \cdots & e_r & e_{r+1} & \cdots & w_s \end{array} \right) = \left(\begin{array}{ccc|ccc} v_1 & \cdots & v_r & w_{j_{r+1}-r} & \cdots & w_{j_{r+s}-r} \end{array} \right)$$

eine Basis von $K^{m\times 1}$. ♦

Korollar 4.14 *Sei $A_1 \in K^{m\times r}$ mit $\mathsf{Rang}(A_1) = r$. Dann gibt es $A_2 \in K^{m\times(m-r)}$, so dass $A = \left(A_1 \mid A_2 \right)$ invertierbar ist.*

BEWEIS: Übung. ■

Im Moment ist noch nicht klar, dass jede Basis eines Vektorraums die gleiche Anzahl von Elementen hat. Dies wollen wir im folgenden für aus endlich vielen Vektoren erzeugten Vektorräumen zeigen. Das folgende Lemma wird dabei eine zentrale Rolle spielen.

Lemma 4.15 (Austauschlemma) *Sei V Vektorraum und $w_1,\dots,w_n \in V$. Sei $v \in \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n)$ mit der Darstellung $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i w_i$. Gibt es $\alpha_k \neq 0$, mit $1 \le k \le n$, so gilt*

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(w_1,\dots,w_{k-1},v,w_{k+1},\dots,w_n). \tag{4.4}$$

BEWEIS: Um den Beweis zu vereinfachen nehmen wir $k = 1$ an, was immer durch entsprechende Umnummerierung der Vektoren w_i erreicht werden kann. Sei $w \in \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n)$. Dann gibt es $\beta_1,\dots,\beta_n \in K$ so dass $w = \sum_{i=1}^n \beta_i w_i$. Einsetzen der Beziehung

$$w_1 = \frac{1}{\alpha_1} v - \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} w_i$$

ergibt

$$w = \frac{\beta_1}{\alpha_1} v + \sum_{i=2}^n \left(\beta_i - \frac{\beta_1 \alpha_i}{\alpha_1} \right) w_i.$$

Also ist $w \in \mathsf{span}(v,w_2,\dots,w_n)$. Da w beliebig gewählt war, folgt

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) \subset \mathsf{span}(v,w_2,\dots,w_n).$$

Die entgegengesetzte Inklusion ist aber trivial und damit ist (4.4) bewiesen. ■

Wiederholte Anwendung des Austauschlemmas führt auf das folgende Resultat.

Satz 4.16 (Austauschsatz von Steinitz) *Sei V Vektorraum und $v_1,\dots,v_m \in V$ sowie $w_1,\dots,w_n \in V$. Sind $v_1,\dots,v_m$ linear unabhängig und*

$$\mathsf{span}(v_1,\dots,v_m) \subset \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n), \tag{4.5}$$

dann gelten die folgenden Aussagen:

(i) $m \le n$.

(ii) Man kann m Elemente von $w_1,\dots,w_n$ durch $v_1,\dots,v_m$ austauschen, ohne dass sich die lineare Hülle von $w_1,\dots,w_n$ ändert.

Bevor wir zum Beweis kommen, die Aussage von Satz 4.16 (ii) noch einmal ausführlicher und formaler: Es gibt Indizes $i_1,\dots,i_m \in \{1,\dots,n\}$ derart, dass man w_{i_1} durch v_1, w_{i_2} durch v_2, usw. bis w_{i_m} durch v_m ersetzen kann, ohne dass sich die lineare Hülle von $w_1,\dots,w_n$ ändert. Wenn man nach entsprechender Umnummerierung $i_1 = 1, i_2 = 2, \dots, i_m = m$ annimmt, dann gilt also

$$\mathsf{span}(v_1,\dots,v_m,w_{m+1},\dots,w_n) = \mathsf{span}(w_1,\dots,w_n). \tag{4.6}$$

BEWEIS: Wegen (4.5) gibt es eine Darstellung $v_1 = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n$ mit mindestens einem $\alpha_{i_1} \neq 0$, $1 \le i_1 \le n$, da $v_1 \neq 0$ aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $v_1,\dots,v_n$. Nach dem Austauschlemma (Lemma 4.15) gilt

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(w_1,\dots,w_{i_1-1},v_1,w_{i_1+1},\dots,w_n).$$

Nach entsprechender Umnumerierung erhalten wir

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(v_1,w_2,\dots,w_n).$$

Dieser Prozess wird solange induktiv wiederholt bis alle m Vektoren getauscht sind. Seien also für ein r, mit $1 \le r \le m-1$, die Vektoren $w_1,\dots,w_r$ bereits mit $v_1,\dots,v_r$ getauscht, so dass

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(v_1,\dots,v_r,w_{r+1},\dots,w_n).$$

Es gilt offenbar $r \le n$. Wegen (4.5) gibt es $\beta_1,\dots,\beta_n \in K$, so dass

$$v_{r+1} = \sum_{i=1}^r \beta_i v_i + \sum_{i=r+1}^n \beta_i w_i.$$

Dabei können nicht alle $\beta_{r+1},\dots,\beta_n$ Null sein, ansonsten wäre $v_{r+1} \in \mathsf{span}(v_1,\dots,v_r)$ und dies widerspräche der linearen Unabhängigkeit von $v_1,\dots,v_{r+1}$ (siehe Lemma 4.11). Insbesondere muss deswegen auch $r+1 \le n$ gelten. Also gibt es $i_{r+1} \ge r+1$ mit $\alpha_{i_{r+1}} \neq 0$. Wieder einmal können wir nach entsprechender Umnummerierung annehmen, dass $i_{r+1} = r+1$ gilt. Anwendung des Austauschlemmas ergibt

$$\mathsf{span}(w_1,\dots,w_n) = \mathsf{span}(v_1,\dots,v_{r+1},w_{r+2},\dots,w_n).$$

Wiederholte Anwendung dieses Prozesses bis $r = m-1$ ergibt $m \le n$ und die in (ii) behauptete Beziehung (4.6). ■

Wichtigste Folgerung des Steinitz'schen Austauschsatzes ist, dass jede Basis eines Vektorraums gleich viele Elemente hat.

Korollar 4.17 *Sei V Vektorraum.*

(i) Hat V eine endliche Basis, so ist jede Basis von V endlich.

(ii) Je zwei endliche Basen von V haben gleich viele Elemente.

BEWEIS: Zu (i). Sei $v_1,\dots,v_n$ eine (endliche) Basis von V und $(w_i)_{i\in I}$ eine beliebige weitere Basis von V. Wäre I unendlich, so gäbe es insbesondere $n+1$ linear unabhängige Elemente. Dies widerspricht aber dem Austauschsatz.

Zu (ii). Seien $\{v_1,\dots,v_m\}$ und $\{w_1,\dots,w_n\}$ jeweils Basis von V. Anwendung des Austauschsatzes ergibt einerseits $m \le n$ und andererseits (wenn man die Rollen von v und w vertauscht) $n \le m$. Also gilt $m = n$. ■

Eine weitere Folgerung des Austauschsatzes: Hat man erst einmal unendlich viele linear unabhängige Vektoren gefunden, so kann es keine endliche Basis geben. So kann es z.B. keine endliche Basis für den Vektorraum der Zahlenfolgen geben.

Da nach Korollar 4.17 die Anzahl der Basiselemente unabhängig von der Wahl der Basis ist, macht die folgende Definition Sinn.

Definition 4.18 *Sei V Vektorraum. Dann ist die* ***Dimension*** *von V definiert als*

$$\dim(V) := \begin{cases} n, & \text{wenn es eine Basis von } V \text{ mit } n \text{ Elementen gibt,} \\ \infty, & \text{wenn es keine Basis mit endlich vielen Elementen gibt.} \end{cases}$$

Einen Vektorraum V mit $\dim(V) < \infty$ nennt man endlichdimensional und ansonsten unendlichdimensional.

Einige Beispiele:

- Der Vektorraum $K^{n\times 1}$ der Spaltenvektoren hat die kanonische Basis $e_1,\dots,e_n$ und damit gilt $\dim(K^{n\times 1}) = n$.
- Der Vektorraum $K_n[t]$ der Polynome vom Grad höchstens n hat eine Basis $1,t,\dots,t^n$ und damit gilt $\dim(K_n[t]) = n+1$.
- Im Vektorraum aller Zahlenfolgen findet man unendlich viele linear unabhängig Vektoren $(1,0,0,\dots)$, $(0,1,0,\dots)$, $\dots$ und damit ist dieser Vektorraum unendlich.
- Der Vektorraum $K^{m\times n}$ hat Dimension mn. Für $m = n$ hat der Unterraum der symmetrischen Matrizen Dimension $n(n+1)/2$. Beweis Übung.

Zum Abschluss noch zwei Resultate, die weitere Einblicke in die Dimension von Vektorräumen geben.

Lemma 4.19 *In einem Vektorraum V mit Dimension $n < \infty$ kann es nicht mehr als n linear unabhängige Elemente geben.*

BEWEIS: Gäbe es mehr als n linear unabhängige Elemente, so könnten diese nach dem Basisergänzungssatz zu einer Basis mit mehr als n Elementen ergänzt werden. Dies steht aber im Widerspruch zu Korollar 4.17. ■

Lemma 4.20 *Sei U Unterraum eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Dann gilt $\dim(U) \le \dim(V)$. Aus $\dim(U) = \dim(V)$ folgt $U = V$.*

BEWEIS: Zunächst einmal muss U auch endlichdimensional sein, sonst gäbe es unendlich viele linear unabhängige Vektoren in V. Eine Basis von U mit $\dim(U)$ Elementen ist linear unabhängig in V und damit gilt $\dim(U) \le \dim(V)$ nach dem Austauschsatz.

Sei nun $n = \dim(U) = \dim(V)$ und $u_1,\dots,u_n$ Basis von U. Wäre $U \ne V$, dann gäbe es $v \in V$ mit $v \notin \mathsf{span}(u_1,\dots,u_n)$. Insbesondere sind dann $u_1,\dots,u_n,v$ linear unabhängig. Dies widerspricht aber Lemma 4.19. ■

4.2.1 Der unendlichdimensionale Fall

Der Basisergänzungssatz zeigt nur für den endlichdimensionalen Fall die Existenz einer Basis. Dass dies für den unendlichdimensionalen Fall gar nicht so klar ist, macht man sich leicht am Vektorraum aller Zahlenfolgen klar. Um auch dort die Existenz einer Basis sichern zu können, müssen wir die Vektorräume kurz verlassen und einige Begriffe der Mengenlehre einführen.

Definition 4.21 *Sei X eine Menge. Eine Relation $H \subset X \times X$ ist eine* ***Halbordnung*** *(auch:* ***partielle Ordnung****) [partial order] auf X, wenn gilt:*

(i) $(x,x) \in H$ *für alle* $x \in H$;

(ii) aus $(x,y) \in H$ *und* $(y,x) \in H$ *folgt* $x = y$;

(iii) aus $(x,y) \in H$ *und* $(y,z) \in H$ *folgt* $(x,z) \in H$.

Typische Beispiele für Halbordnungen sind die Relation $\le$ auf $\mathbb{R}$ oder die Relation $\subset$ auf der Potenzmenge $P(M)$ für eine Menge M. Im folgenden werden wir für eine allgemeine Halbordnung H anstatt von $(x,y) \in H$ immer $x \le y$ schreiben.

Definition 4.22 *Sei H Halbordnung auf einer Menge X. Dann heisst eine nichtleere Teilmenge $A \subset X$* ***vollständig geordnet*** *[totally ordered] wenn für alle $x,y \in A$ stets $x \le y$ oder $y \le x$ gilt.*

Offenbar ist $\mathbb{R}$ mit der üblichen Halbordnung $\le$ vollständig geordnet. Dagegen ist die Potenzmenge $P(M)$ mit der Halbordnung $\subset$ *nicht* vollständig geordnet. Betrachtet man aber eine Teilmenge der Form $A = \{M_1, M_2, M_3, \dots\} \subset P(M)$ mit $M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots$, so ist A vollständig geordnet.

Definition 4.23 *Sei H Halbordnung auf einer Menge X und $A \subset X$ mit $A \ne \emptyset$.*

- *$s(A) \in X$ heisst* ***obere Schranke*** *von A, wenn $a \le s(A)$ für alle $a \in A$.*
- *$m(A) \in A$ heisst* ***maximales Element*** *von A, wenn aus $a \in A$ und $m(A) \le a$ die Beziehung $m(A) = a$ folgt.*
- *X heisst* ***induktiv geordnet****, wenn jede vollständig geordnete Teilmenge A von X eine obere Schranke in X besitzt.*

Lemma 4.24 (Zorn[18]) *Jede nichtleere induktiv geordnete Menge besitzt ein maximales Element.*

BEWEIS: Der Beweis beruht auf dem Auswahlaxiom und soll hier nicht erbracht werden. Tatsächlich ist die Aussage äquivalent zum Auswahlaxiom und damit können wir sie genausogut selbst als Axiom betrachten. ■

Diese Begriffe werden nun auf das einzige für uns relevante Beispiel angewendet. Sei V ein Vektorraum. Wir betrachten die Menge aller linear unabhängigen Mengen in V:

$$X := \{M \subset V : \text{ die Elemente von } M \text{ sind linear unabhängig}\}. \tag{4.7}$$

Die Menge X ist nicht leer; im schlimmsten Fall ist $V = \{0\}$, dann haben wir $X = \{\emptyset\}$ und damit $X \ne \emptyset$. Der Nachweis der zweiten im Lemma von Zorn geforderten Eigenschaft ist nicht ganz so trivial.

Lemma 4.25 *Bezüglich der Halbordnung $\subset$ ist die in (4.7) eingeführte Menge X induktiv geordnet.*

BEWEIS: Sei $A \subset X$ vollständig geordnete Menge linear unabhängiger Teilmengen von V. Als Kandidat für eine obere Schranke nehmen wir

$$\overline{A} = \bigcup_{M \in A} M.$$

[18] Das Lemma von Zorn wird oft auch Lemma von Kuratowski-Zorn genannt, nach den Mathematikern Kazimierz Kuratowski und Max Zorn.

Damit ist $\overline{A}$ offenbar obere Schranke in $P(A)$. Es gilt aber noch zu klären, ob $\overline{A} \in X$, also ob die Elemente von $\overline{A}$ linear unabhängig sind.

Wähle dazu eine beliebige, endliche Teilfamilie von Vektoren

$$v_1, \ldots, v_n \in \overline{A}.$$

Wir zeigen per Induktion über n, dass es eine Menge $M_n \in A$ gibt mit $v_1, \ldots, v_n \in M_n$. Für $n = 1$ folgt dies sofort aus der Definition von $\overline{A}$. Sei die Aussage für $n-1$ erfüllt, es gibt also $M_{n-1} \in A$ mit $v_1, \ldots, v_{n-1} \in M_{n-1}$. Für v_n gibt es $M' \in A$ mit $v_n \in M'$. Da A vollständig geordnet ist gilt $M_{n-1} \subset M'$ oder $M' \subset M_{n-1}$. Im ersten Fall folgt die Induktionsbehauptung mit $M_n = M'$, im zweiten Fall mit $M_n = M_{n-1}$.

Da M_n linear unabhängig ist, folgt dass $v_1, \ldots, v_n$ und damit $\overline{A}$ selbst linear unabhängig ist. Damit ist $\overline{A} \in X$ obere Schranke für A. ■

Anwendung des Lemmas von Zorn zeigt die Existenz einer *maximalen linear unabhängigen Menge* in V. Der folgende Satz zeigt, dass diese Menge tatsächlich eine Basis ist. Dabei heisst ein Erzeugendensystem $\mathscr{B} \subset V$ **minimal**, falls jedes $A \subsetneq \mathscr{B}$ *kein* Erzeugendensystem von V ist.

Satz 4.26 *Sei V Vektorraum und $\mathscr{B} \subset V$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathscr{B}$ ist eine Basis;

(ii) $\mathscr{B}$ ist ein minimales Erzeugendensystem;

(iii) $\mathscr{B}$ ist maximal linear unabhängig.

BEWEIS: Zu $(i) \Rightarrow (ii)$. Sei $\mathscr{B}$ Basis und $A \subsetneq \mathscr{B}$. Da $\mathscr{B}$ linear unabhängig ist, kann es für $v \in \mathscr{B} \setminus A$ keine Linearkombination mit Elementen aus A geben (siehe Lemma 4.11). Insbesondere ist A kein Erzeugendensystem.

Zu $(ii) \Rightarrow (iii)$. Sei $\mathscr{B}$ minimales Erzeugendensystem und nehmen wir an $\mathscr{B}$ wäre linear abhängig. Dann gibt es nach Lemma 4.11 ein $v \in \mathscr{B}$ so dass v sich als Linearkombination von Elementen aus $\mathscr{B} \setminus \{v\}$ darstellen lässt. Damit wäre $\mathscr{B} \setminus \{v\}$ Erzeugendensystem, was aber im Widerspruch zur angenommenen Minimalität von $\mathscr{B}$ steht. Also ist $\mathscr{B}$ linear unabhängig. Es ist auch maximal: da $\mathscr{B}$ Erzeugendensystem, ist jedes Element in V linear abhängig von $\mathscr{B}$ und aus $\mathscr{B} \subset \mathscr{B}'$, mit $\mathscr{B}'$ linear unabhängig, folgt stets $\mathscr{B} = \mathscr{B}'$.

Zu $(iii) \Rightarrow (i)$. Sei $\mathscr{B}$ maximal linear unabhängig. Für (i) muss noch gezeigt werden, dass $\mathscr{B}$ auch Erzeugendensystem ist. Jedes $v \in \mathscr{B}$ erfüllt trivialerweise $v \in \mathsf{span}(\mathscr{B})$. Sei also $v \notin \mathscr{B}$. Wegen Maximalität kann dann $\mathscr{B} \cup \{v\}$ nicht linear unabhängig sein. Es gibt also eine Linearkombination

$$\alpha v + \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$$

für Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in \mathscr{B}$ und mit mindestens einer der Koeffizienten $\alpha, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$ verschieden von Null. Es gilt insbesondere $\alpha \neq 0$, da ansonsten $v_1, \ldots, v_n$ (und damit auch $\mathscr{B}$) linear abhängig wären. Also ist v Linearkombination von Elementen aus $\mathscr{B}$:

$$v = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\alpha} v_i.$$

Da v beliebig gewählt war, ist $\mathscr{B}$ Erzeugendensystem. ■

Korollar 4.27 *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

4.3 Summen von Unterräumen

Nach diesem kurzen Ausflug in abstrakte Gefilde kommen wir wieder zu grundlegenderen Konzepten. Die Summe von s Unterräumen erhält man, indem man einfach alle möglichen Summen von Elementen aus diesen Unterräumen bildet.

Definition 4.28 *Seien $U_1, \ldots, U_s$ Unterräume eines Vektorraums V. Die* ***Summe dieser Unterräume*** *definieren wir als*

$$U_1 + \cdots + U_s := \{u_1 + \cdots + u_s : u_1 \in U_1, \ldots, u_s \in U_s\}.$$

Der Beweis der folgenden Resultate ist einfach und sei dem Leser zur Übung empfohlen.

Lemma 4.29 *Seien $U_1, \ldots, U_s$ Unterräume eines Vektorraums V. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) $U_1 + \cdots + U_s$ ist wieder Unterraum von V;

(ii) $U_1 + \cdots + U_s = \mathsf{span}(U_1 \cup \cdots \cup U_s)$;

(iii) $\dim(U_1 + \cdots + U_s) \leq \dim(U_1) + \cdots + \dim(U_s)$.

Im allgemeinen gilt in Lemma 4.29 (iii) keine Gleichheit. Das sieht man am deutlichsten bei der Summe eines Unterraums $U \neq \{0\}$ mit sich selbst: $U + U = U$, also $\dim(U) = \dim(U+U) < \dim(U) + \dim(U)$. Der folgende Satz liefert eine genaue Charakterisierung für die Unschärfheit der Ungleichung im Fall $s = 2$. Wir erinnern daran, dass der Schnitt zweier Unterräume wieder Unterraum ist, siehe Seite 70.

Satz 4.30 (Dimensionsformel für Unterräume) *Seien U_1, U_2 endlichdimensionale Unterräume eines Vektorraums V. Dann gilt*

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim(U_1) + \dim(U_2) - \dim(U_1 \cap U_2). \tag{4.8}$$

BEWEIS: Sei $r = \dim(U_1 \cap U_2)$ und $v_1, \ldots, v_r$ Basis von $U_1 \cap U_2$. Gemäss dem Basisergänzungssatz können wir $v_1, \ldots, v_r$ jeweils zu einer Basis $v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{m_1}$ von U_1 sowie zu einer Basis $v_1, \ldots, v_r, z_1, \ldots, z_{m_2}$ von U_2 ergänzen. Die Aussage des Satzes ist bewiesen wenn wir zeigen können, dass

$$v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{m_1}, z_1, \ldots, z_{m_2}$$

eine Basis von $U_1 + U_2$ ist. Offenbar gilt

$$\mathsf{span}(v_1, \ldots, v_r, w_1, \ldots, w_{m_1}, z_1, \ldots, z_{m_2}) = \mathsf{span}(U_1 \cup U_2) = U_1 + U_2,$$

es bleibt also nur noch die lineare Unabhängigkeit dieser Vektoren zu zeigen. Seien dazu $\alpha_1, \ldots, \alpha_r \in K$, $\beta_1, \ldots, \beta_{m_1} \in K$ und $\gamma_1, \ldots, \gamma_{m_2} \in K$, so dass

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{m_1} \beta_i w_i + \sum_{i=1}^{m_2} \gamma_i z_i. \tag{4.9}$$

Durch Umstellen erhalten wir

$$v := \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_i + \sum_{i=1}^{m_1} \beta_i w_i = -\sum_{i=1}^{m_2} \gamma_i z_i. \tag{4.10}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $v \in U_1$ und aus der zweiten $v \in U_2$, also $v \in U_1 \cap U_2$. Damit lässt sich v als Linearkombination von $v_1, \dots, v_r$ darstellen. Da aber $v_1, \dots, v_r, w_1, \dots, w_{m_1}$ Basis ist, folgt aus (4.10) die Beziehung $\beta_1 = \dots = \beta_{m_1} = 0$. Setzt man dies in (4.9) ein und nutzt die Tatsache, dass $v_1, \dots, v_r, z_1, \dots, z_{m_2}$ Basis ist, so folgt $\alpha_1 = \dots = \alpha_r = \gamma_1 = \dots = \gamma_{m_2} = 0$. ■

Entsprechende Dimensionsformeln kann man auch für $s > 2$ durch rekursives Anwenden von Satz 4.30 angeben, aber das wird sehr schnell unübersichtlich.

Der Korrekturterm in (4.8) verschwindet, wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$. Diese Bedingung lässt sich auch anders charakterisieren.

Lemma 4.31 *Sei $V = U_1 + U_2$ mit Unterräumen U_1, U_2 von V. Dann sind die folgenden beiden Aussagen äquivalent.*

(i) $U_1 \cap U_2 = \{0\}$.

(ii) Jedes $v \in V$ hat eine eindeutige Zerlegung $v = u_1 + u_2$ mit $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2$.

BEWEIS: Zu (i)⇒(ii). Habe $v \in V$ zwei Zerlegungen $v = u_1 + u_2 = u_1' + u_2'$ mit $u_1, u_1' \in U_1$ und $u_2, u_2' \in U_2$. Dann folgt

$$\underbrace{u_1 - u_1'}_{\in U_1} = \underbrace{u_2 - u_2'}_{\in U_2} \in U_1 \cap U_2 = \{0\},$$

also $u_1 = u_1'$ und $u_2 = u_2'$.

Zu (ii)⇒(i). Sei $u \in U_1 \cap U_2$. Dann sind $0 = 0 + 0$ und $0 = u + (-u)$ zwei Zerlegungen. Wegen der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt $u = 0$. ■

Definition 4.32 *Sei $V = U_1 + U_2$ mit Unterräumen U_1, U_2 von V. Gilt $U_1 \cap U_2 = \{0\}$, so nennen wir V **direkte Summe** von U_1 und U_2 und schreiben $V = U_1 \oplus U_2$.*

Nun zeigen wir noch, dass sich jeder Unterraum durch eine direkte Summe zum ganzen Vektorraum "ergänzen" lässt.

Satz 4.33 *Sei U Unterraum eines endlichdimensionalen Vektorraums V. Dann gibt es einen weiteren Unterraum U' so dass $V = U \oplus U'$.*

BEWEIS: Sei $v_1, \dots, v_r$ Basis von U. Nach dem Basisergänzungssatz gibt es Vektoren $v_{r+1}, \dots, v_n \in V$, so dass $v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n$ Basis von V ist. Für $U' = \mathrm{span}(v_{r+1}, \dots, v_n)$ gilt offenbar $V = U + U'$ und $U \cap U' = \{0\}$. ■

Zum Abschluss die entsprechenden Definition für mehr als zwei Unterräume.

Definition 4.34 *Sei $V = U_1 + \dots + U_r$ mit Unterräumen $U_1, \dots, U_r$ von V. Sind von Null verschiedene Vektoren $u_1 \in U_1, \dots, u_r \in U_r$ stets linear unabhängig, so nennen wir V **direkte Summe** von $U_1, \dots, U_r$ und schreiben $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$.*

Die etwas gewundene Bedingung in Definition 4.34 ist notwendig und kann nicht etwa durch die einfacher erscheinende Bedingung $U_i \cap U_j = \{0\}$ ersetzt werden. Zum Beispiel bilden

$$U_1 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \end{pmatrix} : \alpha \in K \right\}, \quad U_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in K \right\}, \quad U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \end{pmatrix} : \alpha \in K \right\},$$

keine direkte Summe von $\mathbb{R}^{2\times 1}$.

Satz 4.35 *Seien $U_1, \dots, U_r$ Untervektorräume eines Vektorraums V. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_r$.

(ii) Sind Basen $v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}$ von U_i für $i = 1, \dots, r$ gegeben, so bildet

$$\mathscr{B} = \left(v_{1,1}, \dots, v_{1,n_1},\ v_{2,1}, \dots, v_{2,n_2}, \quad \dots, \quad v_{r,1}, \dots, v_{r,n_r}\right)$$

eine Basis von V.

(iii) $V = U_1 + \dots + U_r$ und $\dim(V) = \dim(U_1) + \dots + \dim(U_r)$.

BEWEIS: (i) ⇒ (ii). Da V sich als die Summe der Untervektorräume ergibt, ist klar, dass $\mathscr{B}$ ein Erzeugendensystem für V bildet. Zum Beweis der linearen Unabhängigkeit:

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \underbrace{\sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v_{ij}}_{=:w_i} \quad \stackrel{\text{Def. 4.34}}{\Rightarrow} \quad w_1 = \dots = w_r = 0.$$

Da $v_{i,1}, \dots, v_{i,n_i}$ Basis, folgt aus $w_i = 0$, dass $\alpha_{i1} = \dots = \alpha_{i,n_i} = 0$ für $i = 1, \dots, r$.

(ii) ⇒ (i). Der erste Teil der Definition, $V = U_1 + \dots + U_r$, ist klar. Für den zweiten Teil wählen wir nun von Null verschiedene Vektoren $u_i \in U_i$ aus. Diese haben die Basisdarstellung

$$u_i = \sum_{j=1}^{n_i} \alpha_{ij} v_{ij}, \quad i = 1, \dots, r.$$

Hierbei muss jeweils mindestens ein $\alpha_{i,i^\star}$ verschieden von Null sein. Betrachte jetzt eine Linearkombination

$$0 = \sum_{i=1}^{r} \beta_i u_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_i} \beta_i \alpha_{ij} v_{ij}.$$

Da $\mathscr{B}$ Basis, folgt $\beta_i \alpha_{ij} = 0$ und insbesondere für $j = i^\star$ folgt $\beta_i = 0$. Damit ist $u_1, \dots, u_r$ linear unabhängig.

(ii) ⇔ (iii) ist offensichtlich. ■

Kapitel 5

Lineare Abbildungen

Zwischen zwei Vektorräume U und V lassen sich ohne weiteres beliebige Abbildungen definieren, indem man U und V einfach als Mengen auffasst und die Struktur der Vektorräume ignoriert. Im folgenden werden wir diese Struktur mit einbeziehen und uns mit Abbildungen beschäftigen, die in einem gewissen Sinne kompatibel zu Vektorräumen sind.

5.1 Definitionen und Eigenschaften

Definition 5.1 *Seien V,W Vektorräume über einen Körper K. Eine Abbildung $F : V \to W$ heisst **linear** (auch: **(Vektorraum-)Homomorphismus**) [linear map, homomorphism], wenn die folgenden beiden Eigenschaften erfüllt sind:*

(i) $F(v_1 + v_2) = F(v_1) + F(v_2)$ für alle $v_1, v_2 \in V$;

(ii) $F(\alpha v) = \alpha F(v)$ für alle $\alpha \in K, v \in V$.

Die Forderung (i) und (ii) von Definition 5.1 lassen sich kompakter zusammenfassen zu

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2). \tag{5.1}$$

Welche der beiden äquivalenten Forderungen, Definition 5.1 (i)+(ii) oder (5.1), bevorzugt wird, ist Geschmackssache. Als direkte Folgerung von Definition 5.1 (ii) muss $F(0) = 0$ gelten. Oft erkennt man, dass eine Abbildung nicht linear ist, bereits daran, dass diese notwendige Bedingung verletzt ist.

Beispiele für lineare Abbildungen

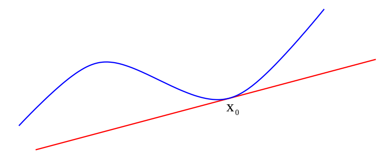
In allen folgenden Beispielen ist $K = \mathbb{R}$.

Lineare Funktionen. Sei $V = W = \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $g(x) = \beta x$ mit $\beta \in \mathbb{R}$ lineare Abbildung, da

$$g(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \beta\alpha_1 x_1 + \beta\alpha_2 x_2 = \alpha_1 g(x_1) + \alpha_2 g(x_2).$$

Man beachte, dass eine lineare Funktion der Form $\tilde{g}(x) = \beta x + \gamma$ mit $\gamma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *keine* lineare Abbildung ist! So trivial wie die Funktion $g(x) = \beta x$ auch aussehen mag, so

wichtig ist sie in der Praxis. Sei z.B. $f(x)$ eine stetig differenzierbare Funktion und $x_0 \in \mathbb{R}$.



Um das Verhalten von f in der Nähe von $x_0 \in \mathbb{R}$ approximativ zu beschreiben, verwenden wir Taylor-Entwicklung:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(|x - x_0|) \quad \Rightarrow \quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Die Funktion f wird also in der Nähe von x_0 gut durch eine lineare Funktion mit Steigung $f'(x_0)$ dargestellt. Dies wird in der Numerischen Mathematik noch eine wichtige Rolle, z.B. in Verfahren zur Bestimmung von Nullstellen, spielen.

Matrix-Vektor-Multiplikation. Für die Vektorräume $V = K^{n\times 1}, W = K^{m\times 1}$ ist die Matrix-Vektor-Multiplikation mit einer Matrix $A \in K^{m\times n}$,

$$F_A : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}, \quad F_A(x) = Ax,$$

eine lineare Abbildung:

$$F_A(\alpha x + \beta y) = A(\alpha x + \beta y) = \alpha Ax + \beta Ay = \alpha F_A(x) + \beta F_A(y).$$

Wir werden im Verlauf dieses Kapitels noch feststellen, dass alle linearen Abbildungen zwischen endlichdimensionalen Vektorräumen als Matrix-Vektor-Multiplikationen aufgefasst werden können.

Für mehrdimensionale Funktionen haben lineare Abbildungen eine ähnliche Bedeutung wie oben für eindimensionale Funktionen. Ist $f : K^{n\times 1} \to K^{m\times 1}$ stetig differenzierbar, dann lässt sich das Verhalten von $f = (f_1(x), \ldots, f_m(x))^\mathsf{T}$ in der Nähe von $x^{(0)} \in K^{n\times 1}$ wie folgt approximieren:

$$f(x) \approx f(x_0) + J_f(x_0)(x - x^{(0)}), \quad \text{mit} \quad J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}.$$

Integral. Für den Vektorraum $C^0([0,1])$ der auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen reellen Funktionen ist das Integral eine lineare Abbildung:

$$S : C^0([0,1]) \to C^0([0,1]), \qquad [S(f)](x) := \int_0^x f(t)\, \mathrm{d}t.$$

Ableitung. Für den Vektorraum $C^\infty([0,1])$ der auf dem Intervall $[0,1]$ unendlich oft differenzierbaren reellen Funktionen ist die Ableitung eine lineare Abbildung:

$$D : C^\infty([0,1]) \to C^\infty([0,1]), \qquad [D(f)](x) := f'(x).$$

Zahlenfolgen. Sei V der Vektorraum aller Zahlenfolgen über K. Dann ist der Shift-Operator

$$\Sigma : V \to V, \qquad \Sigma(v_0, v_1, v_2, \dots) := (v_1, v_2, v_3, \dots)$$

eine lineare Abbildung.

Die Menge aller linearen Abbildungen wird mit $L(V,W)$ bezeichnet.

Definition 5.2 *(i) Eine bijektive lineare Abbildung nennt man* ***Isomorphismus****. Findet man für zwei Vektorräume V,W einen Isomorhpismus $f \in L(V,W)$ so sind V und W* ***isomorph*** *zueinander und man schreibt*

$$V \cong W.$$

(ii) Für $V = W$ heisst jede lineare Abbildung $f \in L(V,V)$ ***Endomorphismus****. Ist darüber hinaus f bijektiv, so nennt man f* ***Automorphismus****.*

Anwendung von Definition 5.2 auf den Spezialfall $V = K^n$, $W = K^m$ ergibt für die zu einer Matrix $A \in K^{m\times n}$ gehörigen linearen Abbildung F_A:

$$F_A \text{ Isomorphismus} \quad \Leftrightarrow \quad m = n \text{ und } A \text{ invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad F_A \text{ Automorphismus.}$$

Im folgenden wollen wir einige grundlegende Eigenschaften von linearen Abbildungen kennenlernen.

Definition 5.3 *Seien V,W Vektorräume über K und $F \in L(V,W)$. Dann sind der* ***Kern*** *[null space] und das* ***Bild*** *[image] von f wie folgt definiert:*

$$\mathsf{Kern}(F) := \{v \in V : F(v) = 0\}, \qquad \mathsf{Bild}(F) := \{F(v) : v \in V\}.$$

Wir können diese Begriffe noch ein wenig allgemeiner fassen. Für eine Teilmenge $\tilde{V} \subset V$ ist

$$F(\tilde{V}) := \{F(v) : v \in \tilde{V}\}.$$

Es gilt insbesondere $F(V) = \mathsf{Bild}(F)$. Für eine Teilmenge $\tilde{W} \subset W$ ist

$$F^{-1}(\tilde{W}) := \{v \in V : F(v) \in \tilde{W}\}.$$

(Diese Schreibweise verwendet man unabhängig davon, ob die Abbildung eine Umkehrabbildung besitzt oder nicht. Nur wenn F bijektiv ist, entspricht F^{-1} der Umkehrabbildung.) Im Folgenden werden einelementige Mengen immer mit Ihrem (einzigen) Element identifiziert, insbesondere schreibt man kürzer $F^{-1}(w) = F^{-1}(\{w\})$. Es gilt $F^{-1}(0) := \mathsf{Kern}(F)$.

Lemma 5.4 *Seien V,W Vektorräume über K. Dann gelten die folgenden Aussagen für $F \in L(V,W)$.*

(i) $F(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = \alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n)$ für $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$, $v_1, \dots, v_n \in V$.

(ii) Ist $\tilde{V}$ Unterraum von V, so ist auch $F(\tilde{V})$ Unterraum von W. Ist $\tilde{W}$ Unterraum von W, so ist auch $F^{-1}(\tilde{W})$ Unterraum von V.

(iii) Ist $(v_i)_{i\in I}$ linear abhängige Familie in V, so ist auch $\big(F(v_i)\big)_{i\in I}$ linear abhängige Familie in W.

(iv) Ist $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängige Familie in V und F injektiv, so ist auch $\big(F(v_i)\big)_{i\in I}$ linear unabhängige Familie in W.

(v) $\mathsf{Kern}(F) = \{0\}$ genau dann wenn F injektiv ist.

(vi) $\mathsf{Bild}(F) = W$ genau dann wenn F surjektiv ist.

(vii) Ist F Isomorphismus, so ist $F^{-1} \in L(W,V)$.

BEWEIS: Zu (i). Folgt direkt aus wiederholter Anwendung von (5.1).

Zu (ii). Da $0 \in \tilde{V} \Rightarrow F(0) \in F(\tilde{V})$, ist die Menge $F(\tilde{V})$ nicht leer. Seien nun $F(v_1), F(v_2) \in F(\tilde{V})$. Da $\tilde{V}$ Unterraum ist, gilt

$$\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) = F(\underbrace{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2}_{\in \tilde{V}}) \in F(\tilde{V})$$

und damit ist $F(\tilde{V})$ auch Unterraum.

Da stets $0 \in F^{-1}(\tilde{W})$ ist diese Menge nicht leer. Seien nun $v_1, v_2 \in F^{-1}(\tilde{W})$, also $F(v_1), F(v_2) \in \tilde{W}$. Da $\tilde{W}$ Unterraum ist, gilt

$$F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2) \in \tilde{W}$$

und damit ist $F^{-1}(\tilde{W})$ auch Unterraum.

Zu (iii). Aus $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, mit einem $\alpha_j \neq 0$, folgt wegen (i) die Beziehung $\alpha_1 F(v_1) + \cdots + \alpha_n F(v_n) = 0$.

Zu (iv). Sei $I_0 \subset I$ endliche Indexmenge mit einer entsprechenden Linearkombination $\sum_{i\in I_0} \alpha_i F(v_i) = 0$. Wegen (i) folgt $F\big(\sum_{i\in I_0} \alpha_i v_i\big) = 0$. Da $F(0) = 0$ und F injektiv, impliziert dies $\sum_{i\in I_0} \alpha_i v_i = 0$. Da $(v_i)_{i\in I}$ linear unabhängig, folgt $\alpha_i = 0$ für alle $i \in I_0$.

Zu (v). Sei $F(v_1) = F(v_2)$. Dann gilt $0 = F(v_1) - F(v_2) = F(v_1 - v_2)$ und zusammen mit $\mathsf{Kern}(F) = \{0\}$ folgt $v_1 - v_2 = 0$ bzw. $v_1 = v_2$. Die andere Richtung ist trivial.

(vi) folgt direkt aus der Definition von Surjektivität.

Zu (vii). Da F bijektiv, ist F^{-1} Abbildung und es bleibt deren Linearität zu überprüfen. Für $w_1, w_2 \in W$ gibt es $v_1, v_2 \in V$ mit $w_1 = F(v_1), w_2 = F(v_2)$ und – unter Ausnutzung der Linearität von F – folgt

$$\begin{aligned} F^{-1}(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2) &= F^{-1}(\alpha_1 F(v_1) + \alpha_2 F(v_2)) = F^{-1}(F(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) \\ &= \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 = \alpha_1 F^{-1}(w_1) + \alpha_2 F^{-1}(v_2). \end{aligned}$$

Also ist F^{-1} linear. ■

Als Korollar von Lemma 5.4 (ii) ergibt sich, dass $\mathsf{Kern}(F)$ und $\mathsf{Bild}(F)$ Unterräume von V bzw. W sind.

5.1.1 Die Dimensionsformel

Wir wollen im folgenden die Dimensionen von Bild und Kern einer linearen Abbildung untersuchen, unter der Voraussetzung, dass V endlichdimensionaler Vektorraum ist. Die Dimension des Bildes von $F \in L(V,W)$ wird als **Rang** von F bezeichnet. Mitunter schreibt man auch $\mathsf{Rang}(F) := \dim \mathsf{Bild}(F)$; wir werden dies aber im weiteren nicht verwenden.

Beispiel 5.1: Für den Spezialfall $V = K^n$, $W = K^m$ und für die zu einer Matrix $A = (a_1, \dots, a_n) \in K^{m\times n}$ gehörigen linearen Abbildung F_A wissen wir bereits aus der Diskussion von Beispiel 4.1 (ii), dass

$$\mathsf{Bild}(F_A) = \mathsf{Bild}(A) = \mathsf{span}(a_1, \dots, a_n).$$

Das Bild von F_A ist also gerade der Spaltenraum von A. Aus der Treppennormalform von A sieht man leicht, dass die Dimension des Spaltenraums gerade $\mathsf{Rang}(A)$ ist. Wir haben also $\dim \mathsf{Bild}(F_A) = \mathsf{Rang}(A)$. ♦

Aus Lemma 5.4 (iii) folgt die Beziehung

$$\dim \mathsf{Bild}(F) \leq \dim V \tag{5.2}$$

für beliebiges $F \in L(V,W)$. Der folgende Satz quantifiziert wie weit die beiden Seiten in der Ungleichung (5.2) voneinander entfernt sind.

Satz 5.5 *Sei $F \in L(V,W)$ mit V endlichdimensional. Dann gilt die* ***Dimensionsformel***

$$\dim V = \dim \mathsf{Bild}(F) + \dim \mathsf{Kern}(F).$$

BEWEIS: Sei $r := \dim \mathsf{Bild}(F)$ und $k := \dim \mathsf{Kern}(F)$. Dann gibt es eine Basis $w_1,\dots,w_r$ von $\mathsf{Bild}(F)$ sowie eine Basis $v_1,\dots,v_k$ von $\mathsf{Kern}(F)$. Wir wählen beliebige Vektoren

$$u_1 \in F^{-1}(w_1),\, u_2 \in F^{-1}(w_2),\, \dots,\, u_r \in F^{-1}(w_r).$$

Die Aussage des Satzes ist bewiesen, wenn wir zeigen können, dass

$$u_1,\dots,u_r,v_1,\dots,v_k \tag{5.3}$$

eine Basis von V bildet. Sei dazu $v \in V$ beliebig. Dann hat $F(v)$ eine Darstellung

$$F(v) = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r, \quad \alpha_1,\dots,\alpha_r \in K.$$

Setze $\tilde{v} := \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r$. Dann gilt

$$F(v-\tilde{v}) = F(v) - F(\tilde{v}) = F(v) - \alpha_1 F(u_1) - \cdots - \alpha_r F(u_r) = F(v) - \alpha_1 w_1 - \cdots - \alpha_r w_r = 0.$$

Also ist $v - \tilde{v} \in \mathsf{Kern}(F)$ und hat eine Darstellung

$$v - \tilde{v} = \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k, \quad \beta_1,\dots,\beta_k \in K.$$

Insgesamt gilt also

$$v = \tilde{v} + v - \tilde{v} = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k$$

und damit ist (5.3) Erzeugendensystem für V. Sei nun

$$0 = \alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_r u_r + \beta_1 v_1 + \cdots + \beta_k v_k. \tag{5.4}$$

Anwendung von F auf beide Seiten ergibt $0 = \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_r w_r$. Da $w_1,\dots,w_r$ Basis, folgt $\alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$. Einsetzen in (5.4) zieht $\beta_1 = \cdots = \beta_k = 0$ nach sich, da auch $v_1,\dots,v_k$ Basis ist. Also ist (5.3) linear unabhängig und damit eine Basis. ■

Korollar 5.6 *Seien V,W endlichdimensionale Vektorräume über K mit $\dim V = \dim W$. Dann sind die folgenden Aussagen für $F \in L(V,W)$ äquivalent:*

(i) F ist injektiv;

(ii) F ist surjektiv;

(iii) F ist bijektiv.

Korollar 5.7 *Seien V,W Vektorräume über K mit V endlichdimensional. Dann gilt $V \cong W$ genau dann, wenn W endlichdimensional ist und $\dim V = \dim W$.*

BEWEIS: Ist $V \cong W$, dann gibt es einen Isomorphismus $F \in L(V,W)$, für den $\mathsf{Bild}(F) = W$ und $\mathsf{Kern}(F) = \{0\}$ gelten. Aus der Dimensionsformel von Satz 5.5 folgt $\dim V = \dim \mathsf{Bild}(F) + \dim \mathsf{Kern}(F) = \dim(W)$.

Die andere Richtung, die Konstruktion eines Isomorphismus zwischen Vektorräumen gleicher Dimension, zeigen wir in Satz 5.9 unten. ■

5.1.2 Verkettung von linearen Abbildungen

Die Verkettung von linearen Abbildungen ergibt wieder eine lineare Abbildung.

Satz 5.8 *Seien U,V,W Vektorräume über K und $F \in L(V,W)$, $G \in L(U,V)$. Dann ist $F \circ G \in L(U,W)$.*

BEWEIS:

$$\begin{aligned}
(F\circ G)(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) &= F(G(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)) \\
&\overset{G \text{ linear}}{=} F(\alpha_1 G(v_1) + \alpha_2 G(v_2)) \\
&\overset{F \text{ linear}}{=} \alpha_1 F(G(v_1)) + \alpha_2 F(G(v_2)) \\
&= \alpha_1 (F\circ G)(v_1) + \alpha_2 (F\circ G)(v_2).
\end{aligned}$$

■

Die Reihenfolge der Abbildungen von Satz 5.8 veranschaulicht man sich am besten in einem Diagramm:

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[rr, "F\circ G"] \arrow[dr, "G"'] & & W \\
& V \arrow[ur, "F"'] &
\end{tikzcd}$$

$\mathsf{Abb}(V,W)$, die Menge aller Abbildungen von V nach W, bildet einen Vektorraum mit den folgenden Verknüpfungen für $F_1,F_2 \in \mathsf{Abb}(V,W)$ und $\alpha \in K$:

$$(F_1 + F_2)(v) := F_1(v) + F_2(v), \qquad (\alpha \cdot F_1)(v) := \alpha \cdot F_1(v). \tag{5.5}$$

Man kann ohne grosse Mühe zeigen, dass $L(V,W)$ einen Unterraum von $\mathsf{Abb}(V,W)$ bildet.

Für $V = W$ bildet die Menge der Endomorphismen $L(V,V)$ zusammen mit der Addition wie in (5.5) und der Verkettung als Multiplikation einen Ring.

5.2 Koordinaten und Matrizen

Im folgenden wollen wir die Beziehungen zwischen linearen Abbildungen und Matrizen näher untersuchen. Wir wissen bereits, dass jede Matrix eine lineare Abbildung durch Matrix-Vektor-Multiplikation induziert. Wir werden sehen, dass im gewissen Sinn auch die umgedrehte Aussage gilt. Zunächst holen wir die fehlende Richtung im Beweis von Korollar 5.7 nach.

Satz 5.9 *Seien V,W endlichdimensionale Vektorräume über K mit $\dim(V) = \dim(W) = n$ und entsprechenden Basen $v_1,\dots,v_n$ bzw. $w_1,\dots,w_n$. Dann gibt es genau eine lineare Abbildung $F: V \to W$ mit*

$$F(v_i) = w_i, \qquad i = 1,\dots,n. \tag{5.6}$$

Diese Abbildung ist ein Isomorphismus.

BEWEIS: Sei $v \in V$ mit der Darstellung $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$ mit $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in K$. Diese Darstellung ist nach Lemma 4.10 eindeutig. Setze

$$F(v) := \alpha_1 w_1 + \cdots + \alpha_n w_n.$$

Dann erfüllt F offenbar (5.6). Wir zeigen nun, dass F linear ist. Betrachte dazu einen weiteren Vektor $\tilde{v} \in V$ mit der Darstellung $\tilde{v} = \tilde{\alpha}_1 v_1 + \cdots + \tilde{\alpha}_n v_n$. Für $\beta, \tilde{\beta} \in K$ erhalten wir daraus eine Darstellung für die entsprechende Linearkombination:

$$\beta v + \tilde{\beta}\tilde{v} = \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i + \tilde{\beta}\tilde{\alpha}_i) v_i.$$

Nun folgt die Linearität von F aus

$$F(\beta v + \tilde{\beta}\tilde{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\beta\alpha_i + \tilde{\beta}\tilde{\alpha}_i) w_i = \beta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \tilde{\beta} \sum_{i=1}^{n} \tilde{\alpha}_i w_i = \beta F(v) + \tilde{\beta} F(\tilde{v}).$$

Ausserdem gilt $\mathrm{Kern}(F) = \{0\}$; also ist F injektiv wegen Lemma 5.4 (v) und damit Isomorphismus wegen Korollar 5.6.

Sei $\tilde{F}$ eine weitere lineare Abbildung, die (5.6) erfüllt. Dann gilt für beliebiges $v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$, dass

$$F(v) - \tilde{F}(v) = F\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) - \tilde{F}\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \big(F(v_i) - \tilde{F}(v_i)\big) = 0.$$

Also ist $F = \tilde{F}$ eindeutig bestimmt. ■

Für uns ist vor allem der Spezialfall $K^{n\times 1}$ von Interesse.

Korollar 5.10 *Sei V Vektorraum über K mit einer Basis $\mathscr{B} = (v_1, \dots, v_n)$. Dann gibt es genau einen Isomorphismus*

$$\Phi_{\mathscr{B}} : K^{n\times 1} \to V \quad \text{mit} \quad \Phi_{\mathscr{B}}(e_i) = v_i, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei $e_1, \dots, e_n$ die kanonische Basis im $K^{n\times 1}$ ist. Man nennt $\Phi_{\mathscr{B}}$ das (durch $\mathscr{B}$ bestimmte) ***Koordinatensystem*** *von V.*

Für einen gegebenen Vektor $v \in V$ bezeichnet man $x = \Phi_{\mathscr{B}}^{-1}(v)$ als die **Koordinaten** von v. Um diese zu bestimmen, muss zunächst die Basisdarstellung von v gefunden werden,

$$v = \xi_1 v_1 + \cdots + \xi_n v_n, \tag{5.7}$$

und danach werden die Koeffizienten einfach in einen Spaltenvektor geschrieben: $x = (\xi_1, \dots, \xi_n)^{\mathsf{T}}$. Die Bestimmung von (5.7) ist für sehr spezielle Basen trivial; im allgemeinen muss hierbei aber ein LGS gelöst werden.

Einige Beispiele:

Polynome. Betrachte $K_n[t]$, den Vektorraum der Polynome vom Grad höchstens n und die Basis der Monome: $\mathscr{A} = (1, t, \dots, t^n)$. Üblicherweise werden Polynome genau in dieser Basis dargestellt:

$$p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n \quad \Rightarrow \quad \Phi_{\mathscr{A}}^{-1}(p) = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)^{\mathsf{T}}.$$

Sei nun

$$\mathscr{B} = (v_0, v_1, \dots, v_n) = (1, 1+t, 1+t+t^2, \dots, 1+t+\cdots+t^n)$$

eine weitere Basis. Um für ein gegebenes Polynom $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ die Darstellung in dieser Basis zu bestimmen, setzen wir in den Ansatz $p = \beta_0 v_0 + \cdots \beta_n v_n$ die Beziehung $v_i = 1 + t + \cdots + t^i$ ein und erhalten

$$p = \sum_{j=0}^{n} \beta_j v_j = \sum_{j=0}^{n} \sum_{i=0}^{j} \beta_j t^i = \sum_{i=0}^{n} \Big(\sum_{j=i}^{n} \beta_j \Big) t^i.$$

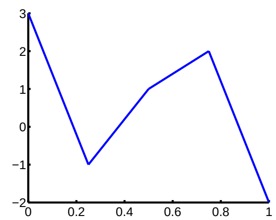
Koeffizientenvergleich mit $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_n t^n$ ergibt das LGS

$$\sum_{j=i}^{n} \beta_j = \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}.$$

Die Lösung dieses LGS, das man einfach mit Rückwärtseinsetzen lösen kann, ergibt die Koordinaten $\Phi_{\mathscr{B}}^{-1}(p)$.

Stetige, stückweise lineare Funktionen. Wir betrachten auf dem Intervall $[0,1]$ eine Unterteilung in n gleich grosse Teilintervalle $[0,h], [h,2h], \dots, [(n-1)h, 1]$ mit $h = 1/n$. Sei V der Vektorraum der reellen Funktionen, die auf jedem Teilintervall linear (also von der Form $\alpha t + \beta$) und auf dem gesamten Intervall stetig sind.

Für $n = 4$ ist eine solche Funktion in der rechten Abbildung dargestellt. Eine Basis für V lässt sich wie folgt definieren:



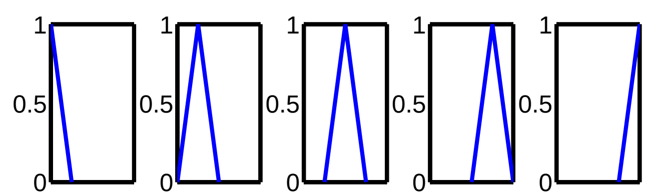
$$b_0(t) := \max\{1 - t/h, 0\},$$

$$b_i(t) := \begin{cases} (t - (i-1)h)/h, & t \in [(i-1)h, ih], \\ -(t - (i+1)h)/h, & t \in [ih, (i+1)h], \\ 0, & \text{sonst}, \end{cases}$$

$$b_n(t) := \max\{(t - (n-1)h)/h, 0\},$$

mit $i = 1, \dots, n-1$.

Illustration der 5 Basisfunktionen für $n = 4$:



Die Darstellung einer gegebenen stückweisen linearen Funktion f ist einfach

$$f(t) = f(0) b_0(t) + f(h) b_1(t) + \cdots + f\big((n-1)h\big) b_{n-1}(t) + f(1) b_n(t).$$

Die Koordinaten von f sind also $\big(f(0), f(h), \dots, f(1)\big)^{\mathsf{T}}$. Für die oben dargestellte Funktion sind die Koordinaten $(3, -1, 1, 2, -2)^{\mathsf{T}}$.

5.2.1 Matrixdarstellung von linearen Abbildungen

Seien weiterhin V,W endlichdimensionale Vektorräume über K mit Basen $\mathscr{V} = (v_1,\dots,v_n)$ bzw. $\mathscr{W} = (w_1,\dots,w_m)$. Für $F \in L(V,W)$ haben wir das folgende Diagramm

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "F"] & W \\ K^{n\times 1} \arrow[u, "\Phi_{\mathscr{V}}"] \arrow[r, "F_{\mathscr{V},\mathscr{W}}"] & K^{m\times 1} \arrow[u, "\Phi_{\mathscr{W}}"'] \end{tikzcd}$$

Aufgrund von Lemma 5.4 (vii) und Satz 5.8 ist

$$F_{\mathscr{V},\mathscr{W}} := \Phi_{\mathscr{W}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathscr{V}} \tag{5.8}$$

lineare Abbildung von $K^{n\times 1}$ nach $K^{m\times 1}$. Das folgende Lemma zeigt, dass es genau eine Matrix gibt, welche diese lineare Abbildung beschreibt.

Lemma 5.11 *Sei $F \in L(K^{n\times 1},K^{m\times 1})$. Dann gibt es genau eine Matrix $A \in K^{m\times n}$, so dass $F(x) = Ax$.*

BEWEIS: Für $x = e_j$ mit dem j-ten Einheitsvektor e_j folgt $Ae_j = F(e_j)$, deswegen muss A die Form $A = \big(F(e_1),F(e_2),\dots,F(e_n)\big)$ haben. Ausserdem gilt

$$Ax = \sum_{i=1}^{n} x_i F(e_i) = F\Big(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i\Big) = F(x).$$

$\blacksquare$

Definition 5.12 *Die gemäss Lemma 5.11 zu $F_{\mathscr{V},\mathscr{W}}$ gehörige Matrix heisst die* ***Matrixdarstellung*** *[matrix representation] von $F \in L(V,W)$ bezüglich der Basen $\mathscr{V}$ von V und $\mathscr{W}$ von W. Diese Matrix wird mit $[F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}}$ bezeichnet.*

Die obige Herleitung war recht abstrakt und wir werden daher im Folgenden das konkrete Vorgehen zur Bestimmung einer Matrixdarstellung erläutern. Nach dem Beweis von Lemma 5.11 ist die j-te Spalte a_j von $[F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}}$ durch

$$a_j = F_{\mathscr{V},\mathscr{W}}(e_j) = \Phi_{\mathscr{W}}^{-1}\big(F(\Phi_{\mathscr{V}}(e_j))\big) = \Phi_{\mathscr{W}}^{-1}\big(F(v_j)\big)$$

gegeben. Für $F(v_j) \in W$ gibt es eindeutig bestimmte Koeffizienten $a_{1j},\dots,a_{mj} \in K$, so dass

$$F(v_j) = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{mj}w_m.$$

Also folgt schlussendlich

$$F_{\mathscr{V},\mathscr{W}}(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad [F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}. \tag{5.9}$$

Beispiel 5.2: Sei $V = W = \mathbb{R}_3[t]$ und betrachte die Ableitung

$$D \in L(V,V), \quad D(p) := p'.$$

Als Basis von V sei $\mathscr{A} = (1,t,t^2,t^3)$ gewählt. Um die entsprechende Matrixdarstellung zu bestimmen, wird D auf die einzelnen Basisvektoren angewandt:

$$D(1) = 0, \quad D(t) = 1, \quad D(t^2) = 2t, \quad D(t^3) = 3t^2.$$

In diesem Fall kann man die Darstellung der erhaltenen Vektoren in $\mathscr{A}$ einfach ablesen und es folgt

$$[D]_{\mathscr{A},\mathscr{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

$\blacklozenge$

Satz 5.13 *Seien $\mathscr{V},\mathscr{W}$ Basen von endlichdimensionalen Vektorräumen V,W und $n = \dim(V)$, $m = \dim(W)$. Dann ist die Abbildung*

$$L(V,W) \to K^{m\times n}, \qquad F \mapsto [F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}},$$

ein Isomorphismus, also gilt $L(V,W) \cong K^{m\times n}$.

BEWEIS: Der Nachweis der Linearität erfolgt durch einfaches Nachrechnen. Es bleibt zu überprüfen, dass der Kern der Abbildung trivial ist. Sei dazu $[F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}} = 0 \in K^{m\times n}$, also

$$\Phi_{\mathscr{W}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathscr{V}} = 0 \quad\Rightarrow\quad \Phi_{\mathscr{W}} \circ \Phi_{\mathscr{W}}^{-1} \circ F \circ \Phi_{\mathscr{V}} \circ \Phi_{\mathscr{V}}^{-1} = 0 \quad\Rightarrow\quad F = 0.$$

$\blacksquare$

Das folgende sehr elegante Resultat zeigt, dass die Verkettung von linearen Abbildungen der Multiplikation von Matrizen entspricht.

Satz 5.14 *Seien U,V,W endlichdimensionale Vektorräume mit Basen $\mathscr{U},\mathscr{V},\mathscr{W}$. Für lineare Abbildungen $G: U \to V$ und $F: V \to W$ gilt:*

$$[F \circ G]_{\mathscr{U},\mathscr{W}} = [F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}} \cdot [G]_{\mathscr{U},\mathscr{V}}.$$

BEWEIS: Setze $m = \dim(U), n = \dim(V), r = \dim(W)$ und $A = [F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}}$, $B = [G]_{\mathscr{U},\mathscr{V}}$. Dann gilt das folgende kommutative Diagramm [19]:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[rr, "F\circ G"] \arrow[dr, "G"'] & & W \\ & V \arrow[ur, "F"'] & \\ & K^{n\times 1} \arrow[u, "\Phi_{\mathscr{V}}"'] \arrow[dr, "A"] & \\ K^{m\times 1} \arrow[uuu, "\Phi_{\mathscr{U}}"] \arrow[ur, "B"] \arrow[rr, "A\cdot B"] & & K^{r\times 1} \arrow[uuu, "\Phi_{\mathscr{W}}"'] \end{tikzcd}$$

[19] In dieser Vorlesung ist ein Diagramm immer ein gerichteter Graph mit Vektorräumen als Knoten und linearen Abbildungen als gerichtete Kanten. Ist die lineare Abbildung in einer Richtung der Kante bijektiv, so entspricht die Rückrichtung der inversen Abbildung. Ein Weg durch den Graph beschreibt eine Verkettung der linearen Abbildungen auf den durchlaufenen Kanten. Ein Diagramm heisst kommutativ, wenn für zwei beliebig gewählte Knoten jeder Weg zwischen diesen beiden Knoten die gleiche lineare Abbildung ergibt. Im vorliegenden Fall ist das Diagramm kommutativ, weil alle drei- und viereckigen Teildiagramme kommutativ sind.

Aus diesem Diagramm lässt sich die gewünschte Beziehung “ablesen”, indem man zwei verschiedene Wege von $K^{m\times 1}$ nach $K^{r\times 1}$ wählt: $AB = [F\circ G]_{\mathscr{U},\mathscr{W}}$.

Wem das zu schnell ging, das ganze noch einmal “zu Fuss” für einen beliebigen Vektor $x \in K^{m\times 1}$:

$$ABx = \left(\Phi_{\mathscr{W}}^{-1}\circ F\circ \Phi_{\mathscr{V}}\circ \Phi_{\mathscr{V}}^{-1}\circ G\circ \Phi_{\mathscr{U}}\right)(x) = \left(\Phi_{\mathscr{W}}^{-1}\circ (F\circ G)\circ \Phi_{\mathscr{U}}\right)(x).$$

■

Korollar Seien $\mathscr{V},\mathscr{W}$ Basen von endlichdimensionalen Vektorräumen V,W mit $\dim(V) = \dim(W)$. Dann gilt für einen Isomorphismus $F\in L(V,W)$:

$$\left[F^{-1}\right]_{\mathscr{W},\mathscr{V}} = [F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}}^{-1}.$$

BEWEIS: Aus Satz 5.14 folgt

$$\left[F^{-1}\right]_{\mathscr{W},\mathscr{V}}[F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}} = \left[F^{-1}\circ F\right]_{\mathscr{V},\mathscr{V}} = [I]_{\mathscr{V},\mathscr{V}} = I_{\dim(V)},$$

wobei $I:\mathscr{V}\to\mathscr{V}$ die Identität ist. Damit ist $\left[F^{-1}\right]_{\mathscr{W},\mathscr{V}}$ inverse Matrix von $[F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}}$. ■

5.2.2 Koordinatentransformationen

Im Beispiel auf Seite 89 waren zwei Basen $\mathscr{A},\mathscr{B}$ für Polynome vom Grad höchstens 3 gegeben und wir sind von der Basis $\mathscr{A}$ (in der die Darstellung einfach ist) zur Basis $\mathscr{B}$ gewechselt. Für die Bestimmung der neuen Koordinaten nach diesem Basiswechsel war die Lösung eines LGS notwendig. Dies wollen wir nun im Allgemeinen durchführen. Seien

$$\mathscr{A} = (v_1,\ldots,v_n), \qquad \mathscr{B} = (w_1,\ldots,w_n)$$

Basen eines Vektorraums V, mit den zugehörigen Koordinatensystemen $\Phi_{\mathscr{A}} : K^{n\times 1}\to V$, $\Phi_{\mathscr{B}} : K^{n\times 1}\to V$. Das dazugehörige Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^{n\times 1} \arrow[rr, "I_{\mathscr{A},\mathscr{B}}"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathscr{A}}"'] & & K^{n\times 1} \arrow[dl, "\Phi_{\mathscr{B}}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

Für die Abbildung $I_{\mathscr{A},\mathscr{B}} : K^{n\times 1}\to K^{n\times 1}$ von den Koordinaten in $\mathscr{A}$ zu den Koordinaten in $\mathscr{B}$ gilt also

$$I_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = \Phi_{\mathscr{B}}^{-1}\circ\Phi_{\mathscr{A}}.$$

Also ist $[I]_{\mathscr{A},\mathscr{B}}$ gerade die Matrixdarstellung der Identitätsabbildung $I: V\to V$, $I(v) = v$. Diese Matrix wird als **Transformationsmatrix** oder **Basisübergangsmatrix** bezeichnet. Um $[I]_{\mathscr{A},\mathscr{B}}\in K^{n\times n}$ zu bestimmen, sammelt man die Koeffizienten der Basisdarstellungen

$$v_j = a_{1j}w_1 + a_{2j}w_2 + \cdots + a_{nj}w_n$$

wie in (5.9) in einer Matrix. Die Bestimmung der Koordinaten von v_j erfordert im allgemeinen die Lösung eines linearen Gleichungssystems.

Im wichtigen Spezialfall $V = K^{n\times 1}$ können wir die Basiselemente von $\mathscr{A}$ und $\mathscr{B}$ in Spalten von Matrizen

$$A = \left(v_1,\ldots,v_n\right)\in K^{n\times n}, \qquad B = \left(w_1,\ldots,w_n\right)\in K^{n\times n}$$

schreiben. Dann gilt $Ax = \Phi_{\mathscr{A}}(x)$, $Bx = \Phi_{\mathscr{B}}(x)$ und wir erhalten aus Satz 5.14 die Matrixdarstellung

$$[I]_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = B^{-1}A.$$

Wir kommen jetzt zum zentralen Resultat dieses Abschnitts, das beschreibt wie sich die Darstellungsmatrizen bei einem Wechsel der Basen im Bild- und Urbildraum ändern.

Satz 5.15 *Seien V,W endlichdimensionale Vektorräume, $\mathscr{V},\mathscr{V}'$ Basen von V sowie $\mathscr{W},\mathscr{W}'$ Basen von W. Dann gilt für die Matrixdarstellungen von $F\in L(V,W)$ in den jeweiligen Basispaaren die folgende Beziehung:*

$$[F]_{\mathscr{V}',\mathscr{W}'} = [I]_{\mathscr{W},\mathscr{W}'}\cdot[F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}}\cdot[I]_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}^{-1}. \tag{5.11}$$

BEWEIS: Wir betrachten das folgende Diagramm:

$$\begin{tikzcd} K^{n\times 1} \arrow[rrr, "F_{\mathscr{V},\mathscr{W}}"] \arrow[dr, "\Phi_{\mathscr{V}}"] \arrow[dd, "I_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}"'] & & & K^{m\times 1} \arrow[dl, "\Phi_{\mathscr{W}}"'] \arrow[dd, "I_{\mathscr{W},\mathscr{W}'}"] \\ & V \arrow[r, "F"] & W & \\ K^{n\times 1} \arrow[rrr, "F_{\mathscr{V}',\mathscr{W}'}"] \arrow[ur, "\Phi_{\mathscr{V}'}"'] & & & K^{m\times 1} \arrow[ul, "\Phi_{\mathscr{W}'}"] \end{tikzcd}$$

Jedes der Teildiagramme ist kommutativ; also ist das gesamte Diagramm kommutativ. Insbesondere ergibt sich:

$$F_{\mathscr{V}',\mathscr{W}'} = I_{\mathscr{W},\mathscr{W}'}\circ F_{\mathscr{V},\mathscr{W}}\circ I_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}^{-1}$$

indem man entsprechende Wege durch das Diagramm wählt. Anwendung von Satz 5.14 und den darauffolgenden Korollar ergibt (5.11). ■

Satz 5.11 zeigt, dass zwei Matrixdarstellungen einer linearen Abbildung immer äquivalent zueinander sind, im Sinne der Äquivalenz von Matrizen aus Abschnitt 3.3.

Korollar 5.16 *Sei $F\in L(V,W)$. Dann gibt es Basen $\mathscr{V}',\mathscr{W}'$, so dass*

$$[F]_{\mathscr{V}',\mathscr{W}'} = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.12}$$

wobei $r = \dim \mathrm{Bild}(V)$.

BEWEIS: Betrachte die Matrix $[F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}}$ für beliebige Basen $\mathscr{V} = (v_1,\ldots,v_n)$, $\mathscr{W} = (w_1,\ldots,w_m)$ von V bzw. W. Nach Satz 3.9 gibt es invertierbare Matrizen $P\in K^{m\times m}$, $Q\in K^{n\times n}$, so dass

$$\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = P[F]_{\mathscr{V},\mathscr{W}}Q^{-1}. \tag{5.13}$$

Wähle jetzt $\mathscr{V}' = (v_1',\ldots,v_n')$ mit $v_j' := \Phi_{\mathscr{V}}\left(Q\cdot\Phi_{\mathscr{V}}^{-1}(v_j)\right)$, also gilt $[I]_{\mathscr{V},\mathscr{V}'} = Q$. Analog kann $\mathscr{W}'$ mit $[I]_{\mathscr{W},\mathscr{W}'} = P$ gewählt werden. Eingesetzt in (5.13) folgt aus Satz 5.11 die Beziehung (5.12). ■

Für einem Endomorphismus $F\in L(V,V)$ wählt man im Bild- und Urbildraum die gleiche Basis $\mathscr{V}$. Bei einem Basiswechsel von $\mathscr{V}$ zu $\mathscr{V}'$ ändert sich die Darstellungsmatrix gemäss Satz 5.11 wie folgt:

$$[F]_{\mathscr{V}',\mathscr{V}'} = [I]_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}\cdot[F]_{\mathscr{V},\mathscr{V}}\cdot[I]_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}^{-1}. \tag{5.14}$$

Diese Transformation ist spezieller als eine Äquivalenztransformation.

Definition 5.17 *Zwei Matrizen $A, B \in K^{n\times n}$ heissen* ***ähnlich*** *[similar] zueinander wenn es eine invertierbare Matrix $P \in K^{n\times n}$ gibt mit $A = PBP^{-1}$.*

Wie Äquivalenz ist auch Ähnlichkeit von Matrizen eine Äquivalenzrelation auf $K^{n\times n}$. Allerdings ist es bei Ähnlichkeit wesentlich schwieriger einen möglichst einfachsten Äquivalenzklassenvertreter (also auch eine möglichst einfache Darstellung eines Endomorphismus) zu finden.

Beispiel 5.3: Wir setzen Beispiele 5.1 und 5.2 fort. Die Darstellung der Ableitung $D \in L(V,V)$ mit $V = \mathbb{R}_3[t]$ bezüglich der Standardbasis $\mathscr{A} = (1,t,t^2,t^3)$ ist in (5.10) gegeben. Für die Basis $\mathscr{B} = (1, 1+t, 1+t+t^2, 1+t+t^2+t^3)$ gilt

$$[I]_{\mathscr{B},\mathscr{A}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [I]_{\mathscr{A},\mathscr{B}} = [I]^{-1}_{\mathscr{B},\mathscr{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Also ist die Darstellung von D bezüglich $\mathscr{B}$ die Matrix

$$\begin{aligned} [D]_{\mathscr{B},\mathscr{B}} &= [I]_{\mathscr{A},\mathscr{B}}[D]_{\mathscr{A},\mathscr{A}}[I]^{-1}_{\mathscr{A},\mathscr{B}} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Eine Probe:

$$p = 1+t+t^2+t^3 \quad \Rightarrow \quad \Phi^{-1}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad [D]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}\Phi^{-1}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\Phi_{\mathscr{B}}\big([D]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}\Phi^{-1}_{\mathscr{B}}(p)\big) = -1-(1+t)+3(1+t+t^2) = 1+2t+3t^2 = p'.$$

♦

Kapitel 6

Determinanten

Determinanten von Matrizen und linearen Abbildungen spielten in der historischen Entwicklung der linearen Algebra eine wichtige Rolle. Vor der Entwicklung der modernen an Matrizen orientierten Darstellung im 20. Jahrhundert, wurden Aussagen und Beweise vorzugsweise in der Sprache von Determinanten ausgedrückt. Heute ist dies zum Glück anders[20]; Determinanten tragen aber weiterhin zum theoretischen Verständnis bei, insbesondere im nächsten Kapitel beim Nachweis der Existenz von Eigenwerten.

6.1 Definition

Wir erinnern daran, dass S_n die Menge aller Permutationen von $\{1,2,\ldots,n\}$, also die Menge aller bijektiven Abbildungen

$$\sigma : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}.$$

bezeichnet. Im folgenden wird das Vorzeichen einer Permutation eine wichtige Rolle spielen.

Definition 6.1 *Sei $\sigma \in S_n$ mit $n \geq 2$.*

(i) Ein Paar $(i,j) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ mit $1 \leq i < j \leq n$ heisst ***Fehlstand*** *(auch:* ***Inversion****) von σ wenn $\sigma(i) > \sigma(j)$.*

(ii) Sei k die Anzahl aller Fehlstände von σ. Dann heisst $\mathsf{sgn}(\sigma) := (-1)^k$ das ***Vorzeichen*** *[sign] von σ.*

Für $n = 1$ gibt es nur eine Permutation, nämlich $\mathrm{id} \in S_1$, deren Vorzeichen als 1 definiert wird. Auch für $n > 1$ hat $\mathrm{id} \in S_n$ keine Fehlstände und es gilt $\mathsf{sgn}(\mathrm{id}) = 1$.

Beispiel 6.1: Die Permutation

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

hat die Fehlstände $(2,3),(2,4)$; also gilt $\mathsf{sgn}(\sigma) = (-1)^2 = 1$. ♦

[20] Wer sich einmal die Mühe macht und eine frühe Arbeit der linearen Algebra aus dem Göttinger Digitalisierungszentrum (`http://gdz.sub.uni-goettingen.de`) herunterlädt und durchliest, wird tiefe Dankbarkeit für die modernere Darstellung empfinden.

Definition 6.2 *Sei R kommutativer Ring mit Eins. Die* ***Determinante*** *[determinant] einer Matrix $A \in R^{n\times n}$ ist*

$$\det(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}. \tag{6.1}$$

Zunächst (6.1) noch einmal in Worten: Für eine feste Permutation σ wird in der i-ten Zeile von A genau ein Eintrag entsprechend dem Wert der Permutation an der Stelle i ausgewählt. Das Produkt der n ausgewählten Einträge wird mit dem Vorzeichen der Permutation versehen und letztendlich werden diese Produkte für alle möglichen Permutationen σ zusammenaddiert. Man beachte, dass es insgesamt $n!$ Permutationen gibt; die Berechnung der Determinante wird also sehr schnell unüberschaubar und für grössere n extrem aufwändig. Wir werden in Abschnitt 6.4.1 eine Möglichkeit zur Berechnung kennenlernen, die wesentlich weniger aufwändig ist.

Bemerkung 6.3 *Die Determinante ist ein Beispiel für eine Funktion, die linear in jedem Eintrag von A ist.*[21] *Eine solche Funktion nennt man* ***multilinear****. Ein weiteres (nicht ganz so wichtiges) Beispiel für eine multilineare Funktion auf $n\times n$-Matrizen ist die* ***Permanente****:*

$$\mathsf{perm}(A) := \sum_{\sigma\in S_n} \prod_{i=1}^{n} a_{i,\sigma(i)}.$$

Diese Definition unterscheidet sich scheinbar nur unwesentlich von Determinanten. Umso erstaunlicher ist es, dass es für Permanenten keinen effizienten Algorithmus gibt; die Berechnung ist im allgemeinen NP-hart bezüglich n.[22]

Determinanten spezieller Matrizen.

1×1-**Matrizen.** Für eine 1x1-Matrix $A = (a_{11})$ gilt per Definition: $\det(A) = a_{11}$.

2×2-**Matrizen.** Für $n = 2$ gibt es zwei Permutationen

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathsf{sgn}(\sigma_1) = 1, \qquad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathsf{sgn}(\sigma_2) = -1.$$

Also gilt für die Determinante einer 2×2-Matrix:

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.}$$

3×3-**Matrizen.** Für $n = 3$ gibt es sechs Permutationen:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$
$$\sigma_4 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_5 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad \sigma_6 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},$$

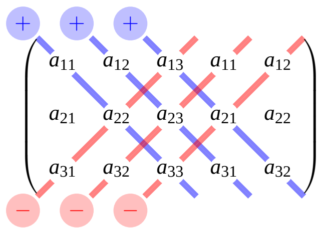
mit $\mathsf{sgn}(\sigma_1) = \mathsf{sgn}(\sigma_2) = \mathsf{sgn}(\sigma_3) = 1$ und $\mathsf{sgn}(\sigma_4) = \mathsf{sgn}(\sigma_5) = \mathsf{sgn}(\sigma_6) = -1$. Also gilt für die Determinante einer 3×3-Matrix:

[21] Linearität ist hier im Sinne von Funktionen gemeint und nicht im Sinne von Abbildungen!

[22] Für Matrizen mit nichtnegativen Einträgen gibt es zumindest einigermassen effiziente approximative Algorithmen; siehe [M. Jerrum, A. Sinclair und E. Vigoda. A polynomial-time approximation algorithm for the permanent of a matrix with nonnegative entries. J. ACM 51 (2004), Nr. 4, 671–697].

$$\det(A) = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$
$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Diese sogenannte **Regel von Sarrus** lässt sich leichter mit dem folgenden Schema merken:



Diagonalmatrizen. Bei einer Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})$ gibt es nur eine Permutation σ für die keine der Faktoren $d_{1,\sigma(1)}d_{2,\sigma(2)}\cdots d_{n,\sigma(n)}$ zwingend Null ist, nämlich $\sigma = \mathrm{id}$. Also gilt

$$\det\big(\operatorname{diag}(d_{11}, d_{22}, \dots, d_{nn})\big) = d_{11}d_{22}\cdots d_{nn}.$$

Permutationsmatrizen. Betrachte $\pi \in S_n$ mit der dazugehörigen Permutationsmatrix

$$P_\pi = \begin{pmatrix} e^\top_{\pi(1)} \\ \vdots \\ e^\top_{\pi(n)} \end{pmatrix}$$

Dann ist jeder Summand in (6.1) für $\sigma \neq \pi$ Null. Also gilt

$$\det(P_\pi) = \operatorname{sgn}(\pi)\prod_{i=1}^{n}\underbrace{p_{i,\pi(i)}}_{=1} = \operatorname{sgn}(\pi). \tag{6.2}$$

Matrizen mit Nullzeile. Hat die Matrix $A \in R^{n\times n}$ eine Nullzeile so ist in jedem Summanden von (6.1) mindestens ein Faktor Null und somit folgt $\det(A) = 0$.

Um wichtige Eigenschaften von Determinanten nachweisen zu können, benötigen wir kompaktere Charakterisierungen des Vorzeichens.

Lemma 6.4 *Sei $\sigma \in S_n$. Dann gilt*

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}.$$

BEWEIS: Für $n = 1$ gilt die Formel trivialerweise. Sei nun $n > 1$. Dann gilt die Beziehung

$$\prod_{1\le i<j\le n}|\sigma(j)-\sigma(i)| = \prod_{1\le i<j\le n}(j-i). \tag{6.3}$$

Streng formal sieht man dies wie folgt ein:

$$\prod_{i<j}|\sigma(j)-\sigma(i)| = \Bigg(\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(i)<\sigma(j)}}(\sigma(j)-\sigma(i))\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{i<j\\ \sigma(j)<\sigma(i)}}(\sigma(i)-\sigma(j))\Bigg)$$
$$= \Bigg(\prod_{\substack{\sigma^{-1}(\tilde i)<\sigma^{-1}(\tilde j)\\ \tilde i<\tilde j}}(\tilde j-\tilde i)\Bigg)\Bigg(\prod_{\substack{\sigma^{-1}(\tilde j)<\sigma^{-1}(\tilde i)\\ \tilde i<\tilde j}}(\tilde j-\tilde i)\Bigg) = \prod_{\tilde i<\tilde j}(\tilde j-\tilde i).$$

Hierbei wurde im letzten Schritt ausgenutzt, dass für jedes $\tilde j > \tilde i$ entweder $\sigma^{-1}(\tilde i) < \sigma^{-1}(\tilde j)$ oder $\sigma^{-1}(\tilde j) < \sigma^{-1}(\tilde i)$ gelten muss. Der entscheidende Punkt beim Nachweis von (6.3) ist, dass sich die Faktoren auf der linken Seite beim Vertauschen von i und j nicht ändern.

Bezeichnet nun k die Anzahl der Fehlstände, so gilt

$$\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{|\sigma(j)-\sigma(i)|} = (-1)^k = \operatorname{sgn}(\sigma)$$

und zusammen mit (6.3) folgt die Behauptung. ■

Satz 6.5 *Seien $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$. Dann gilt $\operatorname{sgn}(\sigma_1\circ\sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2)$.*

BEWEIS: Anwendung von Lemma 6.4 ergibt:

$$\operatorname{sgn}(\sigma_1\circ\sigma_2) = \prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma_1(\sigma_2(i))-\sigma_1(\sigma_2(j))}{i-j}$$
$$= \Bigg(\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma_1(\sigma_2(i))-\sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i)-\sigma_2(j)}\Bigg)\Bigg(\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma_2(i)-\sigma_2(j)}{i-j}\Bigg)$$
$$= \Bigg(\prod_{1\le\sigma_2(i)<\sigma_2(j)\le n}\frac{\sigma_1(\sigma_2(i))-\sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i)-\sigma_2(j)}\Bigg)\operatorname{sgn}(\sigma_2)$$
$$= \Bigg(\prod_{1\le i<j\le n}\frac{\sigma_1(i)-\sigma_1(j)}{i-j}\Bigg)\operatorname{sgn}(\sigma_2) = \operatorname{sgn}(\sigma_1)\operatorname{sgn}(\sigma_2).$$

Hierbei wurde im vorletzten Schritt eine Beziehung ausgenutzt, die sich analog wie 6.3 beweise lässt. ■

Verwendet man Satz 6.5 mit $\sigma_1 = \sigma$ und $\sigma_2 = \sigma^{-1}$ für ein $\sigma \in S_n$, so folgt

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Satz 6.5 abstrakter ausgedrückt: $\operatorname{sgn} : S_n \to \{+1,-1\}$ ist Gruppenhomomorphismus zwischen den Gruppen $(S_n, \circ)$ und $(\{+1,-1\}, \cdot)$.

Wir erinnern an den Spezialfall der Transposition von zwei Elementen:

$$\tau = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & i-1 & i & i+1 & \cdots & j-1 & j & j+1 & \cdots & n \\ 1 & \cdots & i-1 & j & i+1 & \cdots & j-1 & i & j+1 & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad 1\le i<j\le n. \tag{6.4}$$

Man sieht leicht (durch Abzählen), dass τ insgesamt $2(j-i)-1$ Fehlstände hat, also gilt $\mathrm{sgn}(\tau)=-1$. Jede Permutation lässt sich einfach Schritt für Schritt in eine Verkettung von Transpositionen zerlegen, z.B.:

$$\begin{aligned}\sigma &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

Man sieht leicht, dass weder die Zerlegung an sich noch deren Länge eindeutig sind. Wegen Satz 6.5 gilt aber zumindest, dass sich eine Permutation σ immer entweder in eine gerade Anzahl oder in eine ungerade Anzahl von Transpositionen zerlegen lässt.

Korollar 6.6 *Für $\sigma\in S_n$ gilt $\mathrm{sgn}(\sigma)=+1$ ($\mathrm{sgn}(\sigma)=-1$) genau dann wenn σ sich in eine gerade (ungerade) Anzahl von Transpositionen zerlegen lässt.*

Aufgrund des Resultats von Korollar 6.6 nennt man eine Permutation σ mit $\mathrm{sgn}(\sigma)=1$ **gerade** und ansonsten **ungerade**.

6.2 Eigenschaften

Lemma 6.7 *Ist $A\in R^{n\times n}$ obere oder untere Dreiecksmatrix, so gilt*

$$\det(A)=a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

BEWEIS: Sei zunächst A untere Dreiecksmatrix. Wir bestimmen alle Permutationen σ für die das Produkt $\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)}$ nicht zwingend Null ist. Es muss $\sigma(1)=1$ gelten, da in der ersten Zeile von A nur das Diagonalelement verschieden von Null sein kann. Analog muss $\sigma(2)\in\{1,2\}$ gelten, da aber bereits $\sigma(1)=1$ gilt und σ bijektiv ist, folgt $\sigma(2)=2$. Diese Argumentation fortgesetzt ergibt $\sigma(3)=3,\dots,\sigma(n)=n$. Also kann das Produkt nur für $\sigma=\mathrm{id}$ verschieden von Null sein. Daraus folgt die Behauptung.

Für eine obere Dreiecksmatrix geht man analog in umgedrehter Reihenfolge vor. ■

Lemma 6.8 *Hat $A\in R^{n\times n}$, $n\geq 2$, zwei identische Zeilen, so gilt $\det(A)=0$.*

BEWEIS: Sei A zunächst beliebig und betrachte $\tilde A=P_{ij}A$; in $\tilde A$ sind also die Zeilen i und j von A vertauscht. Mit der in (6.4) definierten Transposition τ kann man dies elementweise schreiben als $\tilde a_{ij}=a_{\tau(i),j}$. Wir haben

$$\begin{aligned}\det(\tilde A) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n \tilde a_{i,\sigma(i)} = \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{\tau(i),\sigma(i)} \\ &\overset{k=\tau(i)}{=} \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^n a_{k,\sigma(\tau^{-1}(k))} \overset{\pi=\sigma\circ\tau^{-1}}{=} \sum_{\pi\in S_n}\mathrm{sgn}(\pi\circ\tau)\prod_{k=1}^n a_{k,\pi(k)} \\ &\overset{\text{Satz 6.5}}{=} -\sum_{\pi\in S_n}\mathrm{sgn}(\pi)\prod_{k=1}^n a_{k,\pi(k)} = -\det(A).\end{aligned}$$

Sind in A die Zeilen i und j gleich, so gilt $\tilde A=A$, also $\det(A)=\det(\tilde A)=-\det(A)$. Daraus folgt $\det(A)=0$. ■

Der folgende Satz beschreibt die Wirkung der in Abschnitt 3.1 kennengelernten Elementarmatrizen auf die Determinante einer Matrix.

Lemma 6.9 *Sei $A\in R^{n\times n}$ und $n\geq 2$.*

(i) $\det(M_i(\lambda)A)=\lambda\cdot\det(A)=\det(M_i(\lambda))\cdot\det(A)$ *für* $\lambda\in R, 1\leq i\leq n$;

(ii) $\det(G_{ij}(\lambda)A)=\det(A)=\det(G_{ij}(\lambda))\cdot\det(A)$ *und* $\det(G_{ij}^{\mathsf T}(\lambda)A)=\det(A)=\det(G_{ij}^{\mathsf T}(\lambda))\cdot\det(A)$ *für* $\lambda\in R, 1\leq i<j\leq n$;

(iii) $\det(P_{ij}A)=-\det(A)=\det(P_{ij})\cdot\det(A)$ *für* $1\leq i<j\leq n$.

BEWEIS: Zu (i).

$$\begin{aligned}\det(M_i(\lambda)A) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\lambda a_{i,\sigma(i)}\prod_{k\neq i}a_{k,\sigma(k)}\right) \\ &= \lambda\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = \lambda\cdot\det(A).\end{aligned}$$

Da $M_i(\lambda)$ Diagonalmatrix ist, folgt $\det(M_i(\lambda))=\lambda$ und damit die Beziehung $\lambda\cdot\det(A)=\det(M_i(\lambda))\cdot\det(A)$.

Zu (ii).

$$\begin{aligned}\det(G_{ij}(\lambda)A) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(\left(a_{j,\sigma(j)}+\lambda a_{i,\sigma(i)}\right)\prod_{k\neq j}a_{k,\sigma(k)}\right) \\ &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\prod_{k=1}^n a_{k,\sigma(k)}+\lambda\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)\left(a_{i,\sigma(i)}\prod_{k\neq j}a_{k,\sigma(k)}\right) \\ &= \det(A)+0.\end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt ausgenutzt, dass die zweite Summe die Determinante der Matrix A mit der j-ten Zeile durch die i-te Zeile ersetzt ist, also ist sie Determinante einer Matrix mit zwei gleichen Zeilen und damit gemäss Lemma 6.8 Null. Da $G_{ij}(\lambda)$ untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen ist, folgt $\det(G_{ij}(\lambda))=1$ und damit die Beziehung $\det(A)=\det(G_{ij}(\lambda))\cdot\det(A)$. Für $G_{ij}^{\mathsf T}(\lambda)$ erfolgt der Nachweis analog.

Zu (iii). Die erste Beziehung, $\det(P_{ij}A)=-\det(A)$ wird im Beweis von Lemma 6.8 gezeigt. Die zweite Beziehung folgt aus $\det(P_{ij})=\mathrm{sgn}(\tau)=-1$ mit der in (6.4) definierten Transposition τ. ■

Lemma 6.9 kompakt ausgedrückt: Die Determinante des Produkts einer Elementarmatrix mit einer beliebigen Matrix entspricht dem Produkt der Determinanten der beiden Faktoren. Der folgende wichtige Satz zeigt, dass diese Eigenschaft für das Produkt von beliebigen Matrizen gilt.

Satz 6.10 *Sei K Körper und $A,B\in K^{n\times n}$. Dann gilt $\det(AB)=\det(A)\cdot\det(B)$.*

BEWEIS: Nach Satz 3.6 gibt es eine invertierbare Matrix $Q=S_1\cdots S_m$ mit Elementarmatrizen $S_1,\dots,S_m$, so dass $\tilde A=QA$ in Treppennormalform ist. Da die Inverse einer Elementarmatrix wieder Elementarmatrix ist, folgt aus der wiederholten Anwendung von Lemma 6.9:

$$\begin{aligned}\det(A) &= \det\left(S_m^{-1}\cdots S_1^{-1}\tilde A\right)=\det(S_m^{-1})\cdot\det\left(S_{m-1}^{-1}\cdots S_1^{-1}\tilde A\right) \\ &= \cdots = \det(S_m^{-1})\cdots\det(S_1^{-1})\det(\tilde A)\end{aligned} \tag{6.5}$$

sowie

$$\det(AB) = \det(S_m^{-1}) \cdots \det(S_1^{-1}) \det(\tilde{A}B). \tag{6.6}$$

Ist A nicht invertierbar, so enthält $\tilde{A}$ und damit auch $\tilde{A}B$ eine Nullzeile; also folgt $\det(\tilde{A}) = \det(\tilde{A}B) = 0$ und, mit (6.5)–(6.6), $\det(AB) = 0 = \det(A) = \det(A) \cdot \det(B)$. Ist A invertierbar, so ist $\tilde{A} = I$ (siehe Satz 3.6) und aus (6.5)–(6.6) folgt die Behauptung. ■

Satz 6.10 gilt auch für Matrizen über einen kommutativen Ring mit Eins; der Beweis kann dann aber nicht mit Hilfe der TNF durchgeführt werden.

Korollar 6.11 *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann gelten:*

(i) A ist genau dann invertierbar wenn $\det(A) \neq 0$;

(ii) $\det\left(A^{-1}\right) = 1/\det(A)$ für A invertierbar;

(iii) $\det\left(P^{-1}AP\right) = \det(A)$ für jede invertierbare Matrix $P \in K^{n\times n}$.

BEWEIS: Teil (i) folgt aus dem Beweis von Satz 6.10, insbesondere (6.5). Teil (ii) folgt aus der Aussage von Satz 6.10 mit $1 = \det(I) = \det\left(AA^{-1}\right) = \det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right)$. Teil (iii) kann man nun einfach nachrechnen:

$$\det\left(P^{-1}AP\right) = \det\left(P^{-1}\right) \cdot \det(A) \cdot \det(P) = \frac{\det(P)}{\det(P)} \det(A) = \det(A).$$

■

Bemerkung 6.12 *Man beachte, dass sich die Aussage von Korollar 6.11 (i) nicht auf Ringe verallgemeinern lässt. Zum Beispiel gilt*

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}^{2\times 2} \quad \Rightarrow \quad \det(A) = 2 \neq 0,$$

aber A lässt sich nicht in $\mathbb{Z}^{2\times 2}$ invertieren!

Korollar 6.11 erlaubt es, einem Endomorphismus $F : V \to V$ auf einem endlichdimensionalen Vektorraum V auf wohldefinierte Weise eine Determinante zuzuordnen. Für irgendeine Basis $\mathscr{V}$ von V setzen wir

$$\det(F) := \det\left([F]_{\mathscr{V},\mathscr{V}}\right). \tag{6.7}$$

Diese Definition ist *nicht* von der Wahl von $\mathscr{V}$ abhängig. Sei $\mathscr{V}'$ eine weitere Basis, so folgt aus (5.14) und Korollar 6.11 (iii),

$$\det\left([F]_{\mathscr{V}',\mathscr{V}'}\right) = \det\left([I]_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}\right) \cdot \det\left([F]_{\mathscr{V},\mathscr{V}}\right) \cdot \det\left([I]_{\mathscr{V},\mathscr{V}'}^{-1}\right) = \det\left([F]_{\mathscr{V},\mathscr{V}}\right).$$

Korollar 6.13 *Seien $A_{11} \in K^{n_1\times n_1}, A_{12} \in K^{n_1\times n_2}, A_{22} \in K^{n_2\times n_2}$. Dann gilt*

$$\det\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} = \det(A_{11}) \cdot \det(A_{22}).$$

BEWEIS: Übung. ■

Korollar 6.14 $\det\left(A^{\mathsf{T}}\right) = \det(A)$.

BEWEIS: Die Aussage ist für nicht invertierbare Matrizen trivialerweise erfüllt, siehe Korollar 6.11. Sei also A invertierbar. Nach Satz 3.6 lässt sich A als Produkt von Elementarmatrizen schreiben: $A = S_1 \cdots S_m$. Mit Satz 6.10 folgt

$$\begin{aligned} \det(A^{\mathsf{T}}) &= \det\left(S_m^{\mathsf{T}} \cdots S_1^{\mathsf{T}}\right) = \det\left(S_m^{\mathsf{T}}\right) \cdots \det\left(S_1^{\mathsf{T}}\right) \\ &= \det(S_1) \cdots \det(S_m) = \det(S_1 \cdots S_m) = \det(A), \end{aligned}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass die Aussage des Lemmas für alle Elementarmatrizen erfüllt ist. ■

Der Beweis von Korollar 6.14 setzt voraus, dass die Einträge von A aus einem Körper stammen. Das Resultat lässt sich aber ohne weiteres auf einen kommutativen Ring mit Eins verallgemeinern; der Nachweis ist etwas technischer und basiert auf der Definition der Determinante.

Als unmittelbare Folgerung von Korollar 6.14 kombiniert mit Lemma 6.8 ergibt sich, dass die Determinante einer Matrix mit zwei identischen Spalten immer Null ist.

6.3 Minoren und Laplace-Entwicklung

Für eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit $n \geq 2$ nennt man die Matrix $A(k,\ell) \in R^{(n-1)\times(n-1)}$, die durch Streichen der k-ten Zeile und ℓ-ten Spalte aus A hervorgeht, **Minor** (umgangssprachlich: **Streichungsmatrix**) von A. Ist zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 3 & 13 \\ 5 & 11 & 10 & 8 \\ 9 & 7 & 6 & 12 \\ 4 & 14 & 15 & 1 \end{pmatrix}, \tag{6.8}$$

so haben wir den Minor

$$A(2,3) = \begin{pmatrix} 16 & 2 & \cancel{3} & 13 \\ \cancel{5} & \cancel{11} & \cancel{10} & \cancel{8} \\ 9 & 7 & \cancel{6} & 12 \\ 4 & 14 & \cancel{15} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 2 & 13 \\ 9 & 7 & 12 \\ 4 & 14 & 1 \end{pmatrix}.$$

Definition 6.15 *Sei $A \in K^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Die Matrix $\operatorname{adj}(A) = B \in K^{n\times n}$ mit den Einträgen*

$$b_{ij} := (-1)^{i+j} \det\left(A(j,i)\right), \qquad i,j = 1,\ldots,n, \tag{6.9}$$

*heisst **Adjunkte** (auch: **Adjungierte**) [adjoint] von A.*

Bemerkung: Die umgekehrte Reihenfolge von i und j im Minor ist kein *Schreibfehler.*

Die Vorfaktoren $(-1)^{i+j}$ in (6.9) kann man in eine “Schachbrettmatrix” schreiben:

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots \\ - & + & - & \cdots \\ + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix A in (6.8) erhält man (nach längerer Rechnung oder mit MATLAB)

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{pmatrix} -136 & -408 & 408 & 136 \\ -408 & -1224 & 1224 & 408 \\ 408 & 1224 & -1224 & -408 \\ 136 & 408 & -408 & -136 \end{pmatrix}.$$

Interessanterweise gilt $\mathsf{adj}(A)A = A\,\mathsf{adj}(A) = 0$. Dies ist kein Zufall, wie der folgende zentrale Satz zeigt.

Satz 6.16 *Sei R kommutativer Ring mit Eins und $A \in R^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Dann gilt*

$$\mathsf{adj}(A)A = A\,\mathsf{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n.$$

BEWEIS: Unterteile $A = \big(a_1, a_2, \dots, a_n\big)$ in die Spalten $a_1,\dots,a_n \in R^{n\times 1}$. Für $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$ und $\alpha \in R$ definieren wir die folgende Matrix

$$B(i,j,\alpha) = \left(\begin{array}{ccc|c|ccc} a_1 & \dots & a_{j-1} & \alpha e_i & a_{j+1} & \cdots & a_n \end{array}\right).$$

Man sieht leicht, dass man dann Permutationen π bzw. μ finden kann (die aus jeweils $i-1$ bzw. $j-1$ Transpositionen bestehen), so dass

$$P_\pi B(i,j,\alpha)P_\mu = \begin{pmatrix} \alpha & \star \\ 0 & A(i,j) \end{pmatrix}, \quad \det(P_\pi) = (-1)^{i-1}, \quad \det(P_\mu) = (-1)^{j-1}.$$

Nach Korollar 6.13 und Korollar 6.14 folgt also

$$\det\big(B(i,j,\alpha)\big) = \alpha\det\big(A(i,j)\big)\det(P_\pi)\det(P_\mu) = \alpha(-1)^{i+j}\det\big(A(i,j)\big).$$

Nach diesen Vorbetrachtungen wenden wir uns dem Eintrag (j,k) von $C = \mathsf{adj}(A)A$ zu:

$$c_{jk} = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}\det\big(A(i,j)\big)a_{ik} = \sum_{i=1}^{n}\det\big(B(i,j,a_{ik})\big). \tag{6.10}$$

Aufgrund der Linearität der Determinante in den Matrixeinträgen folgt

$$c_{jk} = \det\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} a_1 & \dots & a_{j-1} & a_k & a_{j+1} & \cdots & a_n \end{array}\right).$$

Für $j \neq k$ enthält die Matrix auf der rechten Seite zwei identische Spalten und damit ist deren Determinante 0. Für $j = k$ ist die Matrix auf der rechten Seite gerade A; also $c_{jj} = \det(A)$. Damit gilt $\mathsf{adj}(A)A = \det(A)\cdot I_n$. Die Beziehung $A\,\mathsf{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$ kann man analog zeigen oder – einfacher – mit Transponieren:

$$A\,\mathsf{adj}(A) = \big(\mathsf{adj}(A)^\mathsf{T}A^\mathsf{T}\big)^\mathsf{T} = \big(\mathsf{adj}(A^\mathsf{T})A^\mathsf{T}\big)^\mathsf{T} = \big(\det(A^\mathsf{T})\cdot I_n\big)^\mathsf{T} = \det(A)\cdot I_n,$$

wobei wir die aus Definition 6.15 leicht zu beweisende Tatsache ausgenutzt haben, dass die Transponierte der Adjungierten gerade die Adjungierte der Transponierten ist. ■

Ist $\det(A)$ im Ring R invertierbar, so folgt aus Satz 6.16 dass A invertierbar ist und

$$A^{-1} = \big(\det(A)\big)^{-1}\mathsf{adj}(A). \tag{6.11}$$

Korollar 6.17 *Sei R kommutativer Ring mit Eins. Eine Matrix $A \in R^{n\times n}$ ist genau dann invertierbar, wenn $\det(A)$ invertierbar ist.*

Als weitere Folgerung von Satz 6.16 erhalten wir die sogenannte Laplace-Entwicklung, mit der sich die Berechnung der Determinante gut organisieren lässt, insbesondere wenn eine Zeile oder Spalte von A viele Nullen enthalten sollte.

Korollar 6.18 *Sei R kommutativer Ring mit Eins und $A \in R^{n\times n}$ mit $n \geq 2$. Dann gelten die folgenden Beziehungen.*

(i) Laplace-Entwicklung nach der i-ten Zeile für $1 \leq i \leq n$:

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det\big(A(i,j)\big).$$

(ii) Laplace-Entwicklung nach der j-ten Spalte für ein $1 \leq j \leq n$:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i+j}a_{ij}\det\big(A(i,j)\big).$$

BEWEIS: Die beiden Entwicklungen folgen aus dem i-ten (bzw. j-ten) Diagonaleintrag von $A\,\mathsf{adj}(A) = \det(A)\cdot I_n$ (bzw. $\mathsf{adj}(A)A = \det(A)\cdot I_n$). ■

Zum Abschluss dieser theoretischen Betrachtungen lernen wir noch eine (praktisch nutzlose) Formel zur Berechnung der Lösung eines LGS $Ax = b$ kennen: Aus

$$x = A^{-1}b = \big(\det(A)\big)^{-1}\mathsf{adj}(A)b$$

folgt für den i-ten Eintrag

$$x_i = \frac{\det\left(\begin{array}{ccc|c|ccc} a_1 & \dots & a_{i-1} & b & a_{i+1} & \cdots & a_n \end{array}\right)}{\det(A)}, \quad 1 \leq i \leq n. \tag{6.12}$$

Diese explizite Darstellungsformel nennt man **Cramer'sche Regel**. Die Beziehung (6.12) folgt leicht aus der Argumentation im Beweis von Satz 6.16, siehe insbesondere (6.10).

6.4 Praktische Aspekte

6.4.1 Berechnung

Der MATLAB-Befehl `det` berechnet die Determinante einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit Hilfe der LR-Zerlegung

$$PA = LR,$$

wobei L untere Dreiecksmatrix mit Einsen auf der Diagonalen und R obere Dreiecksmatrix ist. Die Permutationsmatrix P setzt sich aus den bei der Konstruktion der LR-Zerlegung verwendeten Transpositionen zusammen (siehe Beweis von Satz 3.16). Also gilt

$$\det(A) = \pm r_{11}r_{22}\cdots r_{nn},$$

wobei das Vorzeichen $+$ oder $-$ gewählt wird, je nachdem ob die Anzahl der Transpositionen gerade oder ungerade ist. Diese Vorgehensweise ist wesentlich günstiger als die Determinante per Definition oder mit Hilfe von Laplace-Entwicklungen auszurechnen.

6.4.2 Determinanten und Invertierbarkeit

Aufgrund von Korollar 6.11 ist man versucht zu glauben, dass der Absolutbetrag der Determinante Aufschluss darüber gibt wie "gut" eine Matrix invertierbar ist, etwa nach dem Prinzip: Je kleiner/grösser die Determinante im Betrag, desto schlechter/besser ist eine Matrix invertierbar. Vor der Vermutung eines solchen Zusammenhangs ist ausdrücklich zu warnen! Tatsächlich findet man in der Dokumentation des MATLAB-Befehl's `det`:

```
DET    Determinant.
   DET(X) is the determinant of the square matrix X.

   Use COND instead of DET to test for matrix singularity.
```

(`COND` steht für die Konditionszahl einer Matrix und wird in Lineare Algebra 2 bzw. Numerische Mathematik behandelt.)

Betrachte zum Beispiel die Matrix $T_n = \frac{1}{2} I_n$. Diese ist offenbar sehr gut invertierbar, $T^{-1} = 2I_n$. Trotzdem wird die Determinante für grosse n sehr klein, z.B. $\det(T_{100}) = 2^{-100} \approx 8 \cdot 10^{-31}$. Betrachte als weiteres Beispiel die obere Dreiecksmatrix

$$W_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n \times n}.$$

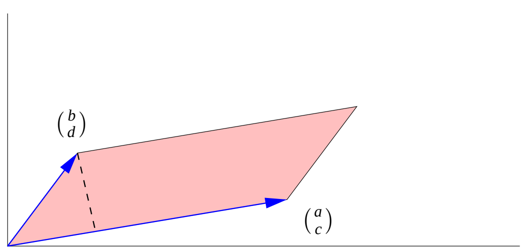
Trotz $\det(W_n) = 1$ verhält sich diese Matrix unter Invertierung alles andere als freundlich. Der $(1,n)$-Eintrag von W_n^{-1} ist 2^{n-2}, also $\approx 3 \cdot 10^{29}$ für $n = 100$. Verändert man die letzte Zeile der Matrix W_n leicht:

$$\widetilde{W}_n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & \cdots & -1 \\ & 1 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & -1 \\ \alpha & \cdots & \alpha & 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = -\frac{1}{2^{n-1} - 1},$$

so ist $\widetilde{W}_n$ *nicht* invertierbar, obwohl z.B. für $n = 100$ die Einträge in der letzten Zeile von $\widetilde{W}_n$ nur um $\approx 2 \cdot 10^{-30}$ von den entsprechenden Einträgen von W_n abweichen!

6.4.3 Geometrische Interpretation

Zwischen Determinanten und Volumen (im $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$, $\ldots$) gibt es einen engen Zusammenhang. Allerdings erschliesst sich dieser mit den uns momentan zur Verfügung stehenden Mitteln nur recht mühsam . Zumindest im $\mathbb{R}^2$ gelingt dies noch relativ leicht. Sei $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und betrachte das durch die Spalten von A aufgespannte Parallelogramm:



Der Flächeninhalt des Parallelogramms (Produkt der Längen der Grundseite und der Höhe) wird im folgenden mit

$$\text{Area}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\}$$

bezeichnet. Im Spezialfall $\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix}$ liegt dieses Parallelogramm auf der Koordinatenachse und wir erhalten

$$\text{Area}\left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} \right\} = |\tilde{a}|\,|\tilde{d}| = \left| \det \begin{pmatrix} \tilde{a} & \tilde{b} \\ 0 & \tilde{d} \end{pmatrix} \right| = |\det(\tilde{A})|. \tag{6.13}$$

Nun lässt sich aber jeder Vektor $\binom{a}{c}$ durch eine passende Rotation $Q = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$ in die Koordinatenachse drehen: $Q\binom{a}{c} = \binom{\tilde{a}}{0}$. Der Flächeninhalt des Parallelogramms ändert sich durch die Rotation nicht:

$$\text{Area}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\} = \text{Area}\left\{ \begin{pmatrix} \tilde{a} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{b} \\ \tilde{d} \end{pmatrix} \right\},$$

wobei $\binom{\tilde{b}}{\tilde{d}} = Q\binom{b}{d}$. Zusammen mit (6.13) ergibt sich

$$\text{Area}\left\{ \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \right\} = |\det(\tilde{A})| = |\det(QA)| = |\det(Q)|\,|\det(A)| = |\det(A)|, \tag{6.14}$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $\det(Q) = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1$.

Der Zusammenhang (6.14) lässt sich auf höhere Dimensionen verallgemeinern:

Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$. Dann entspricht $|\det(A)|$ dem Volumen des durch die Spalten von A aufgespannten Parallelepipeds.

Diese Tatsache wird klarer sobald wir die QR-Zerlegung einer Matrix kennengelernt haben.

Man kann (6.14) auch anderes intepretieren: Ein Quadrat mit Seitenlänge ℓ wird durch $\binom{\ell}{0}, \binom{0}{\ell}$ aufgespannt und hat Flächeninhalt ℓ^2. Die Transformation dieses Quadrats durch die von $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ beschriebene Abbildung ergibt gerade das durch $\binom{\ell a}{\ell c}, \binom{\ell b}{\ell d}$ aufgespannte Parallelogramm mit dem Flächeninhalt $|\det(A)|\ell^2$. Der Betrag der Determinante, $|\det(A)|$ beschreibt also wie sich der Flächeninhalt ändert unter Transformation mit A. Dies gilt für beliebige Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$\widetilde{\Omega} = \{Ax : \ x \in \Omega\} \quad \Rightarrow \quad \text{Volumen}(\widetilde{\Omega}) = |\det(A)| \times \text{Volumen}(\Omega).$$

Dies wird in der Analysis noch ausführlicher behandelt.

Das Vorzeichen von $\det(A)$ gibt an, ob sich die Orientierung unter der Transformation mit A ändert. Dies wird in Abbildung 6.1 für die folgenden beiden Matrizen illustriert:

$$A_1 = \begin{pmatrix} -1 & -1/4 \\ 1 & -1/2 \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} -1/4 & 1 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix}, \tag{6.15}$$

mit $\det(A_1) = 3/4$ und $\det(A_2) = -9/8$.

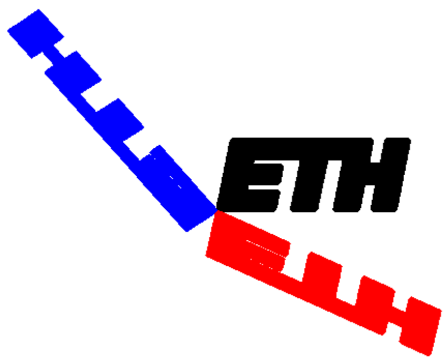


Abbildung 6.1. *ETH-Logo (schwarz), transformiert mit A_1 (blau) und A_2 (rot) wie in (6.15).*

Kapitel 7

Eigenwerte und Eigenvektoren

Ein **Eigenwert** [*eigenvalue*] einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ über einem Körper K ist ein Skalar $\lambda \in K$, für den es einen von Null verschiedenen Spaltenvektor $x \in K^{n\times 1}$ gibt, mit

$$Ax = \lambda x. \tag{7.1}$$

Jeder Spaltenvektor $x \neq 0$ der (7.1) erfüllt wird als (ein zu λ gehöriger) **Eigenvektor** [*eigenvector*] bezeichnet. Zwischen Eigenwerten und Determinanten besteht ein fundamentaler Zusammenhang, der sich aus Korollar 6.11 (i) ergibt:

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad (\lambda I - A)x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda I - A \text{ nicht invertierbar} \quad \Leftrightarrow \quad \det(\lambda I - A) = 0.$$

Eigenwerte sind also Nullstellen der Funktion $\lambda \mapsto \det(\lambda I - A)$. Bevor wir zu weiteren Eigenschaften von Eigenwerten kommen, werden wir uns dieser Funktion im folgenden Abschnitt näher zuwenden.

7.1 Das charakteristische Polynom

In diesem Abschnitt sei R stets kommutativer Ring mit Eins. Wir erinnern daran, dass $R[t]$ den Ring der Polynome (mit Polynomaddition und -multiplikation) in der Unbekannten t bezeichnet. Dann betrachten wir die Matrix

$$tI_n - A = \begin{pmatrix} t - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & t - a_{22} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -a_{n-1,n} \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & t - a_{nn} \end{pmatrix} \in \big(R[t]\big)^{n\times n}.$$

Da $R[t]$ Ring ist, ist die Determinante von $tI - A$ auch wieder in $R[t]$.

Definition 7.1 *Das* ***charakteristische Polynom*** *einer Matrix $A \in R^{n\times n}$ ist*

$$p_A := \det(tI - A) \in R[t].$$

Für $n = 1$ ist das charakteristische Polynom von $A = (a_{11})$ gerade $p_A = t - a_{11}$. Für $n = 2$ ist das charakteristische Polynom

$$p_A = \det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = t^2 - (a_{11} + a_{22})t + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}).$$

Für allgemeines n gibt es keine einfachen Formeln für die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms. Zumindest lässt sich über die ersten beiden und den letzten Koeffizienten eine einfache Aussage treffen.

Lemma 7.2 *Sei $A \in R^{n\times n}$. Dann gilt: Das charakteristische Polynom p_A hat Grad n und ist von der Form*

$$p_A = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1}t^{n-1} + t^n,$$

mit

$$\alpha_{n-1} = -(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}), \qquad \alpha_0 = (-1)^n \det(A).$$

BEWEIS: Bezeichne

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{für } i = j, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

das **Kronecker-Symbol**. Dann gilt, per Definition der Determinante,

$$p_A = \sum_{\sigma\in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \big(\delta_{i,\sigma(i)}t - a_{i,\sigma(i)}\big). \tag{7.2}$$

Daraus folgt sofort

$$\alpha_0 = p_A(0) = (-1)^n \sum_{\sigma\in S_n} \mathsf{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n a_{i,\sigma(i)} = (-1)^n \det(A).$$

Desweiteren können wir die Summe in (7.2) aufteilen:

$$p_A = \prod_{i=1}^n (t - a_{ii}) + \sum_{\substack{\sigma\in S_n \\ \sigma\neq \mathrm{id}}} \mathsf{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^n \big(\delta_{i,\sigma(i)}t - a_{i,\sigma(i)}\big), \tag{7.3}$$

wobei der erste Summand die Form

$$\prod_{i=1}^n (t - a_{ii}) = t^n - (a_{11} + \cdots + a_{nn})t^{n-1} + \text{Polynom vom Grad höchstens } n-2$$

hat. Der zweite Summand in (7.3) ist ein Polynom vom Grad höchstens $n-2$, da sich höchstens $n-2$ Diagonaleinträge von $tI - A$ auswählen lassen. Damit folgt die Behauptung. ■

Die Summe der Diagonaleinträge einer quadratischen Matrix A wird übrigens als **Spur** [*trace*] von A bezeichnet:

$$\mathsf{Spur}(A) := a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}.$$

Ein Polynom mit führendem Koeffizienten 1 wird als **monisches Polynom** [*monic polynomial*] bezeichnet.

Das folgende Lemma beschreitet den umgedrehten Weg: zu jedem monischen Polynom lässt sich eine Matrix finden, so dass dieses Polynom das charakteristische Polynom der Matrix ist.

Lemma 7.3 *Betrachte ein beliebiges monisches Polynom $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \cdots + \alpha_{n-1} t^{n-1} + t^n \in R[t]$. Dann ist p charakteristisches Polynom der Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & -\alpha_0 \\ 1 & \ddots & & \vdots \\ & \ddots & 0 & -\alpha_{n-2} \\ & & 1 & -\alpha_{n-1} \end{pmatrix}$$

Die Matrix A heisst ***Begleitmatrix*** *[companion matrix] von p.*

BEWEIS: Übung. ∎

Bemerkung 7.4 *Für $n = 2, 3, 4$ existieren explizite Lösungsformeln zur Bestimmung der Nullstellen eines Polynoms. In der Praxis setzt man diese Lösungsformeln üblicherweise nur für $n = 2$ ein, da die Auswertung der Formeln für $n > 2$ numerisch heikel ist. Für $n > 4$ kann es nach Abel sowieso keine allgemeine Lösungsformel mehr geben. Tatsächlich werden in der* MATLAB*-Funktion* `roots` *die Nullstellen eines Polynoms bestimmt, indem die Eigenwerte der zu diesem Polynom gehörigen Begleitmatrix ausgerechnet werden. Davon kann man sich mittels* `type roots` *leicht überzeugen. Zur Berechnung der Eigenwerte wird der sogenannte QR-Algorithmus eingesetzt, der nicht im Rahmen dieser Vorlesung behandelt werden kann.*

In ein beliebiges Polynom $p = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 t^2 + \cdots + \alpha_n t_n \in R[t]$ kann man eine Matrix $M \in R^{n\times n}$ “einsetzen”:

$$p(M) = \alpha_0 I_n + \alpha_1 M + \alpha_2 M^2 + \cdots + \alpha_n M^n.$$

Dabei sind die Potenzen M^j für $j = 1, 2, \ldots$ so zu verstehen, dass M entsprechend oft mit sich selbst multipliziert wird. Formal setzt man $M^0 = I_n$.

Satz 7.5 (Cayley-Hamilton) *Sei $A \in R^{n\times n}$ mit charakteristischem Polynom p_A. Dann gilt $p_A(A) = 0$.*

BEWEIS: Um gleich ein mögliches Missverständnis aus dem Weg zu räumen, zitieren wir aus [Higham, N. Functions of matrices. SIAM, 2008] (S. 7): *It is incorrect to prove the Cayley-Hamilton theorem by* $p_A(A) = \det(A * I - A) = 0$. Das Problem an dieser Argumentation ist, dass die beiden Ausdrücke überhaupt nicht zusammenpassen: links steht eine Matrix $p_A(A) \in R^{n\times n}$ aber rechts steht ein Skalar $\det(\ldots) \in R$!

Für $n = 1$ ist der Satz aber offenbar richtig; sei also $n \geq 2$. Um dem oben geschilderten Problem aus dem Weg zu gehen, betrachten wir für unser fest vorgegebenes $A \in R^{n\times n}$ die Menge

$$R[A] := \{p(A) : p \in R[t]\},$$

die also alle in A ausgewerteten Polynome enthält. Es ist leicht einzusehen, dass $R[A]$ einen kommutativen Ring mit Eins bildet. Wir definieren nun eine Matrix über diesem Ring:

$$\mathscr{A} := \begin{pmatrix} A - a_{11}I_n & -a_{21}I_n & \cdots & -a_{n1}I_n \\ -a_{12}I_n & A - a_{22}I_n & \cdots & -a_{n2}I_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{1n}I_n & -a_{2n}I_n & \cdots & A - a_{nn}I_n \end{pmatrix} \in \big(R[A]\big)^{n\times n}.$$

Nach Definition (6.1) der Determinante über den Ring $R[A]$ folgt

$$\det(\mathscr{A}) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} \big(\delta_{i,\sigma(i)} A - a_{\sigma(i),i} I_n\big) = p_{A^\mathsf{T}}(A) = p_A(A),$$

wobei die im letzten Schritt verwendete Identität der charakteristischen Polynome von A und A^T aus Korollar 6.14 folgt.

Aus der trivialen Identität $Ae_i = a_{1i}e_1 + a_{2i}e_2 + \cdots + a_{ni}e_n$ sieht man leicht

$$\mathscr{A}x = 0 \quad \text{mit} \quad x = \begin{pmatrix} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{pmatrix}.$$

An dieser Stelle muss man vorsichtig sein, was eigentlich mit $\mathscr{A}x$ gemeint ist. Dabei wird $\mathscr{A} \in (R[A])^{n\times n}$ als $n\times n$-Blockmatrix in $R^{n^2\times n^2}$ reinterpretiert, und $\mathscr{A}x$ wird als normale Matrix-Vektor-Multiplikation in R^{n^2} verstanden. (Auch sollte man sehr vorsichtig sein und nicht voreilig schlussfolgern, dass eine Matrix mit nichttrivialem Kern immer Determinante 0 hat. Dies ist in dieser Allgemeinheit nur bei Körpern gültig.) Wir wenden Satz 6.16 an:

$$\begin{pmatrix} \det(\mathscr{A}) & & \\ & \ddots & \\ & & \det(\mathscr{A}) \end{pmatrix} = \mathrm{adj}(\mathscr{A})\mathscr{A} \quad \Rightarrow \quad \begin{pmatrix} \det(\mathscr{A})e_1 \\ \vdots \\ \det(\mathscr{A})e_n \end{pmatrix} = \mathrm{adj}(\mathscr{A})\mathscr{A}x = 0.$$

In dieser Implikation wird das aus Satz 6.16 erhaltene und für Matrizen über $R[A]$ gültige Resultat reinterpretiert als Resultat für Blockmatrizen in $R^{n^2\times n^2}$. Die Beziehung $\mathrm{adj}(\mathscr{A})\mathscr{A}$ bleibt bei dieser Reinterpretation erhalten; dies folgt aus bekannten Eigenschaften der Blockmatrix-Multiplikation. Mit der oben bewiesenen Beziehung folgt $\det(\mathscr{A}) = 0$, da jede Spalte dieser $n\times n$-Matrix Null ist. Daraus folgt die Behauptung: $p_A(A) = \det(\mathscr{A}) = 0$. ∎

Zum Beispiel ist für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ das charakteristische Polynom $p_A(t) = (t-1)(t-2)$ und die Aussage von Satz 7.5 besagt

$$p_A(A) = (A - I_n)(A - 2I_n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ gilt natürlich ebenfalls $p_A(A) = 0$, aber hier hätte es eigentlich auch ein Polynom q von kleinerem Grad, nämlich $q(t) = t - 2$, getan. Ein **Minimalpolynom** von A ist ein Polynom $q \in R[t]$ vom kleinsten Grad mit der Eigenschaft $q(A) = 0$.

Die folgende Resultate sind typische Anwendungen des Satzes von Cayley-Hamilton.

Korollar 7.6 *Sei $A \in R^{n\times n}$.*

(i) Jede Potenz A^k mit $k \in \mathbb{N}$ lässt sich als Linearkombination der Potenzen $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ darstellen.

(ii) Ist A invertierbar, so lässt sich A^{-1} als Linearkombination der Potenzen $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ darstellen.

BEWEIS: Zu (i). Die Aussage ist offenbar für $k = 0,1,\ldots,n-1$ erfüllt. Der Fall $k = n$ folgt aus dem Satz von Cayley-Hamilton:

$$0 = p_A(A) = \alpha_0 I + \alpha_1 A \cdots + \alpha_{n-1}A^{n-1} + A^n \quad \Rightarrow \quad A^n = -\alpha_0 I - \alpha_1 A \cdots - \alpha_{n-1}A^{n-1}.$$

Den Fall $k > n$ beweist man analog per Induktion. Im Induktionsschritt verwendet man $0 = A^{k-n}p_A(A)$.

Zu (ii). Wenn A invertierbar ist, so ist der Koeffizient $\alpha_0 = (-1)^n \det(A)$ notwendigerweise invertierbar, siehe Korollar 6.17. Also folgt wie oben aus $0 = p_A(A)$ die Beziehung

$$I = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}A \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-1} - \frac{1}{\alpha_0}A^n = A\Big(-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}I \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2} - \frac{1}{\alpha_0}A^{n-1}\Big)$$

und damit ist $A^{-1} = -\frac{\alpha_1}{\alpha_0}I \cdots - \frac{\alpha_{n-1}}{\alpha_0}A^{n-2} - \frac{1}{\alpha_0}A^{n-1}$. ■

7.2 Grundlegende Eigenschaften und Definitionen

In diesem und allen folgenden Abschnitten bezeichnet K stets einen Körper. Ist $x \in K^{n\times 1}$ Eigenvektor zum Eigenwert λ einer Matrix A, so ist auch jedes skalares Vielfache $\alpha x \neq 0$ mit $\alpha \in K$ Eigenvektor, da

$$Ax = \lambda x \quad \Rightarrow \quad A(\alpha x) = \lambda(\alpha x).$$

Es macht also keinen Sinn von *dem* Eigenvektor zu einem Eigenwert zu sprechen; ein Eigenvektor ist höchstens bis auf ein skalares Vielfaches eindeutig bestimmt, und selbst dies ist nicht immer der Fall. Zum Beispiel sind *alle* Spaltenvektoren $K^{n\times 1}$ Eigenvektoren zum Eigenwert 1 der Einheitsmatrix I_n. Diese Überlegungen motivieren die folgende Definition.

Definition 7.7 *Sei $\lambda \in K$ Eigenwert. Dann heisst*

$$\mathsf{Eig}_\lambda(A) = \{x \in K^{n\times 1} : Ax = \lambda x\}$$

Eigenraum von A bezüglich λ.

Per Definition ist $\mathsf{Eig}_\lambda(A) \setminus \{0\}$ nicht leer; die Menge besteht aus allen Eigenvektoren zu λ. Es ist leicht einzusehen, dass $\mathsf{Eig}_\lambda(A)$ ein Untervektorraum von $K^{n\times 1}$ ist.

In allgemeinen Körpern kann man nicht ohne weiteres erwarten, dass eine Matrix Eigenwerte hat. Selbst eine reelle Matrix $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ muss keine Eigenwerte haben.

Beispiel 7.1: Betrachte die Rotationsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}, \quad \phi \in [0,2\pi).$$

Die Anwendung von A auf einen Spaltenvektor x entspricht der Rotation dieses Vektors um den Winkel ϕ im Uhrzeigersinn. Ist ϕ nicht 0 oder π, so kann Ax nicht in der von x aufgespannten Gerade $\mathsf{span}\{x\}$ liegen. Also ist geometrisch klar, dass A für $\phi \notin \{0,\pi\}$ keine Eigenwerte haben kann. Dies kann man sich auch leicht algebraisch klar machen. Das charakteristische Polynom hat die Form

$$p_A(t) = \det(tI - A) = t^2 - 2\cos\phi t + 1.$$

Ausser für $\phi \in \{0,\pi\}$ gilt $|\cos\phi| < 1$ und p_A hat zwei komplexe Nullstellen. Per Definition müssen aber die Eigenwerte von reellen Matrizen reell sein.

Fasst man dagegen A als komplexe Matrix auf, so hat A die beiden Eigenwerte $\cos\phi \pm \mathrm{i}\sin\phi$. ♦

Beispiel 7.1 illustriert bereits, dass die Betrachtungen um einiges angenehmer werden können, wenn man sich bei Eigenwerten/Eigenvektoren auf komplexe Matrizen beschränkt.

Satz 7.8 (Fundamentalsatz der Algebra) *Sei $p \in \mathbb{C}[t]$ ein Polynom vom Grad $n \geq 1$. Dann hat p eine Nullstelle.*

BEWEIS: Für diese Aussage existieren verschiedene Beweise, siehe die entsprechende Seite auf Wikipedia. Eine elementare und elegante Variante des Beweises von d'Alembert findet sich in [M. Aigner, G. M. Ziegler: Das BUCH der Beweise. 3. Auflage, Springer-Verlag, 2009]. ■

Für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hat das charakteristische Polynom $p_A \in \mathbb{C}[t]$, dessen Nullstellen ja gerade die Eigenwerte sind, Grad n. Nach Satz 7.8 hat p_A eine Nullstelle $\lambda_1 \in \mathbb{C}$. Mit Polynomdivision erhalten wir die Faktorisierung

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)p_1(t),$$

wobei $p_1 \in \mathbb{C}[t]$ vom Grad $n-1$ ist. Für $n = 1$ ist $p_1 \equiv 1$. Für $n > 1$ hat p_1 nach Satz Satz 7.8 eine Nullstelle $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ und wir erhalten die Faktorisierung

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)p_2(t),$$

wobei $p_2 \in \mathbb{C}[t]$ vom Grad $n-2$ ist. Wiederholt man diese Vorgehensweise insgesamt n Mal, so ergibt sich eine **Zerlegung** von p_A **in Linearfaktoren**:

$$p_A(t) = (t - \lambda_1)(t - \lambda_2)\ldots(t - \lambda_n). \tag{7.4}$$

Also hat A insgesamt n Eigenwerte $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$, wobei in dieser Liste Werte mehrfach auftreten dürfen.

Eine direkte Konsequenz aus (7.4) ist das folgende Resultat, das sich gut eignet um eine Probe der berechneten Eigenwerte durchzuführen.

Lemma 7.9 *Seien $\lambda_1,\ldots,\lambda_n \in \mathbb{C}$ die Eigenwerte von $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann gelten*

$$\det(A) = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n, \qquad \mathsf{Spur}(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n.$$

BEWEIS: Übung. ■

Die oben beschriebene Abspaltung der zu einer Nullstelle gehörenden Linearfaktoren lässt sich per Polynomdivision in jedem Körper durchführen.

Definition 7.10 *Sei $p \in K[t]$ mit Nullstelle $t_0 \in K$. Hat p eine Faktorisierung $p(t) = (t - t_0)^\eta q(t)$ mit $\eta \in \mathbb{N}$, wobei t_0 keine Nullstelle von $q \in K[t]$ ist, so heisst η Vielfachheit von t_0.*

Man kann sich leicht überzeugen, dass die Vielfachheit η der Nullstelle t_0 die Beziehungen

$$p(t_0) = 0,\ p'(t_0) = 0,\ \ldots\ p^{(\eta-1)}(t_0) = 0, \quad p^{(\eta)}(t_0) \neq 0,$$

erfüllt.

Definition 7.11 *Sei $\lambda \in K$ Eigenwert von $A \in K^{n\times n}$.*

1. *Die Vielfachheit von λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms p_A wird* ***algebraische Vielfachheit*** *[algebraic multiplicity] von λ genannt. Wir schreiben* $\mathsf{alg}_\lambda(A)$.
2. *Die Dimension des zu λ gehörigen Eigenraums wird* ***geometrische Vielfachheit*** *[geometric multiplicity] von λ genannt. Wir schreiben* $\mathsf{geo}_\lambda(A) = \dim \mathsf{Eig}_\lambda(A)$.

Beispiel 7.2: Seien

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}, \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Dann gilt

$$\mathsf{alg}_2(A) = 3,\ \mathsf{geo}_2(A) = 1, \quad \mathsf{alg}_2(B) = 3,\ \mathsf{geo}_2(B) = 2, \quad \mathsf{alg}_2(C) = 3,\ \mathsf{geo}_2(C) = 3.$$

♦

7.2.1 Ähnlichkeit und Endomorphismen

Zu einander ähnliche Matrizen haben die gleichen Eigenwerte.

Satz 7.12 *Sei $A \in K^{n\times n}$ und $B = P^{-1}AP$ mit einer invertierbaren Matrix $P \in K^{n\times n}$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) *Die charakteristischen Polynome p_A und p_B sind identisch.*

(ii) *Ein Spaltenvektor $x \in K^{n\times 1}$ ist Eigenvektor von A genau dann, wenn $P^{-1}x$ Eigenvektor von B ist.*

BEWEIS: (i) folgt aus bekannten Eigenschaften der Determinante:

$$p_B(t) = \det(tI - B) = \det(tI - P^{-1}AP) = \det\left(P^{-1}(tI - A)P\right) = \det(tI - A) = p_A(t).$$

(ii) Für einen Eigenvektor x gilt

$$Ax = \lambda x \quad \Leftrightarrow \quad P^{-1}A\underbrace{PP^{-1}}_{=I}x = \lambda P^{-1}x \quad \Leftrightarrow \quad BP^{-1}x = \lambda P^{-1}x.$$

■

Wir betrachten nun einen Endomorphismus $F : V \to V$ mit einem beliebigen (endlich- oder unendlichdimensionalen) Vektorraum V über einen Körper K. Dann ist $\lambda \in K$ Eigenwert von F, wenn es einen von Null verschiedenen Vektor $v \in V$ gibt mit

$$F(v) = \lambda v.$$

Wie gehabt, wird v als Eigenvektor bezeichnet und $\mathsf{Eig}_\lambda(F) = \{v \in V : F(v) = \lambda v\}$ als Eigenraum. Für endlichdimensionale Vektorräume lassen sich die Eigenwerte und Eigenvektoren leicht aus einer Matrixdarstellung von F gewinnen.

Satz 7.13 *Sei $F \in L(V,V)$, wobei V ein endlichdimensionaler Vektorraum über K ist. Sei $\mathscr{B}$ eine Basis von V mit zugehörigem Koordinatensystem $\Phi_\mathscr{B}$. Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von F mit Eigenvektor $v \in V$, so ist λ Eigenwert von $[F]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ mit Eigenvektor $\Phi_\mathscr{B}^{-1}(v)$. Ist umgekehrt $\lambda \in K$ Eigenwert von $[F]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ mit Eigenvektor $x \in K^{n\times 1}$, so ist λ Eigenwert von F mit Eigenvektor $\Phi_\mathscr{B}(x)$.*

BEWEIS: Die Aussage ergibt sich mit $x := \Phi_\mathscr{B}^{-1}(v)$ aus den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & F(v) = \lambda v \\ \Leftrightarrow\ & \left(F \circ \Phi_\mathscr{B}\right)(x) = \lambda \Phi_\mathscr{B}(x) \\ \Leftrightarrow\ & \left(\Phi_\mathscr{B}^{-1} \circ F \circ \Phi_\mathscr{B}\right)(x) = \lambda x \\ \Leftrightarrow\ & [F]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}x = \lambda x. \end{aligned}$$

■

Beispiel 7.3: Sei $V = \mathbb{R}_3[t]$ und $D \in L(V,V)$ mit $D(p) = p'$ für alle $p \in V$. Aus Beispiel 5.2 ist bereits die Matrixdarstellung von D bezüglich der Monombasis $\mathscr{B} = \{1, t, t^2, t^3\}$ bekannt:

$$[D]_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat nur den Eigenwert 0 mit Eigenvektor $x = (1,0,0,0)^\mathsf{T}$ und geometrischer Vielfachheit 1. Gemäss Satz 7.13 hat D also nur den Eigenwert 0 und jeder Eigenvektor ist eine von Null verschiedene Konstante. ♦

Im Rückblick passen Satz 7.12 und Satz 7.13 sehr gut zusammen: Da Satz 7.13 keine Forderungen an die Basis stellt, dürfen sich die Eigenwerte bei einem Basiswechsel nicht ändern. Satz 7.12 bestätigt diese Aussage, da ein Basiswechsel bei Endomorphismen eine Ähnlichkeitstransformation der Darstellungsmatrix nach sich zieht.

Eigenwerte von Endomorphismen in unendlichdimensionalen Vektorräumen werden in der Funktionalanalysis, insbesondere in der Spektraltheorie, im Detail behandelt. Ein (a)typisches Beispiel ist die Ableitung $D \in L(V,V)$ mit $D(f) = f'$ auf dem Vektorraum $V = C^\infty(0,1)$ der unendlich oft differenzierbaren reellwertigen Funktionen auf dem Intervall $(0,1)$. Für diese ist *jedes* $\lambda \in \mathbb{R}$ Eigenwert mit Eigenvektor $e^{\lambda t}$:

$$D(e^{\lambda t}) = \lambda e^{\lambda t}.$$

Nach diesem kurzen Ausflug in die Welt der Endomorphismen werden wir uns im folgenden nur noch Eigenwerten und -vektoren von Matrizen widmen, was uns nach Satz 7.13 zumindest im endlichdimensionalen Fall gestattet sei.

7.3 Diagonalisierbarkeit

Wie bereits am Ende von Kapitel 5 angesprochen, ist es im Vergleich zur Äquivalenz bei Ähnlichkeit wesentlich schwieriger, eine gegebene Matrix auf eine möglichst einfache Form zu bringen. Die Hoffnung ist, $P^{-1}AP$ auf Diagonalgestalt oder zumindest auf Dreiecksgestalt bringen zu können. Dann lassen sich die Eigenwerte einfach ablesen.

Lemma 7.14 *Sei $A \in K^{n\times n}$ obere oder untere Dreiecksmatrix. Dann sind die Eigenwerte von A gerade die Diagonaleinträge $a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}$.*

BEWEIS: Folgt direkt aus Lemma 6.7:

$$p_A(t) = \det(tI - A) = (t - a_{11})(t - a_{22}) \cdots (t - a_{nn}).$$

■

Es ist aber selbst für Matrizen über $\mathbb{C}$ nicht immer möglich, Diagonalgestalt zu erreichen. Sei zum Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix} \tag{7.5}$$

mit P invertierbar. Angenommen es gäbe eine Diagonalmatrix $D = \mathsf{diag}\,(d_{11}, d_{22})$ mit $P^{-1}AP = D$, dann muss $d_{11} = d_{22} = 0$ gelten, da D die gleichen Eigenwerte wie A hat. Dies führt zum Widerspruch $A = PDP^{-1} = 0$.

Wir werden uns im folgenden eine einfache Charakterisierung für die Diagonalisierbarkeit von Matrizen über einen Körper K erarbeiten. Die Konstruktion beruht auf dem folgenden Resultat.

Lemma 7.15 *Angenommen $A \in K^{n\times n}$ habe n linear unabhängige Eigenvektoren $x_1,\dots,x_n \in K^{n\times 1}$ zu den Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in K$. Dann gilt*

$$P^{-1}AP = \Lambda := \mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n), \quad \text{mit } P = \big(x_1,x_2,\dots,x_n\big).$$

BEWEIS: Es gilt $Ax_i = \lambda x_i$ für $i = 1,\dots,n$. Diese Beziehungen können nebeneinander geschrieben werden:

$$A\big(x_1,x_2,\dots,x_n\big) = \big(x_1,x_2,\dots,x_n\big)\mathrm{diag}\,(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n),$$

also $AP = P\Lambda$. Da $P \in K^{n\times n}$ linear unabhängige Spalten hat, ist P invertierbar und die Behauptung folgt. ■

Das Problem mit der Matrix A in Beispiel (7.5) ist, dass der Eigenwert 0 geometrische Vielfachheit 1 hat, man hat also nur einen anstatt von – wie in Lemma 7.15 gefordert – zwei linear unabhängigen Eigenvektoren zur Verfügung. Dies wäre nicht passiert, hätte A zwei verschiedene Eigenwerte gehabt!

Lemma 7.16 *Seien $x_1,\dots,x_m \in K^{n\times 1}$ Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_m \in K$ von $A \in K^{n\times n}$. Dann sind $x_1,\dots,x_m$ linear unabhängig.*

BEWEIS: Der Beweis erfolgt per Induktion über m. Für $m = 1$ folgt das Resultat aus $x_1 \neq 0$. Sei nun $m \geq 2$ und die Behauptung für $m-1$ erfüllt. Wir betrachten eine Linearkombination

$$0 = \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}x_{m-1} + \alpha_m x_m, \quad \alpha_1,\dots,\alpha_m \in K. \tag{7.6}$$

Anwendung von A auf beide Seiten ergibt

$$0 = \alpha_1 Ax_1 + \cdots + \alpha_{m-1}Ax_{m-1} + \alpha_m Ax_m = \alpha_1\lambda_1 x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}\lambda_{m-1}x_{m-1} + \alpha_m\lambda_m x_m.$$

Addiert man das $-\lambda_m$-fache von (7.6), so ergibt sich

$$0 = \alpha_1(\lambda_1-\lambda_m)x_1 + \cdots + \alpha_{m-1}(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x_{m-1}.$$

Nach Induktionsannahme sind $x_1,\dots,x_{m-1}$ linear unabhängig und damit ist $\alpha_i(\lambda_i-\lambda_m) = 0$ für $i = 1,\dots,m-1$. Da per Voraussetzung $\lambda_i \neq \lambda_m$, folgt

$$\alpha_1 = \cdots = \alpha_{m-1} = 0.$$

Einsetzen in (7.6) und Ausnutzen von $x_m \neq 0$ ergibt $\alpha_m = 0$. ■

Kombination von Lemma 7.15 und Lemma 7.16 ergibt:

Korollar 7.17 *Eine Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit n paarweise verschiedenen Eigenwerten ist diagonalisierbar.*

Da ein Polynom nicht mehr als n Nullstellen (inklusive Vielfachheiten) hat, gibt es nur dann n paarweise verschiedene Eigenwerte wenn $\mathrm{alg}_\lambda(A) = 1$ für jeden Eigenwert gilt. Diese Bedingung ist für Matrizen über $\mathbb{C}$ zwar hinreichend aber zum Glück nicht notwendig. Ein überzeugendes Gegenbeispiel ist die Einheitsmatrix I_n, die offenbar diagonalisierbar ist (da bereits in Diagonalgestalt), aber n gleiche Eigenwerte besitzt! Um ein notwendiges und hinreichendes Kriterium zu finden, benötigen wir zunächst das folgende Hilfsresultat.

Lemma 7.18 *Sei $\lambda \in K$ Eigenwert von $A \in K^{n\times n}$. Dann gilt $\mathrm{geo}_\lambda(A) \leq \mathrm{alg}_\lambda(A)$.*

BEWEIS: Sei $m = \mathrm{geo}_\lambda(A)$ und $y_1,\dots,y_m \in K^{n\times 1}$ eine Basis für $\mathrm{Eig}_\lambda(A)$; insbesondere gilt $A\big(y_1,\dots,y_m\big) = \big(y_1,\dots,y_m\big)\mathrm{diag}\,(\lambda,\dots,\lambda)$. Nach dem Basisergänzungssatz können wir Vektoren $y_{m+1},\dots,y_n$ finden, so dass $Y = \big(y_1,\dots,y_n\big)$ invertierbar ist. Wir erhalten

$$AY = Y\begin{pmatrix} \lambda I_m & A_{12} \\ 0 & A_{22}\end{pmatrix}.$$

Aus Satz 7.12 folgt $\det(tI-A) = (t-\lambda)^m\det(tI-A_{22})$, also ist $\mathrm{alg}_\lambda(A) \geq m$. ■

Satz 7.19 *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) A ist diagonalisierbar.

(ii) Das charakteristische Polynom p_A lässt sich in Linearfaktoren zerlegen und $\mathrm{alg}_\lambda(A) = \mathrm{geo}_\lambda(A)$ für jeden Eigenwert λ von A.

(iii) $K^{n\times 1} = \mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}_{\lambda_k}(A)$ für die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ von A.

BEWEIS: (i) $\Rightarrow$ (ii). Sei P invertierbare Matrix so dass $P^{-1}AP = D$ Diagonalmatrix. Es ist leicht einzusehen, dass die Aussage von (ii) für D erfüllt ist. Damit gilt die Aussage auch für A, da $p_A = p_D$ nach Satz 7.12, sowie $\mathrm{geo}_\lambda(A) = \mathrm{geo}_\lambda(D)$ aus $\mathrm{Eig}_\lambda(A) = P\cdot\mathrm{Eig}_\lambda(D)$ folgt.

(ii) $\Rightarrow$ (iii). Wir erinnern zunächst an den Begriff der direkten Summe aus Abschnitt 4.3, insbesondere in Definition 4.34. Setze $W := \mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) + \cdots + \mathrm{Eig}_{\lambda_k}(A)$. Nach Lemma 7.16 folgt, dass dies eine direkte Summe ist: $W = \mathrm{Eig}_{\lambda_1}(A) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}_{\lambda_k}(A)$. Damit folgt

$$\dim W = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{geo}_{\lambda_i}(A) = \sum_{i=1}^{k}\mathrm{alg}_{\lambda_i}(A) = n,$$

wobei im letzten Schritt die Zerlegung des charakteristischen Polynoms in Linearfaktoren ausgenutzt wurde. Aus $W \subset K^{n\times 1}$ folgt nun gemäss Lemma 4.20 die Beziehung $W = K^{n\times 1}$.

(iii) $\Rightarrow$ (i). Ist $x_{i1},\dots,x_{i,r_i}$ mit $r_i = \mathrm{geo}_{\lambda_i}(A)$ Basis von $\mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A)$, so ist gemäss Satz 4.35

$$\mathscr{B} = \big(x_{11},\dots,x_{1,r_1},\ x_{21},\dots,x_{2,r_2},\quad \dots,\quad x_{k1},\dots,x_{1,r_k}\big)$$

Basis von $K^{n\times 1}$. Da $\mathscr{B}$ nur aus Eigenvektoren besteht, folgt (i) direkt aus Lemma 7.15. ■

Korollar 7.20 *Sei $F \in L(V,V)$ mit einem endlichdimensionalen Vektorraum V über K. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) Es gibt eine Basis $\mathscr{B}$, so dass $[F]_{\mathscr{B},\mathscr{B}}$ Diagonalmatrix ist.

(ii) $V = \mathrm{Eig}_{\lambda_1}(F) \oplus \cdots \oplus \mathrm{Eig}_{\lambda_k}(F)$ für die paarweise verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1,\dots,\lambda_k$ von F.

Diagonalisierbarkeit von Matrizen ist ein mächtiges Werkzeug, das wir noch oft gebrauchen werden. Als erste Anwendung eine Charakterisierung von kommutierenden Matrizen, die eindrücklich belegt, dass Kommutativität eher eine Seltenheit und keinesfalls die Regel ist.

Lemma 7.21 *Seien $A, B \in K^{n\times n}$ diagonalisierbar. Dann gilt $AB = BA$ genau dann, wenn A und B simultan diagonalisierbar sind, d.h., es gibt eine invertierbare Matrix S, so dass $S^{-1}AS$ und $S^{-1}BS$ Diagonalmatrizen sind.*

BEWEIS: Seien $S^{-1}AS = \Lambda_A$ und $S^{-1}BS = \Lambda_B$ Diagonalmatrizen. Damit folgt

$$AB = S\Lambda_A S^{-1} S\Lambda_B S^{-1} = S\Lambda_A\Lambda_B S^{-1} = S\Lambda_B\Lambda_A S^{-1} = S\Lambda_B S^{-1} S\Lambda_A S^{-1} = BA,$$

da Diagonalmatrizen immer kommutieren.

Nehmen wir nun für die umgedrehte Richtung die Beziehung $AB = BA$ an. Wir diagonalisieren A, so dass

$$\tilde{S}^{-1}A\tilde{S} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{n_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{n_k} \end{pmatrix} =: \Lambda,$$

wobei $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ die paarweise verschiedenen Eigenwerte von A sind. Aus $AB = BA$ folgt dann $\Lambda\tilde{B} = \tilde{B}\Lambda$ mit $\tilde{B} = \tilde{S}^{-1}B\tilde{S}$. Partitionieren wir $\tilde{B} = \big(B_{ij}\big)_{i,j=1}^{k}$ mit $B_{ij} \in K^{n_i \times n_j}$, so erhalten wir

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_1 B_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_k B_{k1} & \cdots & \lambda_k B_{kk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 B_{11} & \cdots & \lambda_k B_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ \lambda_1 B_{k1} & \cdots & \lambda_k B_{kk} \end{pmatrix}.$$

Also folgt $B_{ij} = 0$ für $i \neq j$ und damit ist $\tilde{B}$ Blockdiagonalmatrix. Die Diagonalblöcke diagonalisieren wir auch noch: $S_i^{-1}B_{ii}S_i = \Lambda_i$ für $i = 1, \dots, k$. Dann werden A und B simultan durch die Matrix

$$S := \tilde{S}\begin{pmatrix} S_1 & & \\ & \ddots & \\ & & S_k \end{pmatrix}$$

diagonalisiert. ■

7.4 Lineare Rekursionen und Matrixpotenzen

Legt man $s_0 = 1000$ Franken an und beträgt der jährlich ausgeschüttete Zins 2%, so wächst der angelegte Geldbetrag nach 1 Jahr auf $s_1 = 1000 + 0.02 \times 1000 = 1.02 \times 1000$ Franken, nach 2 Jahren auf $s_2 = 1.02 \times s_1 = 1.02^2 \times 1000$ Franken, usw. Nach k Jahren haben wir also $s_k = (1.02)^k \times 1000$ Franken. Diese Formel ist eine explizite Lösung der linearen Rekursion $s_{k+1} = 1.02 \times s_k$ mit dem Startwert $s_0 = 1000$.

Eine weitere lineare Rekursion haben wir bereits in Abschnitt 1.5.2 (Matrix-Vektor Multiplikation) kennengelernt:

$$f_0 = 1, \qquad f_1 = 1, \qquad f_{k+2} = f_{k+1} + f_k, \quad k \geq 0, \tag{7.7}$$

welche die Fibonacci-Folge generiert. Auch hier wäre es wünschenswert, eine explizite Formel für f_k angeben zu können. Dazu ist es bei linearen Rekursionen hilfreich, diese in Matrix-Vektor-Form zu bringen. Dies haben wir bereits für (7.7) gesehen und die Idee lässt sich leicht verallgemeinern. Wir betrachten eine allgemeine **lineare Rekursion n-ter Ordnung**:

$$f_{k+n} = \alpha_{n-1} f_{k+n-1} + \cdots + \alpha_1 f_{k+1} + \alpha_0 f_k \tag{7.8}$$

mit Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in K$ für einen Körper K. Um (7.8) "starten" zu können, braucht es noch **Anfangswerte** (auch: Startwerte)

$$f_0 = s_0 \in K, \quad f_1 = s_1 \in K, \quad \ldots, \quad f_{n-1} = s_{n-1} \in K. \tag{7.9}$$

Definiert man nun den Vektor

$$u_k := \begin{pmatrix} f_k \\ f_{k+1} \\ \vdots \\ f_{k+n-1} \end{pmatrix},$$

so sieht man leicht, dass (7.8)–(7.9) äquivalent zu dem System

$$u_{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} u_k, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix}, \tag{7.10}$$

sind. Abgesehen vom Vorzeichen der Koeffizienten, entspricht die Systemmatrix in (7.10) gerade der Transponierten der in Lemma 7.3 betrachteten Begleitmatrix! Das folgende Lemma gibt noch weitere, zur Behandlung von (7.10) nützliche Eigenschaften an.

Lemma 7.22 *Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Matrix wie in (7.10) mit Koeffizienten $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen:*

(i) A hat das charakteristische Polynom $p_A = t^n - \alpha_{n-1}t^{n-1} - \cdots - \alpha_1 t - \alpha_0$.

(ii) Ist $\lambda \in K$ Eigenwert von A, so ist $x = \left(1, \lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^{n-1}\right)^\mathsf{T}$ ein dazugehöriger Eigenvektor.

(iii) A ist genau dann diagonalisierbar, wenn es n paarweise verschiedene Eigenwerte hat.

BEWEIS: (i) folgt sofort aus Lemma 7.3.

Zu (ii).

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \\ \lambda^n - p_A(\lambda) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ \lambda^{n-2} \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Zu (iii). Die eine Richtung, n paarweise verschiedene Eigenwerte $\Rightarrow$ A diagonalisierbar, ist klar. Für die andere Richtung nehmen wir an, dass A diagonalisierbar sei. Man sieht leicht, dass die letzten $n-1$ Spalten von $tI - A$ immer linear unabhängig sind. Also gilt $\mathsf{geo}_\lambda(A) = \dim \mathsf{Kern}(\lambda I - A) = 1$ und nach Satz 7.19 folgt $\mathsf{alg}_\lambda(A) = \mathsf{geo}_\lambda(A) = 1$. Also sind die Eigenwerte von A paarweise verschieden. ■

Im Resultat von Lemma 7.22 treffen wir eine Bekannte wieder. Wenn A wie in (7.10) paarweise verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in K$ hat, so können wir die dazugehörigen Eigenvektoren in eine Matrix

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \cdots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{7.11}$$

schreiben. Da die Eigenvektoren von A linear unabhängig sind, ist diese Matrix invertierbar.[23] Dies wurde bereits (mit anderen Mitteln) in Aufgabe 2 von Serie 10 für die Transponierte von P gezeigt.

Wir wollen nun (7.10) betrachten ohne eine spezielle Form der Matrix anzunehmen.

Definition 7.23 *Ein **lineares homogenes System von Rekursionen** (auch: **Differenzengleichungen**) hat die Form*

$$u_{k+1} = Au_k, \qquad u_0 = s, \tag{7.12}$$

mit $A \in K^{n\times n}$, $u_k \in K^{n\times 1}$, und Anfangswerten $s \in K^{n\times 1}$.

Für eine diagonalisierbare Matrix A ist es nun einfach, eine explizite Formel für die durch (7.12) definierten Vektoren $u_k = A^k s$ anzugeben. Sei dazu

$$A = P\Lambda P^{-1},$$

mit $\Lambda = \mathrm{diag}\left(\lambda_1, \ldots, \lambda_n\right)$ und der invertierbaren Matrix $P = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}$. Dann haben wir

$$A^k = \left(P\Lambda P^{-1}\right)\left(P\Lambda P^{-1}\right)\cdots\left(P\Lambda P^{-1}\right) = P\Lambda^k P^{-1}.$$

Setzen wir $c := P^{-1}u_0$, so lässt sich die Lösung von (7.12) also wie folgt schreiben:

$$u_k = P\Lambda^k c = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1^k & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1\lambda_1^k x_1 + \cdots + c_n \lambda_n^k x_n. \tag{7.13}$$

[23] Es ist auch gerade die Transformationsmatrix, die A diagonalisiert.

Es lohnt sich, diese Gleichung etwas näher zu betrachten. Zunächst ist c der Koordinatenvektor des Startvektors in der Basis der in den Spalten von P enthaltenen Eigenvektoren. Sollte der Anfangsvektor gerade ein Eigenvektor x_j sein, so erhält man die "reine" Lösung $\lambda_j^k x_j$. Gemäss (7.13) ist u_k eine Linearkombination von solchen reinen Lösungen. Gibt es einen Eigenwert, der betragsmässig grösser als alle anderen Eigenwerte ist, so kann man sich leicht vorstellen, dass für grosse k die zugehörige reine Lösung schnell dominieren wird.

Beispiel 7.4: Wir betrachten das zu der Fibonnacci-Folge (7.7) gehörige System

$$u_{k+1} = Au_k, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad u_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Die Eigenwerte von A ergeben sich aus

$$0 = \det(\lambda I - A) = \lambda^2 - \lambda - 1 \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2},\ \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

und die Eigenvektormatrix nach (7.11),

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad c = P^{-1}u_0 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 \\ \lambda_1 - 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix}.$$

Also erhalten wir mit (7.13) die Beziehung

$$u_k = \frac{\lambda_1}{\sqrt{5}}\lambda_1^k \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_1 \end{pmatrix} - \frac{\lambda_2}{\sqrt{5}}\lambda_2^k \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda_2 \end{pmatrix}$$

Betrachten wir nur die erste Komponente, so ergibt sich letztendlich

$$f_k = \frac{1}{\sqrt{5}}(\lambda_1^{k+1} - \lambda_2^{k+1}) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{k+1}\right).$$

♦

Wir betrachten nun das asymptotische Verhalten der Lösungen für grosse k näher. Dieses wird wesentlich vom betragsgrössten Eigenwert abhängen.

Definition 7.24 *Der* ***Spektralradius*** *[spectral radius]* $\rho(A)$ *einer Matrix* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *ist definiert als*

$$\rho(A) := \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C} \text{ ist ein Eigenwert von } A\}.$$

Sei A nun diagonalisierbar und die Eigenwerte $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ so sortiert, dass

$$\rho(A) = |\lambda_1| = \cdots = |\lambda_m| > |\lambda_{m+1}| \geq \cdots \geq |\lambda_n|. \tag{7.14}$$

Dann folgt aus (7.13):

$$u_k = \rho(A)^k \left(c_1 \frac{\lambda_1^k}{\rho(A)^k}x_1 + \cdots + c_m \frac{\lambda_m^k}{\rho(A)^k}x_m + c_{m+1}\frac{\lambda_{m+1}^k}{\rho(A)^k}x_{m+1} + \cdots + c_n \frac{\lambda_n^k}{\rho(A)^k}x_n\right). \tag{7.15}$$

Dabei haben die Einträge in den ersten m Summanden innerhalb der Klammer konstanten Betrag und die Einträge in den letzten $n-m$ Summanden konvergieren gegen 0 für $k \to \infty$. Also wird die Konvergenz von u_k von $\rho(A)$ bestimmt.

Lemma 7.25 *Sei A diagonalisierbar. Dann konvergiert die Lösung u_k von (7.12) für jeden Startvektor u_0 genau dann gegen 0, wenn $\rho(A) < 1$.*

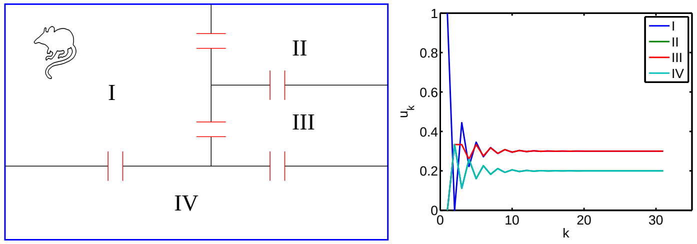


Abbildung 7.1. Links: *Maus in einem System von 4 Käfigen.* Rechts: *Entwicklung der Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Maus.*

Die Aussage des Lemmas ist auch für nichtdiagonalisierbare Matrizen gültig; um dies nachzuweisen fehlen uns aber noch die nötigen Hilfsmittel. Im Fall $\rho(A) > 1$ ist wegen (7.15) klar, dass für die meisten Anfangsvektoren u_0 (bei denen nicht gerade $c_1 = \cdots = c_m = 0$ gilt) die Einträge von u_k divergieren werden. Für den Grenzfall, $\rho(A) = 1$, kann unter gewissen Voraussetzungen weiterhin Konvergenz vorliegen. Gilt insbesondere

$$1 = \lambda_1 = \cdots = \lambda_m \tag{7.16}$$

in (7.14), so folgt aus (7.15),

$$u_k \overset{k\to\infty}{\to} u_\infty = c_1 x_1 + \cdots + c_m x_m, \tag{7.17}$$

zumindest für diagonalisierbare A. Diese Aussage bleibt für nichtdiagonalisierbare Matrizen A gültig, aber nur unter der zusätzlichen Vorraussetzung $\mathsf{alg}_1(A) = \mathsf{geo}_1(A)$. Ist diese Voraussetzung nicht erfüllt, so wird u_k im allgemeinen nicht beschränkt bleiben. Einfachstes Beispiel ist

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad A^k = \begin{pmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

7.4.1 Positive Matrizen

In vielen Anwendungen sind die Einträge von Matrizen reell und nichtnegativ. Dies ist insbesondere der Fall, wenn die Einträge Übergangswahrscheinlichkeiten darstellen. Ein nicht ernst gemeintes Beispiel wird in Abbildung 7.1 links dargestellt. Zum Zeitpunkt $k = 0$ befindet sich eine Maus in Käfig I. Enthält der Vektor $u_k \in \mathbb{R}^{4\times 1}$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten der Maus in den einzelnen Käfigen, so gilt also $u_0 = (1, 0, 0, 0)^\mathsf{T}$. Zum Zeitpunkt $k = 1$ werden alle rot dargestellten Türen geöffnet und die Maus rennt wahllos (also jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/3$) in einen der anderen Käfige. Sobald sich die Maus in einem anderen Käfig befindet, werden die Türen geschlossen und es gilt $u_1 = (0, 1/3, 1/3, 1/3)^\mathsf{T}$. Dieses Prozedure wird wiederholt und nach den Rechenregeln für bedingte Wahrscheinlichkeiten, gilt $u_2 = Au_1 = \frac{1}{9}(4, 1, 3, 1)$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/3 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 0 \end{pmatrix}. \tag{7.18}$$

Im allgemeinen gilt $u_k = Au_{k-1} = A^k u_0$. Die Entwicklung der Einträge von u_k in Abhängigkeit von k wird in Abbildung 7.1 rechts dargestellt. Wie unschwer zu erkennen ist, konvergieren die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten für $k \to \infty$. Dies ist kein Zufall, die Eigenwerte von A sind nämlich $1, -2/3, -1/3, 0$ und damit konvergiert u_k gemäss (7.17) gegen einen Eigenvektor u_∞ zum Eigenwert 1. Die Wahl des Vektors u_∞ wird eindeutig durch die zusätzlichen Bedingungen, dass die Einträge nichtnegativ sind und ihre Summe 1 ergibt: $u_\infty = \frac{1}{10}(3,2,3,2)^\mathsf{T}$.

Wir werden im folgenden sehen, dass die beobachteten Eigenschaften der Matrix A in (7.18) sich verallgemeinern lassen. Dabei wollen wir uns zunächst auf den (einfacheren) Fall einer Matrix mit reellen positiven Einträgen beschränken. Eine solche Matrix A nennen wir positiv und schreiben $A > 0$. Für zwei $m \times n$-Matrizen B, C schreiben wir $B > C$ wenn $B - C > 0$ gilt.

Satz 7.26 (Perron) *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv. Dann gelten die folgenden Aussagen für den Spektralradius $r = \rho(A)$.*

(i) $r > 0$;

(ii) r ist Eigenwert von A;

(iii) r ist der einzige Eigenwert von A mit Betrag r;

(iv) r ist einfacher Eigenwert von A, dass heisst $\mathsf{alg}_r(A) = 1$;

(v) es gibt einen zu r gehörigen Eigenvektor x mit reellen, positiven Einträgen;

(vi) A hat, abgesehen von positiven Vielfachen von x, keine weiteren Eigenvektoren mit reellen, nichtnegativen Einträgen.

BEWEIS: Zu (i). Beweis per Widerspruch: Sei $r = 0$. Dann hat A nur Eigenwerte 0, das charakteristische Polynom ist also $p_A = t^n$. Nach dem Satz von Cayley-Hamilton gilt $A^n = 0$; dies steht aber im Widerspruch dazu, dass A^n positiv ist.

Im folgenden können wir o.B.d.A. $r = 1$ annehmen, indem wir A einfach durch $\frac{1}{\rho(A)}A$ ersetzen.

Zu (ii) und (v). Da der Spektralradius $r = 1$ ist, gibt es einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ mit $|\lambda| = 1$ und zugehörigem Eigenvektor $y \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Im folgenden bezeichnet $|C|$ für $C \in \mathbb{C}^{m\times n}$ die Matrix mit den Einträgen $(|C|)_{ij} := |c_{ij}|$. Aus der Dreiecksungleichung für komplexe Zahlen folgt:

$$|y| = |\lambda y| = |Ay| \le |A| \cdot |y| = A|y|. \tag{7.19}$$

Die Aussagen von (ii) und (v) folgen (mit $x = |y|$) wenn wir Gleichheit zeigen können. Mit $z := A|y|$ und $b := z - |y|$ folgt aus (7.19), dass b nichtnegative Einträge hat. Nehmen wir an, dass mindestens ein Eintrag von b verschieden von Null, also positiv ist. Dann folgt $Ab > 0$. Da auch $z = A|y| > 0$, gibt es $\varepsilon > 0$ mit $Ab > \varepsilon z$. Einsetzen von $b = z - |y|$ und Umstellen ergibt

$$Bz > z, \quad \text{mit} \quad B := \frac{1}{1+\varepsilon}A.$$

Also gilt $B^k z > z$ für alle k. Wegen $\rho(B) = \rho(A)/(1+\varepsilon) = 1/(1+\varepsilon) < 1$ und Lemma 7.25[24] gilt aber $B^k \to 0$. Dies ist ein Widerspruch, also gilt Gleichheit in (7.19).

[24] Der Nachweis der Gültigkeit von Lemma 7.25 für nichtdiagonalisierbare Matrizen steht noch aus. Im Moment soll dies einfach mal geglaubt werden.

Für (iii) bleibt zu zeigen, dass für einen Eigenwert λ auf dem Spektralradius tatsächlich $\lambda = 1$ und nicht nur $|\lambda| = 1$ gilt. Wir haben

$$\Big|\sum_{j=1}^n a_{ij} y_j\Big| = |y_i| = \sum_{j=1}^n |a_{ij} y_j|. \tag{7.20}$$

Die linke Seite folgt aus der Beziehung $Ay = \lambda y$ und die rechte Seite aus der gerade bewiesenen Beziehung $|y| = A|y|$. Man sieht leicht ein, dass (7.20) nur gelten kann, wenn alle Summanden das gleiche Vorzeichen haben. Es gibt also einen Vektor $p = (1, p_2, \dots, p_n)^\mathsf{T}$ mit $p > 0$ und $y = y_1 p$. Aus $\lambda x = Ax$ folgt für diesen Vektor

$$\lambda p = Ap = |Ap| = |\lambda p| = p \quad \Rightarrow \quad \lambda = 1.$$

Zu (iv). Da $\rho(A^\mathsf{T}) = \rho(A) = 1$ gibt es $w \in \mathbb{R}^{n\times 1}$ mit $w > 0$ und $A^\mathsf{T} w = w$. Wir skalieren w, so dass $w^\mathsf{T} x = 1$ für den oben konstruierten Eigenvektor $x > 0$ von A. Wir wählen nun eine Matrix $X_\perp \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ deren Spalten eine Basis von $\mathsf{Kern}(w^\mathsf{T})$ bilden. Da $w^\mathsf{T} x \ne 0$ ist $x \notin \mathsf{Kern}(w^\perp)$. Also ist die Matrix $P = (x, X_\perp)$ invertierbar und die Inverse hat die Form $P^{-1} = \begin{pmatrix} w^\mathsf{T} \\ W_\perp^\mathsf{T} \end{pmatrix}$ für ein $W_\perp \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ mit $W_\perp^\mathsf{T} x = 0$. Also gilt

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} w^\mathsf{T}Ax & w^\mathsf{T}AX_\perp \\ W_\perp^\mathsf{T}Ax & W_\perp^\mathsf{T}AX_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w^\mathsf{T}x & w^\mathsf{T}X_\perp \\ W_\perp^\mathsf{T}x & W_\perp^\mathsf{T}AX_\perp \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & W_\perp^\mathsf{T}AX_\perp \end{pmatrix}.$$

Unter der *Annahme* $\mathsf{alg}_1(A) > 1$ hat $W_\perp^\mathsf{T}AX_\perp$ einen Eigenwert 1 mit zugehörigem Eigenvektor $\tilde y_2$. Damit hat A den von x linear unabhängigen Eigenvektor $\tilde x = P^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ \tilde y_2 \end{pmatrix}$. Wähle nun i, so dass $\tilde x_i \ne 0$. Dann ist $y = x - \frac{x_i}{\tilde x_i}\tilde x$ nicht Null (da $x, \tilde x$ linear unabhängig) und Eigenvektor zum Eigenwert 1. Vom Beweis zu (ii) wissen wir, dass damit auch $|y|$ ein Eigenvektor ist; es gilt also $|y| = A|y| > 0$. Dies ist aber ein Widerspruch, da die i-te Komponente von y per Konstruktion 0 ist. Damit folgt $\mathsf{alg}_1(A) = 1$.

Zu (vi). Wie im Beweis von (iv) sei $w > 0$ so dass $w^\mathsf{T} A = w$ und $w^\mathsf{T} x = 1$. Ist $\tilde x \ge 0$ Eigenvektor von A zu einem Eigenwert λ, dann folgt aus $A\tilde x = \lambda \tilde x$ die Beziehung $\lambda = \lambda w^\mathsf{T}\tilde x = w^\mathsf{T} A\tilde x = w^\mathsf{T}\tilde x = 1$. Nach (iv) ist aber $\mathsf{geo}_1(A) = \mathsf{alg}_1(A) = 1$; $\tilde x$ muss also positives Vielfaches von x sein. ■

Korollar 7.27 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ positiv und spaltenstochastisch, dass heisst, $\sum_{i=1}^n a_{ij} = 1$ für $j = 1, \dots, n$. Dann ist $\rho(A) = 1$ Eigenwert mit positivem Eigenvektor x und $\mathsf{alg}_1(A) = 1$.*

BEWEIS: Sobald $\rho(A) = 1$ gezeigt ist, folgt die Aussage aus Satz 7.26. Da $A^\mathsf{T} e = e$ für $e = (1, \dots, 1)^\mathsf{T}$, hat A^T (und damit auch A) den Eigenwert 1. Sei nun $\lambda \in \mathbb{C}$ ein beliebiger Eigenwert von A^T mit Eigenvektor y. Sei j so dass $y_j \ne 0$. Dann folgt aus der Dreiecksungleichung für die j-te Zeile der Beziehung $A^\mathsf{T} y = \lambda y$, dass

$$|\lambda|\,|y_j| = \Big|\sum_{i=1}^n a_{ij} y_i\Big| \le \sum_{i=1}^n a_{ij} |y_i| \le |y_j|$$

und somit $|\lambda| < 1$. Also ist $\rho(A) = 1$. ■

In praktischen Anwendungen haben Matrizen oft sehr viele Nulleinträge und es ist daher fast nie realistisch zu verlangen, dass alle Einträge positiv sind; so z.B. bei der "Maus"-Matrix in (7.18). Für eine **nichtnegative Matrix**, bei der alle Einträge reell und nichtnegativ sind, gehen die meisten der in Satz 7.26 aufgeführten Eigenschaften verloren, wenn man nicht weitere Forderungen an die Matrix stellt. Zum Beispiel hat die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{7.21}$$

die Eigenwerte 0 und 3, mit $\mathrm{alg}_3(A) = 2$ und $\mathrm{geo}_3(A) = 1$. Jeder Eigenvektor zu 3 hat die Form $x = (\alpha, \alpha, 0)^\mathsf{T}$; es gibt insbesondere keinen positiven Eigenvektor. Das Besondere an dieser Matrix ist, dass sie in oberer Blockdreiecksform

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix}, \qquad A_{11} \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_1}, \quad A_{22} \in \mathbb{C}^{n_2 \times n_2},$$

ist. Hat eine Matrix A diese Form oder gibt es eine Permutationsmatrix P so dass $P^\mathsf{T} AP$ diese Form hat, dann heisst A **reduzibel**. Ansonsten heisst A **irreduzibel**.[25] Der Satz von Perron-Frobenius sagt aus, dass für eine irreduzible nichtnegative Matrix A der Spektralradius $r = \rho(A)$ ein einfacher Eigenwert ist und dass es einen zugehörigen positiven Eigenvektor gibt. Eine wichtige Eigenschaft von Satz 7.26 ist aber immer noch nicht erfüllt, nämlich dass r der einzige Eigenwert mit Betrag $\rho(A)$ ist. Z.B. ist

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

irreduzibel und hat die Eigenwerte $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = -1+\sqrt{3}\mathrm{i}, \lambda_3 = -1-\sqrt{3}\mathrm{i}$, mit $|\lambda_1| = |\lambda_2| = |\lambda_3| = 2$. Eine solche Situation kann ausgeschlossen werden indem man zusätzlich fordert, dass A **primitiv** ist, dass heisst, es gibt eine $k \in \mathbb{N}$ mit $A^k > 0$.

Bemerkung 7.28 *In der ursprünglichen Idee von Google PageRank werden Seiten je höher bewertet umso öfter sich ein zufälliger Surfer im Mittel auf diesen aufhalten würde. Sei A eine Link-Matrix wie in (1.4). Startet ein zufälliger Surfer von Seite 1, dann stehen die Aufenthaltswahrscheinlichkeiten nach einem Klick in dem Vektor $A^\mathsf{T} e_1$, nach zwei Klicks in $(A^\mathsf{T})^2 e_1$, nach drei Klicks in $(A^\mathsf{T})^3 e_1$, usw. Damit der PageRank Sinn macht, sollten diese Aufenthaltswahrscheinlichkeiten gegen einen positiven Vektor x konvergieren. Dies lässt sich garantieren wenn A^T primitiv ist. Das ist aber unrealistisch; insbesondere müsste man für Irreduzibilität fordern, dass es im Internet keine Sackgassen gibt. In ihrer Arbeit* The Anatomy of a Large-Scale Hypertextual Web Search Engine *schlugen S. Brin und L. Page einen einfachen Ausweg vor: Die $n \times n$-Matrix A^T wird durch*

$$B = \alpha A^\mathsf{T} + (1-\alpha) e e^\mathsf{T}, \quad \alpha = 0.85, \quad e = \frac{1}{\sqrt{n}} \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

ersetzt. Die Matrix B ist auf jeden Fall positiv. Man kann diesen Trick so interpretieren, dass der zufällige Surfer mit Wahrscheinlichkeit 15% nicht klickt, sondern irgendeine beliebige Seite aus dem Internet wählt.

[25] Eine Matrix A ist genau dann irreduzibel, wenn der dazugehörige gerichtete Graph nur eine starke Zusammenhangskomponente hat.

7.5 Differentialgleichungen und Matrixexponential

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit der Lösung und Eigenschaften von speziellen Differentialgleichungen beschäftigen.

Definition 7.29 *Ein **lineares System von gewöhnlichen Differentialgleichungen** [linear system of ordinary differential equations] hat die Form*

$$u'(t) = Au(t) + b(t), \tag{7.22}$$

mit einer Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ und einer Inhomogenität $b(t) \in \mathbb{C}^{n\times 1}$. Verlangt man noch die Anfangswertbedingung

$$u(t_0) = u_0 \tag{7.23}$$

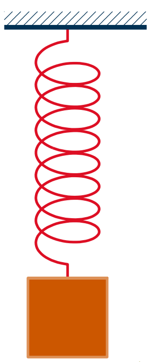
*zu einem Zeitpunkt t_0 mit vorgegebenem $u_0 \in \mathbb{C}^{n\times 1}$, so ist (7.22)–(7.23) eine **Anfangswertaufgabe** [initial value problem].*

In Definition 7.29 wird die Ableitung des Spaltenvektors $u(t)$ elementweise verstanden:

$$u'(t) = \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} u_1(t) & u_2(t) & \cdots & u_n(t) \end{pmatrix}^\mathsf{T} = \begin{pmatrix} u_1'(t) & u_2'(t) & \cdots & u_n'(t) \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Man beachte, dass bei der Ableitung einer komplexwertigen Funktion $u_i : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ Real- und Imaginärteil einfach separat abgeleitet werden.

Beispiel 7.5:



Für den rechts dargestellten Federschwinger mit masseloser Feder bezeichne x die vertikale Auslenkung der Masse relativ zur Ruhelage. Dann erfüllt $x(t)$ die Differentialgleichung

$$x''(t) = -\omega^2 x(t), \quad x(0) = x_0, \quad x'(0) = v_0, \tag{7.24}$$

wobei x_0 die Anfangsauslenkung und v_0 die Anfangsgeschwindigkeit ist. Die Konstante $\omega > 0$ ergibt sich mit $\omega = \sqrt{D/m}$ aus der Masse m und der Federkonstanten D. Führt man den Vektor $u(t) = (x(t), x'(t))^\mathsf{T}$ ein, so lässt sich (7.24) als System erster Ordnung schreiben:

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} u(t), \quad u(0) = \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \tag{7.25}$$

Das Vorgehen in Beispiel 7.5 lässt sich leicht verallgemeinern. Ist eine lineare gewöhnliche Differentialgleichung der Form

$$f^{(n)}(t) = \alpha_{n-1} f^{(n-1)}(t) + \cdots + \alpha_1 f'(t) + \alpha_0 f(t) + g(t) \tag{7.26}$$

mit Anfangswerten

$$f(t_0) = s_0, \quad f'(t_0) = s_1, \quad \ldots, \quad f^{(n-1)}(t_0) = s_{n-1} \tag{7.27}$$

gegeben, so lässt sich dies in ein System der Form (7.22) durch Einführung des Vektors $u(t) = \big(f(t), f'(t), \ldots, f^{(n-1)}(t)\big)^\mathsf{T} \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ umwandeln. Die Gleichungen (7.26)–(7.27) zusammen mit $u_{i+1}(t) = u_i'(t)$ für $i = 1,\ldots,n-1$ ergeben

$$u'(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ \alpha_0 & \cdots & \alpha_{n-2} & \alpha_{n-1} \end{pmatrix} u(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(t) \end{pmatrix}, \quad u(t_0) = \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_{n-1} \end{pmatrix}. \tag{7.28}$$

Die Systemmatrix A ist identisch mit der Systemmatrix in (7.10), von der wir bereits in Lemma 7.22 einige Eigenschaften kennengelernt haben.

Wir betrachten jetzt den allgemeinen Fall (7.22) näher.

Satz 7.30 *Seien die Einträge von $b(t) \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ stetig auf dem Intervall $[t_0,T]$ für ein $T > t_0$. Dann besitzt die Anfangswertaufgabe (7.22)–(7.23) linearer gewöhnlicher Differentialgleichungen eine eindeutige Lösung $u(t)$ auf dem Intervall $[t_0,T]$.*

BEWEIS: Diese Aussage folgt aus dem wesentlich allgemeineren Satz von Picard-Lindelöf, den Sie im Verlaufe des Studiums noch kennenlernen werden. ■

Für eine diagonalisierbare Matrix A lässt sich die Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe

$$u'(t) = Au(t), \quad u(t_0) = u_0, \tag{7.29}$$

leicht angeben. Sei dazu

$$P^{-1}AP = \Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \quad P = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}.$$

Mit $\tilde u(t) := P^{-1}u(t)$ und $\tilde u_0 = P^{-1}u_0$ ist (7.29) äquivalent zu dem reduzierten System

$$\tilde u'(t) = \Lambda \tilde u(t), \quad \tilde u(t_0) = \tilde u_0 =: (c_1,\ldots,c_n)^{\mathsf T}.$$

Dieses zerfällt aber in n lineare gewöhnliche Differentialgleichungen

$$\tilde u_j(t) = \lambda_j \tilde u_j(t), \quad \tilde u_j(t_0) = c_j, \qquad j = 1,\ldots,n,$$

deren Lösung durch $\tilde u_j(t) = c_j e^{\lambda_j(t-t_0)}$ gegeben ist. Also hat die Lösung von (7.29) die Form

$$u(t) = P\tilde u(t) = P \begin{pmatrix} c_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} \\ \vdots \\ c_n e^{\lambda_n(t-t_0)} \end{pmatrix} = c_1 e^{\lambda_1(t-t_0)} x_1 + \cdots + c_n e^{\lambda_n(t-t_0)} x_n.$$

Die Lösung lässt sich damit als eine durch den Anfangsvektor bestimmte Linearkombination von harmonischen Lösungen $e^{\lambda_j(t-t_0)}x_j$ schreiben.

Beispiel 7.6: Für den in Beispiel 7.5 betrachteten Federschwinger hat die Systemmatrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$ die folgenden Eigenwerte und Eigenvektoren:

$$\lambda_1 = \mathrm{i}\omega, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\omega \end{pmatrix}, \quad \lambda_2 = -\mathrm{i}\omega, \quad x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}.$$

Also hat die Lösung von (7.25) die Form

$$u(t) = c_1 e^{\mathrm{i}\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i}\omega \end{pmatrix} + c_2 e^{-\mathrm{i}\omega t} \begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i}\omega \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt für die erste Komponente (vertikale Auslenkung der Feder)

$$x(t) = c_1 e^{\mathrm{i}\omega t} + c_2 e^{-\mathrm{i}\omega t} = (c_1 - c_2)\mathrm{i}\sin(\omega t) + (c_1 + c_2)\cos(\omega t).$$

Durch Einsetzen sieht man leicht $c_1 + c_2 = x_0$ sowie $c_1 - c_2 = v_0/(\mathrm{i}\omega)$. Also ist $x(t) = x_0\cos(\omega t) + v_0/\omega \sin(\omega t)$ die Lösung von (7.24). ♦

7.5.1 Das Matrixexponential

Im Fall eines linearen homogenen Systems von Differenzengleichungen besitzt die Lösung eine einfache Darstellung mittels Matrixpotenzen. Wir werden jetzt eine ähnliche Darstellung für Differentialgleichungen entwickeln.

Definition 7.31 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Dann ist das* ***Exponential der Matrix*** *A die Matrix*

$$e^A := I_n + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \frac{1}{4!}A^4 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k. \tag{7.30}$$

Damit diese Definition Sinn macht, muss noch sichergestellt werden, dass die Reihe in (7.30) tatsächlich konvergiert.

Lemma 7.32 *Jeder Eintrag der in (7.30) definierten Matrixreihe konvergiert absolut.*

BEWEIS: Setze $\gamma := \max_{ij}|a_{ij}|$ und sei $c_{ij}^{(k)}$ der Eintrag (i,j) von A^k. Dann gilt $|c_{ij}^{(k)}| \le n^{k-1}\gamma^k$ für $k \ge 1$. Dies lässt sich leicht per Induktion zeigen. Im Induktionsschritt verwendet man

$$|c_{ij}^{(k+1)}| = \Big|\sum_{\ell=1}^{n} c_{i\ell}^{(k)} a_{\ell j}\Big| \le \sum_{\ell=1}^{n} |c_{i\ell}^{(k)}|\,|a_{\ell j}| \le \sum_{\ell=1}^{n} n^{k-1}\gamma^k\gamma = n^k\gamma^{k+1}.$$

Wenn also c_{ij} den Eintrag (i,j) der in (7.30) formal definierten Matrixreihe für e^A bezeichnet, so folgt

$$|c_{ij}| \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!}|c_{ij}^{(k)}| \le 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}\gamma^k}{k!} < \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k\gamma^k}{k!} = e^{n\gamma}.$$

Also konvergiert der Eintrag (i,j) absolut. (Bemerkung: Mit den im 2. Semester eingeführten Matrixnormen lässt sich dieser Beweis kürzer und eleganter formulieren.) ■

Das folgende Lemma sammelt verschiedene Eigenschaften des Matrixexponentials.

Lemma 7.33 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

(i) Ist $A = \operatorname{diag}(a_{11},\ldots,a_{nn})$, so gilt $e^A = \operatorname{diag}(e^{a_{11}},\ldots,e^{a_{nn}})$;

(ii) $e^{(A^{\mathsf T})} = (e^A)^{\mathsf T}$ und $e^{(A^{\mathsf H})} = (e^A)^{\mathsf H}$.

(iii) Die Einträge von e^{tA} sind nach t differenzierbar und es gilt $\frac{\partial}{\partial t}e^{tA} = Ae^{tA}$.

(iv) Gilt $AB = BA$ für eine Matrix $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$, so folgt $e^{A+B} = e^A e^B$.

(v) e^A ist invertierbar und es gilt $(e^A)^{-1} = e^{-A}$.

(vi) $e^{P^{-1}AP} = P^{-1}e^A P$ für jede invertierbare Matrix $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$.

(vii) $\det(e^A) = e^{\operatorname{Spur}(A)}$.

BEWEIS: (i) und (ii) folgen sofort aus der Definition des Matrixexponentials.

Zu (iii). Per Definition folgt

$$\frac{\partial}{\partial t}e^{tA} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!}A^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^{k+1} = Ae^{tA}.$$

Zu (iv) und (v). Ähnlich wie in (iii) prüft man mit Hilfe von $AB = BA$ leicht die Beziehung $\frac{\partial}{\partial t}e^{tA+B} = Ae^{tA+B}$ nach. Nun folgern wir mit der Produktregel, die auch für Ableitungen von matrixwertigen Funktionen gilt:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-tA}e^{tA+B}\right) &= \left(\frac{\partial}{\partial t}e^{-tA}\right)e^{tA+B} + e^{-tA}\left(\frac{\partial}{\partial t}e^{tA+B}\right)\\ &= -Ae^{-tA}e^{tA+B} + e^{-tA}Ae^{tA+B} = -Ae^{-tA}e^{tA+B} + Ae^{-tA}e^{tA+B} = 0,\end{aligned}$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausgenutzt haben, dass A und e^{-tA} kommutieren. Also gibt es eine von t unabhängige Matrix C mit $e^{-tA}e^{tA+B} = C$. Einsetzen von $t = 0$ ergibt $C = e^B$. Setzt man $t = 1$ und $B = 0$, so folgt aus $e^{-A}e^A = I$ die Aussage von (v). Die Aussage von (iv) folgt wiederum aus $t = 1$, aber jetzt mit allgemeinem B:

$$e^{-A}e^{A+B} = e^B \quad\Rightarrow\quad e^{A+B} = \left(e^{-A}\right)^{-1}e^B = e^Ae^B.$$

(Bemerkung: Sind A, B diagonalisierbar, so lässt sich (iv) wesentlich einfacher mit Lemma 7.21 schliessen.)

(vi) folgt per Definition aus der bereits bewiesenen Beziehung $\left(P^{-1}AP\right)^k = P^{-1}A^kP$.

(vii) ist Übung. ■

Aus Lemma 7.33 (i) und (vi) ergibt sich für diagonalisierbare Matrizen die folgende Möglichkeit zur Berechnung:

$$A = P\,\mathrm{diag}\,(\lambda_1, \dots, \lambda_n)P^{-1} \quad\Rightarrow\quad e^A = P\,\mathrm{diag}\,(e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n})P^{-1}. \tag{7.31}$$

Es sollte an dieser Stelle aber darauf hingewiesen werden, dass dieser Weg bei numerischen Berechnungen (ausser für symmetrische Matrizen) vermieden wird, da er zu unnötig ungenauen Ergebnissen führen kann. Die MATLAB-Funktion `expm` berechnet das Matrixexponential mit dem sogenannten Scaling-und-Squaring-Algorithmus kombiniert mit einer rationalen Approximation.

Bemerkung 7.34 *Ohne Kommutativität ist die Aussage von Lemma 7.33 (iv)* nicht *richtig. Wählt man zum Beispiel* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$*, so gilt*

$$e^A = \begin{pmatrix} e^1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^B = I + B + 0 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad e^Ae^B = \begin{pmatrix} e^1 & e^1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Mittels (7.31) erhält man aber $e^{A+B} = \begin{pmatrix} e^1 & e^1 - 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Korollar 7.35 *Die Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe $u'(t) = Au(t)$, $u(t_0) = u_0$, ist eindeutig und durch $u(t) = e^{(t-t_0)A}u_0$ gegeben.*

BEWEIS: Mit Hilfe von Lemma 7.33 (iii) folgt

$$u'(t) = \frac{\partial}{\partial t}e^{(t-t_0)A}u_0 = Ae^{(t-t_0)A}u_0 = Au(t).$$

Ausserdem gilt $u(t_0) = e^0u_0 = u_0$. Die Eindeutigkeit folgt aus Satz 7.30. ■

Um den allgemeinen Fall,

$$u'(t) = Au(t) + b(t), \tag{7.32}$$

zu lösen, verwenden wir *Variation der Konstanten*. Von Korollar 7.35 wissen wir, dass sich jede Lösung des homogenen Systems $u'(t) = Au(t)$ in der Form $u(t) = e^{tA}c$ mit einem

konstanten Vektor $c \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ schreiben lässt. Wir lassen jetzt die in c enthaltenen Konstanten zeitabhängig werden und setzen $u_p(t) = e^{tA}c(t)$ in (7.32) ein:

$$A\underbrace{e^{tA}c(t)}_{=u_p(t)} + e^{tA}c'(t) = Au_p(t) + b(t) \quad\Rightarrow\quad c'(t) = e^{-tA}b(t).$$

Eine mögliche Stammfunktion von $e^{-tA}b(t)$ ist

$$c(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s \quad\Rightarrow\quad u_p(t) = \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s.$$

Wie bei linearen Gleichungssytemen ergibt sich die Lösungsmenge (7.32) aus der Summe aller homogenen Lösungen mit der partikulären Lösung u_p:

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t) = e^{tA}c + \int_{t_0}^{t} e^{(t-s)A}b(s)\,\mathrm{d}s,$$

wobei $c \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ beliebig sein kann. Wählt man $c = e^{-t_0A}u_0$ so ergibt sich $u(t_0) = u_0$; mit dieser Wahl löst $u(t)$ also gerade die eingangs definierte Anfangswertaufgabe (7.26)–(7.27).

Kapitel 8

Die Jordan-Normalform

Satz 7.19 gab notwendige und hinreichende Bedingungen für die Diagonalisierbarkeit von Matrizen unter Ähnlichkeitstransformation an. Es bleibt noch die spannende Frage: Wie weit kann eine Matrix reduziert werden wenn diese Bedingungen nicht erfüllt sind? Die Konstruktion wird ähnlich wie im Satz 7.19 auf einer Zerlegung des Vektorraums $K^{n\times 1}$ in Teilräume basieren. Allerdings liefern im allgemeinen Fall die Eigenräume nicht mehr genügend Informationen für die Konstruktion einer solchen Zerlegung. Sie werden durch das Konzept der Haupträume ersetzt.

Definition 8.1 *Sei $\lambda \in K$ Eigenwert einer Matrix $A \in K^{n\times n}$ mit algebraischer Vielfachheit $r = \mathsf{alg}_\lambda(A)$. Dann heisst*

$$\mathsf{Hau}_\lambda(A) := \mathsf{Kern}(\lambda I - A)^r$$

***Hauptraum** [generalized eigenspace] von A zum Eigenwert λ.*

Wir werden im Folgenden eine invertierbare Matrix P, deren Spalten Basen von Haupträumen bilden, in zwei Schritten so konstruieren, dass $P^{-1}AP$ so einfach wie möglich wird.

1. In Abschnitt 8.1 werden wir zeigen, dass $P^{-1}AP$ mit *irgendeiner* Wahl der Hauptraumbasen bereits eine Blockdiagonalmatrix ist.
2. In Abschnitt 8.2 werden wir zeigen, dass eine sehr geschickte Wahl der Hauptraumbasen besonders einfache Diagonalblöcke in der Blockdiagonalmatrix nach sich zieht.

8.1 Die Hauptraumzerlegung

Zunächst einige Vorbetrachtungen zu nilpotenten Matrizen.

Definition 8.2 *Eine Matrix $N \in R^{n\times n}$ heisst **nilpotent** wenn es ein $d \in \mathbb{N}$ gibt mit $N^d = 0$. Das kleinstmögliche d mit $N^d = 0$ und $N^{d-1} \neq 0$ heisst **Nilpotenzindex** von N.*

Der Prototyp einer nilpotenten Matrix ist eine Matrix der Form

$$J_3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_3^2(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad J_3^3(0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat also Nilpotenzindex 3. Im allgemeinen hat die Matrix

$$J_n(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix} \in R^{n\times n}$$

den Nilpotenzindex n.

Lemma 8.3 *Sei $A \in K^{n\times n}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent.*

(i) A ist nilpotent.

(ii) A hat nur den Eigenwert 0 mit $\mathsf{alg}_0(A) = n$.

(iii) $p_A = t^n$.

(iv) $A^n = 0$.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii). Da A nilpotent, gibt es ein $d \in \mathbb{N}$ mit $A^d = 0$. Wir wollen jetzt voraussetzen, dass K ein Unterkörper von $\mathbb{C}$ ist.[26] Dann lässt sich p_A in Linearfaktoren zerlegen:

$$p_A = (t-\lambda_1)(t-\lambda_2)\cdots(t-\lambda_n), \qquad \lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{C}.$$

Wäre ein $\lambda_i \neq 0$, so gibt es einen Eigenvektor $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ mit $Ax = \lambda_i x$. Daraus ergibt sich aber der Widerspruch $0 = A^d x = \lambda_i^d x \neq 0$. Also folgt $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0$ und damit (ii).
(ii) $\Rightarrow$ (iii). Offensichtlich.
(iii) $\Rightarrow$ (iv). Aus dem Satz von Cayley-Hamilton folgt $0 = p_A(A) = A^n$.
(iv) $\Rightarrow$ (i). Offensichtlich. ■

Der folgende Satz enthält das wichtigste Resultat aus diesem Abschnitt.

Satz 8.4 *Sei $A \in K^{n\times n}$ und zerfalle das charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren:*

$$p_A = (t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2}\dots(t-\lambda_k)^{r_k} \tag{8.1}$$

mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in K$. Dann gelten die folgenden Aussagen für die entsprechenden Haupträume $V_i = \mathsf{Hau}_{\lambda_i}(A)$:

(i) $AV_i \subset V_i$ und $\dim V_i = r_i$ für $i = 1,\dots,k$;

(ii) $K^{n\times 1} = V_1 \oplus V_2 \oplus \cdots \oplus V_k$.

(iii) Es gibt eine invertierbare Matrix $P \in K^{n\times n}$ mit

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_1} - N_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{r_k} - N_k \end{pmatrix}, \tag{8.2}$$

mit nilpotenten Matrizen $N_i \in K^{r_i\times r_i}$, $i = 1,\dots,k$.

[26] Ansonsten muss man anstatt von $\mathbb{C}$ den algebraischen Abschluss von K betrachten, aber soweit wollen wir uns nicht in die Algebra vorwagen.

Für den Beweis von Satz 8.4 betrachten wir zunächst nur einen festen Eigenwert $\lambda \in K$ mit geometrischer Vielfachheit m und die Potenzen der (singulären) Matrix

$$B := \lambda I - A.$$

Die folgenden Inklusionen sind leicht einzusehen:

$$\begin{array}{ccccccccc} \{0\} & \subset & \mathsf{Kern}\, B & \subset & \mathsf{Kern}\, B^2 & \subset & \cdots & \subset & \mathsf{Kern}\, B^\ell, \\ K^{n\times 1} & \supset & \mathsf{Bild}\, B & \supset & \mathsf{Bild}\, B^2 & \supset & \cdots & \supset & \mathsf{Bild}\, B^\ell, \end{array} \tag{8.3}$$

für ein beliebiges $\ell \in \mathbb{N}$. Die obere Kette kann nicht endlos mit echten Inklusionen fortgesetzt werden; sei also

$$d = \min\left\{\ell : \mathsf{Kern}\, B^\ell = \mathsf{Kern}\, B^{\ell+1}\right\}.$$

Dann gilt nicht nur für $i = 1$ sondern für jedes $i \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\mathsf{Kern}\, B^{d+i} = \mathsf{Kern}\, B^d, \tag{8.4}$$

da $0 = B^{d+i}x = B^{d+1}(B^{i-1}x) = B^d(B^{i-1}x) = B^{d+i-1}x = \cdots = B^d x$.

Lemma 8.5 (Fitting) *Sei $B \in K^{n\times n}$ und $d = \min\left\{\ell : \mathsf{Kern}\, B^\ell = \mathsf{Kern}\, B^{\ell+1}\right\}$, $r = \mathsf{alg}_0(B)$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften für $U = \mathsf{Kern}\, B^d$ und $W = \mathsf{Bild}\, B^d$:*

(i) $BU \subset U$, $BW = W$.

(ii) $K^{n\times 1} = U \oplus W$ mit $\dim U = r$, $\dim W = n - r$.

(iii) Es gibt eine invertierbare Matrix P mit

$$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}, \quad N^d = 0, \quad \tilde{B} \in K^{(n-r)\times(n-r)} \text{ invertierbar.}$$

BEWEIS: Zu (i). Die Beziehung $BU \subset U$ folgt direkt aus der Definition von U. Betrachte nun $BW = B\,\mathsf{Bild}\, B^d = \mathsf{Bild}\, B^{d+1}$. Da

$$\dim \mathsf{Bild}\, B^{d+1} = n - \dim \mathsf{Kern}\, B^{d+1} = n - \dim \mathsf{Kern}\, B^d = \dim \mathsf{Bild}\, B^d$$

sowie $\mathsf{Bild}\, B^{d+1} \subset \mathsf{Bild}\, B^d$, folgt $\mathsf{Bild}\, B^{d+1} = \mathsf{Bild}\, B^d$, also $BW = W$.

Zu (ii) und (iii). Sei $x \in U \cap W$. Dann ist $B^d x = 0$ sowie $x = B^d y$ für ein $y \in K^{n\times 1}$. Also gilt $B^{2d}y = 0$. Wegen (8.4) folgt daraus aber $0 = B^d y = x$. Auf der anderen Seite gilt wegen der Dimensionsformel für Abbildungen die Beziehung $\dim U + \dim W = n$. Kombiniert mit $U \cap W = \{0\}$ ergibt dies $K^{n\times 1} = U \oplus W$.
Setze nun $\tilde{r} := \dim U$. Wählt man $P = \left(P_U, P_W\right)$ mit $P_U \in K^{n\times \tilde{r}}$ und $P_W \in K^{n\times(n-\tilde{r})}$, so dass die Spalten von P_U eine Basis von U und die Spalten von P_W eine Basis von W bilden, so folgt wegen (i) dass es Matrizen $N \in K^{\tilde{r}\times\tilde{r}}$ und $\tilde{B} \in K^{(n-\tilde{r})\times(n-\tilde{r})}$ gibt mit

$$BP_U = P_U N, \quad BP_W = P_W \tilde{B} \quad \Rightarrow \quad BP = P\begin{pmatrix} N & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix}.$$

Aus $BW = W$ folgt $\mathrm{Rang}(P_W\tilde{B}) = \mathrm{Rang}(P_W)$, also muss $\tilde{B}$ invertierbar sein. Ausserdem folgt aus wiederholter Anwendung von $BP_U = P_U N$ die Beziehung $B^d P_U = P_U N^d$. Da aber $B^d P_U = 0$ und P_U vollen Spaltenrang hat, muss $N^d = 0$ gelten. Dies kann aber nur sein,

wenn alle $\tilde{r}$ Eigenwerte von N Null sind, siehe Lemma 8.3. Da $\tilde{B}$ invertierbar ist und somit keine weiteren Nulleigenwerte haben kann, gilt also $r = \mathsf{alg}_0 B = \mathsf{alg}_0 N = \tilde{r}$. ■

BEWEIS VON SATZ 8.4: Wir werden zunächst (iii) zusammen mit der zusätzlichen Aussage, dass $r_i = \dim V_i$ gilt, zeigen. Der Beweis erfolgt per Induktion über k, der Anzahl der paarweise verschiedenen Eigenwerte. Für $k = 1$ ist nichts zu zeigen, da dann $r_1 = n$ und $V_1 = \mathsf{Kern}(\lambda_1 I - A)^n = \mathsf{Kern}\, 0_{n\times n} = K^{n\times 1}$ gilt. Wir können einfach $P = I_n$ setzen.

Wir überprüfen nun die Aussage für ein allgemeines $k \geq 2$ unter der Annahme, dass die Aussage für $k-1$ erfüllt ist. Gemäss Lemma 8.5 gibt es eine invertierbare Matrix $P_1 \in K^{n\times n}$ mit

$$P_1^{-1}AP_1 = \lambda_1 I - P_1^{-1}(\lambda_1 I - A)P_1 = \lambda_1 I - \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & \tilde{B} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I - N_1 & 0 \\ 0 & \tilde{A} \end{pmatrix},$$

wobei $\tilde{A} := \lambda_1 I - \tilde{B}$ und $N_1 \in K^{r_1\times r_1}$ nilpotent mit $r_1 = \dim V_1$. Ausserdem gilt

$$p_A = \det(tI - A) = \det\left(tI - (\lambda_1 I - N_1)\right)p_{\tilde{A}} = (t-\lambda_1)^{r_1} p_{\tilde{A}},$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass jeder Nulleigenwert von N_1 durch $\lambda_1 I - N_1$ nach λ_1 “verschoben” wird. Abgleich mit (8.1) ergibt

$$p_{\tilde{A}} = (t-\lambda_2)^{r_2}\ldots(t-\lambda_k)^{r_k}.$$

Also hat $\tilde{A}$ nur $k-1$ paarweise verschiedene Eigenwerte und wir erhalten aus der Induktionsvoraussetzung

$$\tilde{P}^{-1}\tilde{A}\tilde{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{r_2} - N_2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_k I_{r_k} - N_k \end{pmatrix}$$

für eine invertierbare Matrix $\tilde{P}$, sowie

$$\dim V_i = \dim \mathsf{Kern}(\lambda_i I - A)^{r_i} = \dim \mathsf{Kern}(\lambda_i I - \tilde{A})^{r_i} = r_i.$$

Die Aussage von (iii) folgt nun für k indem man einfach $P = P_1\begin{pmatrix} I_{r_1} & 0 \\ 0 & \tilde{P} \end{pmatrix}$ setzt.

Die Aussagen von (i) und (ii) folgen nun direkt aus (iii). Wir unterteilen dazu die Transformationsmatrix $P = \left(P_1, \ldots, P_r\right)$ mit $P_i \in K^{n\times r_i}$. Dann lässt sich (8.2) umschreiben in

$$AP_i = P_i(\lambda_i I - N_i).$$

Daraus folgt einerseits $A\,\mathsf{span}(P_i) \subset \mathsf{span}(P_i)$ und andererseits

$$(\lambda_i I - A)P_i = P_i N_i \quad \Rightarrow \quad (A - \lambda_i I)^{r_i} P_i = P_i N_i^{r_i} = 0,$$

wobei wir Lemma 8.3 (iv) ausgenutzt haben. Also gilt $\mathsf{span}(P_i) \subset \mathsf{Hau}_{\lambda_i}(A) = V_i$. Verwendet man jetzt noch die oben gezeigte Tatsache $\dim V_i = r_i$, so folgt $\mathsf{span}(P_i) = V_i$. Also bilden die Spalten von P_i eine Basis von V_i. Damit folgt $K^{n\times 1} = V_1 \oplus \cdots \oplus V_k$ aus Satz 4.35, da alle Spalten von P zusammen eine Basis von $K^{n\times 1}$ bilden. ■

8.2 Wahl der Hauptraumbasen

Durch eine geschickte Wahl der Basen von $\mathsf{Hau}_{\lambda_i}(A)$ gilt es nun, die Blöcke N_i in (8.2) so einfach wie möglich zu gestalten. Im folgenden bezeichnet

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & \\ & \lambda & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \lambda \end{pmatrix} \in K^{m\times m}$$

einen sogenannten **Jordan-Block** der Grösse m zu $\lambda \in K$. Ausserdem schreiben wir

$$\mathsf{diag}\,(C_1,\dots,C_k) := \begin{pmatrix} C_1 & & \\ & \ddots & \\ & & C_k \end{pmatrix}$$

für quadratische Matrizen $C_1,\dots,C_k$.

Satz 8.6 *Sei $\lambda \in K$ Eigenwert von $A \in K^{n\times n}$ mit $r = \mathsf{alg}_\lambda(A)$. Dann gibt es eine Matrix $P \in K^{n\times r}$, so dass $\mathsf{Rang}(P) = r$ und*

$$AP = PJ_A(\lambda), \tag{8.5}$$

mit der $k\times k$-Matrix

$$J_A(\lambda) := \mathsf{diag}\,\big(\underbrace{J_d(\lambda),\dots,J_d(\lambda)}_{s_d\ Mal},\underbrace{J_{d-1}(\lambda),\dots,J_{d-1}(\lambda)}_{s_{d-1}\ Mal},\ \dots\ ,\underbrace{J_1(\lambda),\dots,J_1(\lambda)}_{s_1\ Mal}\big) \in K^{r\times r}, \tag{8.6}$$

wobei $d = \min\{\ell : \mathsf{Kern}(A-\lambda I)^\ell = \mathsf{Kern}(A-\lambda I)^{\ell+1}\}$ und $s_1,s_2,\dots,s_d \in \mathbb{N}$.

BEWEIS: Durch Subtraktion von λP auf beiden Seiten von (8.5) können wir im Folgenden o.B.d.A. $\lambda = 0$ annehmen. Mit $U_\ell := \mathsf{Kern}A^\ell$ ergibt sich die folgende Kette von Untervektorräumen:

$$\{0\} = U_0 \subset U_1 \subset U_2 \subset \cdots \subset U_d = \mathsf{Hau}_0(A),$$

wobei alle Inklusionen echt sind. Man kann sich das so vorstellen, dass mit steigendem Level ℓ immer mehr Informationen zu U_ℓ hinzugefügt werden. Wir werden jetzt Schritt für Schritt U_d so zerlegen, dass die in jedem Level hinzugefügten Informationen sichtbar werden. Die folgenden beiden Eigenschaften werden dabei zentral sein:

- $AU_\ell \subset U_{\ell-1}$ für $\ell = 1,\dots,d$.
  Dies ist leicht zu sehen: Ist $x \in AU_\ell$, also $x = Ay$ mit $A^\ell y = 0$, so folgt $A^{\ell-1}x = A^\ell y = 0$.
- Aus $W \cap U_\ell = \{0\}$ für irgendein $\ell = 1,\dots,d$ und einen Unterraum W von U_d, folgt $W \cap U_1 = \{0\}$.
  Dies folgt sofort aus der Tatsache $U_1 \subset U_\ell$.

Nach Satz 4.33 können wir nun U_{d-1} zu U_d ergänzen, d.h., es gibt einen Untervektorraum $W_d \subset U_d$ mit

$$U_d = U_{d-1} \oplus W_d. \tag{8.7}$$

Im nächsten Schritt zerlegen wir U_{d-1}. Dazu bemerken wir zunächst $AW_d \subset AU_d \subset AU_{d-1}$ und $AW_d \cap U_{d-2} = \{0\}$. Also gibt es eine Zerlegung

$$U_{d-1} = U_{d-2} \oplus W_{d-1}, \quad AW_d \subset W_{d-1}. \tag{8.8}$$

Kombiniert man (8.7) und (8.8), so erhält man die Zerlegung

$$U_d = U_{d-2} \oplus W_{d-1} \oplus W_d.$$

Wiederholtes Anwenden dieser Prozedur führt schlussendlich auf eine Zerlegung

$$U_d = W_1 \oplus \cdots \oplus W_{d-1} \oplus W_d, \qquad AW_\ell \subset W_{\ell-1}, \quad \ell = 2,\dots,d,$$

mit $W_1 = U_1$. Wir werden von W_d beginnend spezielle Basen von W_ℓ so konstruieren, dass die Beziehung $AW_\ell \subset W_{\ell-1}$ "respektiert" wird. Dabei ist die folgende Eigenschaft entscheidend.

- Sind $x_1,\dots,x_m \in W_\ell$ linear unabhängig, so sind auch $Ax_1,\dots,Ax_m$ linear unabhängig. Eigentlich folgt diese Tatsache sofort aus Lemma 5.4 (iv); der Einfachheit halber beweisen wir es aber noch einmal "zu Fuss". Sei $\big(Ax_1,\dots,Ax_m\big)y = 0$ mit $y \in K^{m\times 1}$. Also haben wir $A\tilde{y} = 0$ mit $\tilde{y} = \big(x_1,\dots,x_m\big)y \in W_\ell$. Da aber $W_\ell \cap \mathsf{Kern}(A) = W_\ell \cap U_1 = \{0\}$ aus $W_\ell \cap U_\ell = \{0\}$ folgt, muss $\tilde{y} = 0$ gelten.

Eine Basis von $W_{\ell-1}$ kann also konstruiert werden, indem man die Basiselemente von W_ℓ mit A multipliziert und dann allenfalls noch weitere Elemente gemäss dem Basisergänzungssatz hinzufügt. Es ergibt sich das folgende Schema:

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1^{(d)} & \dots & x_{s_d}^{(d)} & & & & & & \\
Ax_1^{(d)} & \dots & Ax_{s_d}^{(d)} & x_1^{(d-1)} & \dots & x_{s_{d-1}}^{(d-1)} & & & \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & & \\
A^{d-1}x_1^{(d)} & \dots & A^{d-1}x_{s_d}^{(d)} & A^{d-2}x_1^{(d-1)} & \dots & A^{d-2}x_{s_{d-1}}^{(d-1)} & \dots & x_1^{(1)} & \dots \quad x_{s_1}^{(1)}
\end{array} \tag{8.9}$$

Dabei ist die erste Zeile eine Basis von W_d, die zweite Zeile eine Basis von W_{d-1}, usw., die letzte Zeile ist eine Basis von $W_1 = U_1 = \mathsf{Kern}(A)$. Man sortiert diese gesamte Basis von U_d in eine Matrix $P \in K^{n\times r}$, indem man durch dieses Schema von unten nach oben und von links nach rechts geht. Also

$$P = \left(\begin{array}{ccccc|cc} A^{d-1}x_1^{(d)} & A^{d-2}x_1^{(d)} & \dots & Ax_1^{(d)} & x_1^{(d)} & \dots & \dots \end{array}\right)$$

und es ergibt sich

$$AP = \left(\begin{array}{ccccc|cc} 0 & A^{d-1}x_1^{(d)} & \dots & A^2x_1^{(d)} & Ax_1^{(d)} & \dots & \dots \end{array}\right) = P\begin{pmatrix} J_d(0) & 0 \\ 0 & \ddots \end{pmatrix}.$$

■

Beispiel 8.1: Zur Illustration der Konstruktion im Beweis von Satz 8.6 betrachten wir die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Dann hat A das charakteristische Polynom $p_A = (t-2)^3$. Für $B = A - 2I$ gilt nun

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Insbesondere gilt $\dim \mathsf{Kern}\, B = 1$, $\dim \mathsf{Kern}\, B^2 = 2$, $\dim \mathsf{Kern}\, B^3 = 3$. Eine Basis für $U_2 = \mathsf{Kern}\, B^2$ ist durch die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

gegeben. Um also U_2 zu $U_3 = \mathbb{R}^{3\times 1}$ zu ergänzen, $U_3 = U_2 \oplus W_3$, kann als Basis für W_3 der Vektor

$$x_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}$$

gewählt werden. Wir berechnen

$$Bx_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}^\mathsf{T}, \quad B^2 x_1^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \end{pmatrix}^\mathsf{T}.$$

Also ist

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad P^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Die Probe ergibt tatsächlich

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

♦

8.3 Endlich: Die Jordan-Normalform

Satz 8.7 *Sei $A \in K^{n\times n}$ und zerfalle das charakteristische Polynom p_A in Linearfaktoren:*

$$p_A = (t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2}\dots(t-\lambda_k)^{r_k}$$

mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in K$. Dann gibt es eine Matrix P so dass

$$P^{-1}AP = \mathsf{diag}\,\big(J_A(\lambda_1), J_A(\lambda_2),\dots,J_A(\lambda_k)\big), \tag{8.10}$$

wobei jeder Diagonalblock $J_A(\lambda_i) \in K^{r_i\times r_i}$ sich aus Jordanblöcken zum Eigenwert λ_i zusammensetzt, siehe (8.6).

BEWEIS: Nach all den Vorbereitungen ist der Beweis ganz einfach. Für jeden Eigenwert λ_i berechnet man gemäss Satz 8.6 eine Basis P_i von $\mathsf{Hau}_{\lambda_i}(A)$, so dass $AP_i = P_i J_A(\lambda_i)$. Nach Satz 8.4 ist $P = \big(P_1,\dots,P_k\big) \in K^{n\times n}$ invertierbar. ■

Die Anzahl und Grösse der Jordanblöcke zu einem Eigenwert in der Jordan-Normalform (8.10) sind eindeutig bestimmt. Der Beweis ist nicht schwierig, aber technisch und soll hier nicht angegeben werden. Von der Jordan-Normalform lassen sich vielerlei bekannte und neue Zusammenhänge einfach ablesen.

- Die geometrische Vielfachheit eines Eigenwerts λ ist die Anzahl aller zu λ gehörigen Jordan-Blöcke.
- Die algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts λ ist die Summe der Grössen aller zu λ gehörigen Jordan-Blöcke.
- Die geometrischen and algebraischen Vielfachheiten eines Eigenwerts λ sind genau dann identisch, wenn all zu λ gehörigen Jordan-Blöcke 1x1-Matrizen sind.[27]

[27] Dies bestätigt eindrucksvoll die in Satz 7.19 angegebene Bedingung zur Diagonalisierbarkeit einer Matrix.

- Zwei Matrizen A und B sind genau dann ähnlich, wenn sowohl die Eigenwerte als auch die Anzahl und Grössen der zu jedem Eigenwerten gehörigen Jordan-Blöcke übereinstimmen.
- A und A^T sind ähnlich. (Beweis: Übung.)

Korollar 8.8 *Sei $F \in L(V,V)$ für einen endlichdimensionalen Vektorraum V über K. Zerfällt das charakteristische Polynom $p_F = \det(t\cdot \mathsf{id} - F)$ in Linearfaktoren:*

$$p_A = (t-\lambda_1)^{r_1}(t-\lambda_2)^{r_2}\dots(t-\lambda_k)^{r_k}$$

mit paarweise verschiedenen Eigenwerten $\lambda_1,\dots,\lambda_k \in K$, dann gibt es eine Basis $\mathscr{B}$ mit

$$[F]_{\mathscr{B},\mathscr{B}} = \mathsf{diag}\,\big(J_F(\lambda_1), J_F(\lambda_2),\dots,J_F(\lambda_k)\big),$$

wobei jeder Diagonalblock $J_F(\lambda_i) \in K^{r_i\times r_i}$ sich aus Jordanblöcken zum Eigenwert λ_i zusammensetzt.

8.4 Weitere Folgerungen

In diesem Abschnitt werden wir sehen, dass wir mit der Jordan-Normalform Matrixpotenzen und Matrixexponentiale gewissermassen vollständig “in der Hand” haben und ihr asymptotisches Verhalten vollständig charakterisieren können.

8.4.1 Matrixpotenzen

Wir betrachten zunächst einen Jordan-Block:

$$J_m(\lambda) = \lambda I + J_m(0) = \begin{pmatrix} \lambda & & & \\ & \lambda & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Zur Bestimmung der k-ten Potenz $J_m(\lambda)^k$ werden wir die Kommutativität der beiden Matrizen λI und $J_m(0)$ ausnutzen, um den binomischen Lehrsatz anzuwenden.

Lemma 8.9 *Sei $(R,+,\cdot)$ Ring und $x,y \in R$ mit $x\cdot y = y\cdot x$. Dann gilt*

$$(x+y)^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^i y^{k-i}, \quad k = 1,2,\dots,$$

mit den ***Binomialkoeffizienten***

$$\binom{m}{n} := \begin{cases} \frac{m!}{n!(m-n)!}, & \textit{für } m \le n, \\ 0, & \textit{sonst,} \end{cases}$$

für $m,n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

BEWEIS: Der Fall $k=1$ ist klar. Für $k \geq 2$ verwenden wir Induktion; wir nehmen an die Aussage sei für k erfüllt und überprüfen den Fall $k+1$:

$$\begin{aligned}(x+y)^{k+1} = (x+y)^k(x+y) &= \left(\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^iy^{k-i}\right)(x+y),\\ &= \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^{i+1}y^{k-i} + \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}x^iy^{k+1-i}\\ &= \sum_{i=1}^{k+1}\binom{k}{i-1}x^iy^{k+1-i} + \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k}{i}x^iy^{k+1-i} = \sum_{i=0}^{k+1}\binom{k+1}{i}x^iy^{k+1-i},\end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die leicht zu beweisende Tatsache $\binom{k}{i-1}+\binom{k}{i}=\binom{k+1}{i}$ ausgenutzt haben. ■

Lemma angewandt auf den Ring der $n \times n$-Matrizen über K zeigt

$$J_m(\lambda)^k = (\lambda I + J_m(0))^k = \sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}J_m(0)^i = \sum_{i=0}^{m-1}\binom{k}{i}\lambda^{k-i}J_m(0)^i,$$

wobei wir ausgenutzt haben, dass $J_m(0)^m = 0$ und $\binom{k}{i}=0$ für $i>k$. Mit $J_m(0)^i = \begin{pmatrix} 0 & I_{m-i} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, ergibt sich also

$$J_m(\lambda)^k = \begin{pmatrix} \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} & \cdots & \binom{k}{m-1}\lambda^{k-m+1} \\ 0 & \lambda^k & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \binom{k}{2}\lambda^{k-2} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \binom{k}{1}\lambda^{k-1} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \lambda^k \end{pmatrix}. \tag{8.11}$$

Ist $A \in K^{n\times n}$ und die Voraussetzung von Satz 8.7 erfüllt, dann folgt aus der Jordan-Normalform

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\left(J_A(\lambda_1), J_A(\lambda_2), \ldots, J_A(\lambda_k)\right),$$

die Beziehung

$$A^k = P\operatorname{diag}\left(J_A(\lambda_1)^k, J_A(\lambda_2)^k, \ldots, J_A(\lambda_k)^k\right)P^{-1},$$

wobei jedes $J_A(\lambda_i)^k$ Potenzen von Jordanblöcken zum Eigenwert λ_i enthält. Wegen (8.11) gilt: $J_m(\lambda_i)^k \overset{k\to\infty}{\to} 0$ genau dann, wenn $|\lambda_i| < 1$, da in diesem Fall $|\lambda_i|^k$ für $k \to \infty$ schneller gegen 0 strebt als $\binom{k}{i}$ wächst. Ist $|\lambda_i| = 1$, dann konvergiert $J_m(\lambda_i)^k$ nur wenn $\lambda_i = 1$ und $m = 1$, also $J_m(\lambda_i)^k = 1$ für alle k. Aus diesen Beobachtungen ergibt sich der folgende Satz.

Satz 8.10 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

(i) $A^k \overset{k\to\infty}{\to} 0$ genau dann, wenn $\rho(A) < 1$.

(ii) Für $\rho(A) = 1$ gilt $A^k \overset{k\to\infty}{\to} A_\infty$ für eine Matrix $A_\infty \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann, wenn gilt: Ist λ Eigenwert von A mit $|\lambda| = 1$, so ist $\lambda = 1$ und $\operatorname{geo}_\lambda(A) = \operatorname{alg}_\lambda(A)$.

Analog bleiben die Einträge von A^k genau dann beschränkt, wenn für jeden Eigenwert λ von A entweder $|\lambda| < 1$ oder $|\lambda| = 1$ mit $\operatorname{geo}_\lambda(A) = \operatorname{alg}_\lambda(A)$ gilt.

8.4.2 Matrixexponential

Um für beliebige $t \in \mathbb{R}$ das Matrixexponential e^{tA} einer festen Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ausrechnen zu können, bedienen wir uns der in Lemma 7.33 gezeigten Eigenschaften. Da λI und $J_m(0)$ kommutieren, gilt insbesondere für einen Jordanblock:

$$e^{tJ_m(\lambda)} = e^{t(\lambda I + J_m(0))} = e^{t\lambda I}e^{tJ_m(0)}.$$

Da $J_m(0)$ nilpotent ist, bricht für den zweiten Faktor die Exponentialreihe nach endlich vielen Gliedern ab und wir erhalten

$$e^{tJ_m(0))} = I_m + tJ_m(0) + \frac{t^2}{2!}J_m(0)^2 + \cdots + \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}J_m(0)^{m-1}.$$

Damit folgt

$$e^{tJ_m(\lambda)} = \begin{pmatrix} e^{t\lambda} & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} & \cdots & \frac{t^{m-1}}{(m-1)!}e^{t\lambda} \\ 0 & e^{t\lambda} & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \frac{t^2}{2!}e^{t\lambda} \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \frac{t}{1!}e^{t\lambda} \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & e^{t\lambda} \end{pmatrix}. \tag{8.12}$$

Insgesamt ergibt sich also für eine Matrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ mit Jordan-Normalform

$$P^{-1}AP = \operatorname{diag}\left(J_A(\lambda_1), J_A(\lambda_2), \ldots, J_A(\lambda_k)\right),$$

dass

$$e^{tA} = P\operatorname{diag}\left(e^{tJ_A(\lambda_1)}, e^{tJ_A(\lambda_2)}, \ldots, e^{tJ_A(\lambda_k)}\right)P^{-1},$$

wobei jedes $e^{tJ_A(\lambda_i)}$ Matrixexponentiale von Jordanblöcken zum Eigenwert λ_i der Form (8.12) enthält.

Aus der Eulerschen Formel

$$e^{t\lambda} = e^{t\cdot\operatorname{Re}(\lambda) + \mathrm{i}t\cdot\operatorname{Im}(\lambda)} = e^{t\operatorname{Re}(\lambda)}\left(\cos(t\cdot\operatorname{Im}(\lambda)) + \mathrm{i}\sin(t\cdot\operatorname{Im}(\lambda))\right),$$

folgt: $e^{t\lambda} \overset{t\to\infty}{\to} 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. Für $\operatorname{Re}(\lambda) \geq 0$ konvergiert $e^{t\lambda)}$ nicht, es sei denn $\lambda = 0$.

Wegen (8.12) gilt: $e^{tJ_m(\lambda_i)} \overset{t\to\infty}{\to} 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(\lambda_i) < 0$, da in diesem Fall $e^{t\operatorname{Re}(\lambda_i)}$ für $t \to \infty$ schneller gegen 0 strebt als jede Potenz von λ_i wächst. Ist $\operatorname{Re}(\lambda_i) = 0$, dann konvergiert $e^{tJ_m(\lambda_i)}$ nur wenn $\lambda_i = 0$ und $m = 1$. Aus diesen Beobachtungen ergibt sich der abschliessende Satz.

Satz 8.11 *Sei $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$.*

(i) $e^{tA} \overset{t\to\infty}{\to} 0$ genau dann, wenn $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ für jeden Eigenwert λ von A.

(ii) $e^{tA} \overset{t\to\infty}{\to} A_\infty$ für eine Matrix $A_\infty \in \mathbb{C}^{n\times n}$ genau dann, wenn entweder $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ oder $\lambda = 0$ mit $\operatorname{geo}_\lambda(A) = \operatorname{alg}_\lambda(A)$ für jeden Eigenwert λ von A gilt.

Analog bleiben die Einträge von e^{tA} für $t \to \infty$ genau dann beschränkt, wenn für jeden Eigenwert λ von A entweder $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ oder $\operatorname{Re}(\lambda) = 0$ mit $\operatorname{geo}_\lambda(A) = \operatorname{alg}_\lambda(A)$ gilt.

Inhaltsverzeichnis