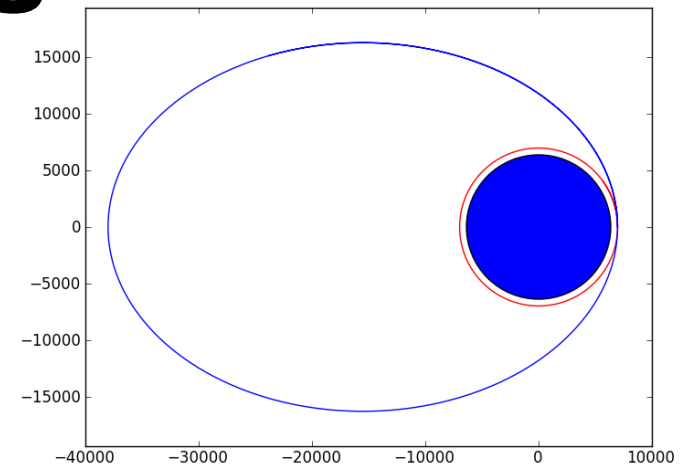
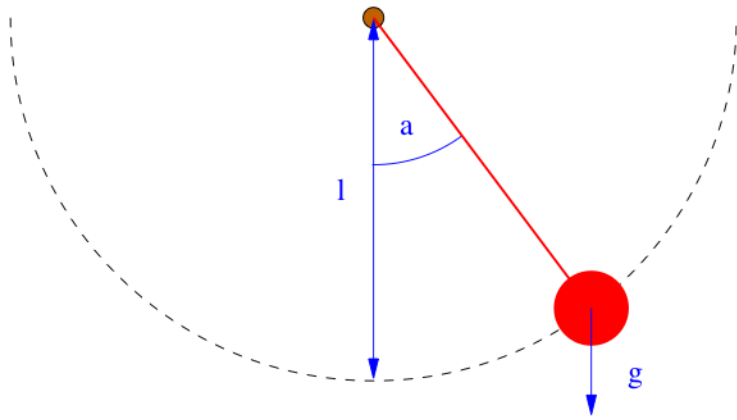


ETHZ Studienwoche 2018

Differentialgleichungen oder wie beschreibt man Veränderung



Übersicht

- **Ableitung**

- Analytisch
- Numerische Ableitung

$$\frac{df}{dx}, f'(x), \dot{f}$$

- **Integral**

- Analytisch
- Numerische Integration

$$\int f(x)dx, \int_a^b f(x)dx$$

- **Differentiagleichungen**

- Analytisch
- Numerische Verfahren

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

Übersicht

- **Ableitung**

- Analytisch
- Numerische Ableitung

$$\frac{df}{dx}, f'(x), \dot{f}$$

- **Integral**

- Analytisch
- Numerische Integration

- **Differentiagleichungen**

- Analytisch
- Numerische Verfahren

Computer-Experimente

mit

PYTHON

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$$

$$m\ddot{x} = -kx$$

Übersicht

- Arbeiten an “kleinen” Projekten
 - Bewegung im Schwerfeld + Luftwiderstand
 - Radioaktiver Zerfall
 - Logistische Diff.-Gl.
 - Lotka-VolterraDiff.-Gl. (Räuber-Beute Modell)
 - Physikalisches Pendel
 - Erde + Satellit
 - Teilchen im elektromagnetischen Feld
 - Sonnensystem (mit Daten von NASA)
 - Lorenz-Attraktor

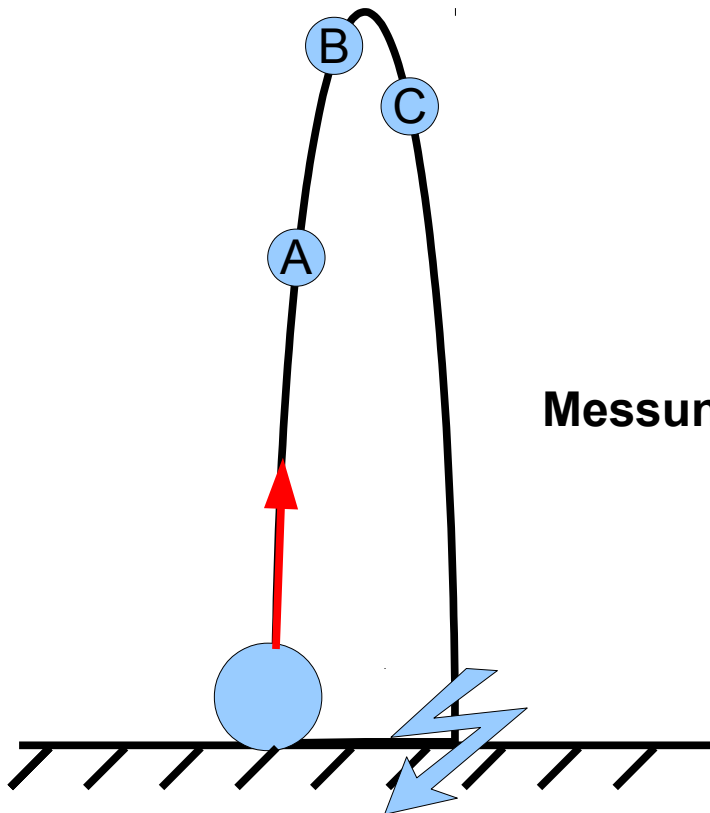
Populations-Modelle Bewegungs-Gleichungen

Hinweise

- Es wird nicht einfach...
 - Es geht manchmal etwas schnell
- Es wird viel am Computer gearbeitet
 - Python wird gelernt!
 - Dies wird vor allem am Anfang etwas zäh
 - Programmieren programmieren programmieren...
- Es wird nachgeholfen
 - Ungenierte Fragen!!!
- Es wird (hoffentlich!) Spass machen

Die Ableitung

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstands?

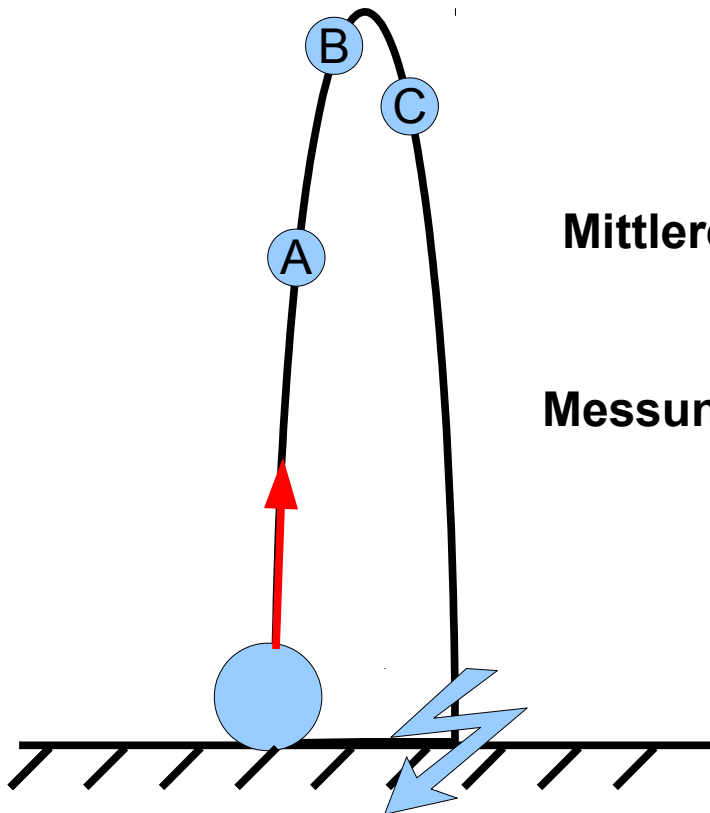


Messungen:

	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Höhe h [m]	19.10	28.38	21.65

Die Ableitung

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstands?



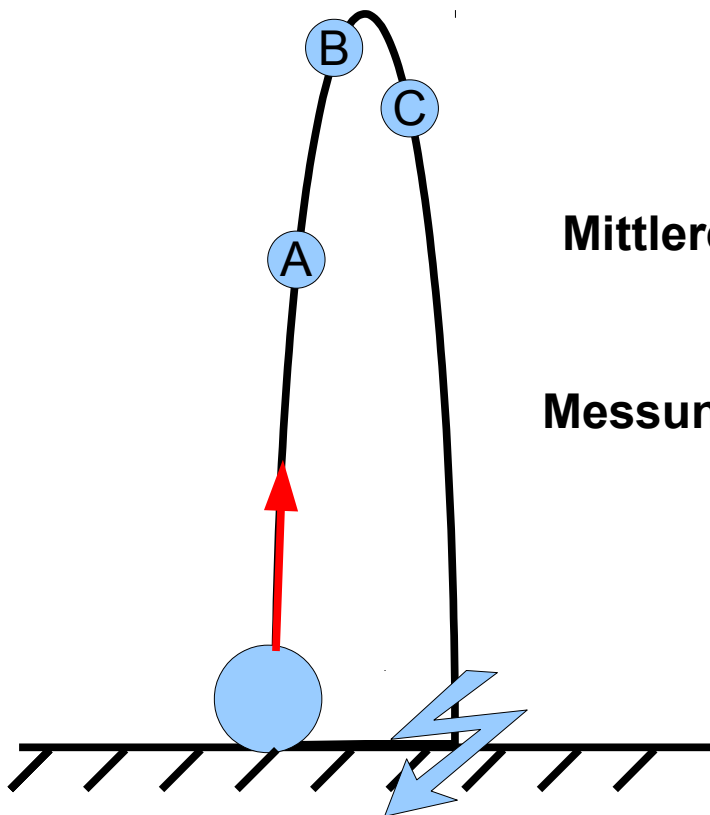
$$\text{Mittlere Geschwindigkeit} = \frac{\text{Variation der Position}}{\text{Variation der Zeit}}$$

Messungen:

	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Höhe h [m]	19.10	28.38	21.65

Die Ableitung

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstands?



$$\text{Mittlere Geschwindigkeit} = \frac{\text{Variation der Position}}{\text{Variation der Zeit}}$$

Messungen:

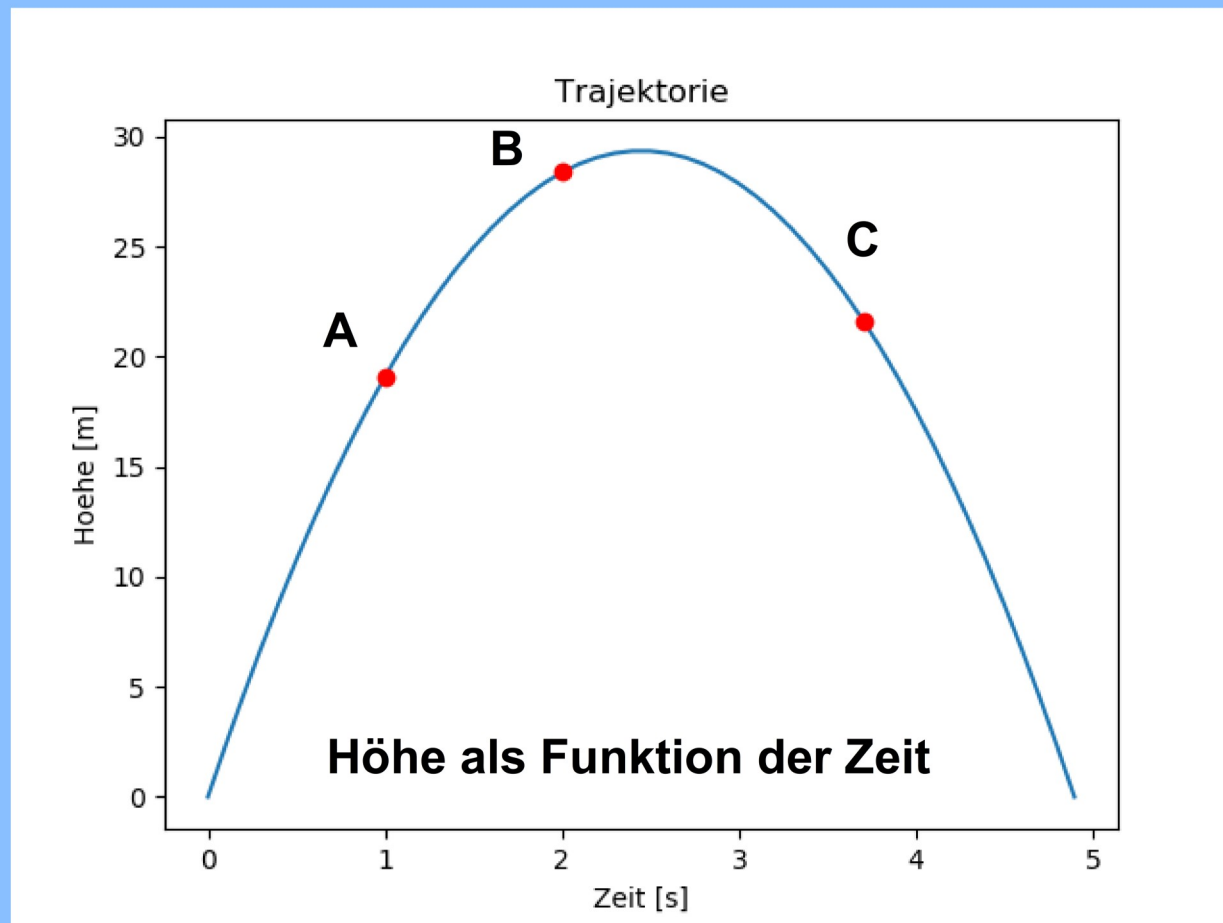
	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Höhe h [m]	19.10	28.38	21.65

Mittlere Geschw. \approx 9.28 m/s -3.96 m/s

Die Ableitung

- W
G

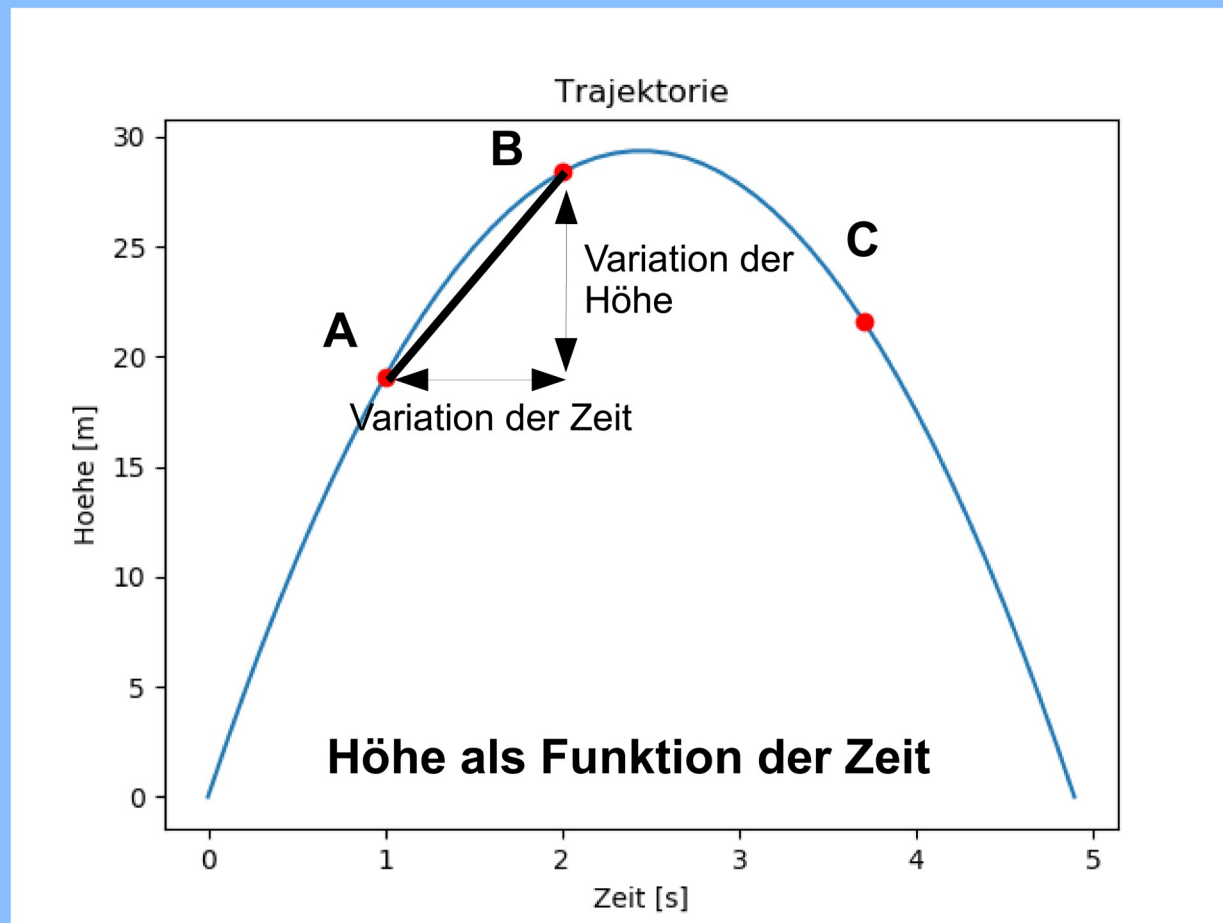
Graphische Interpretation:



Die Ableitung

- W
G

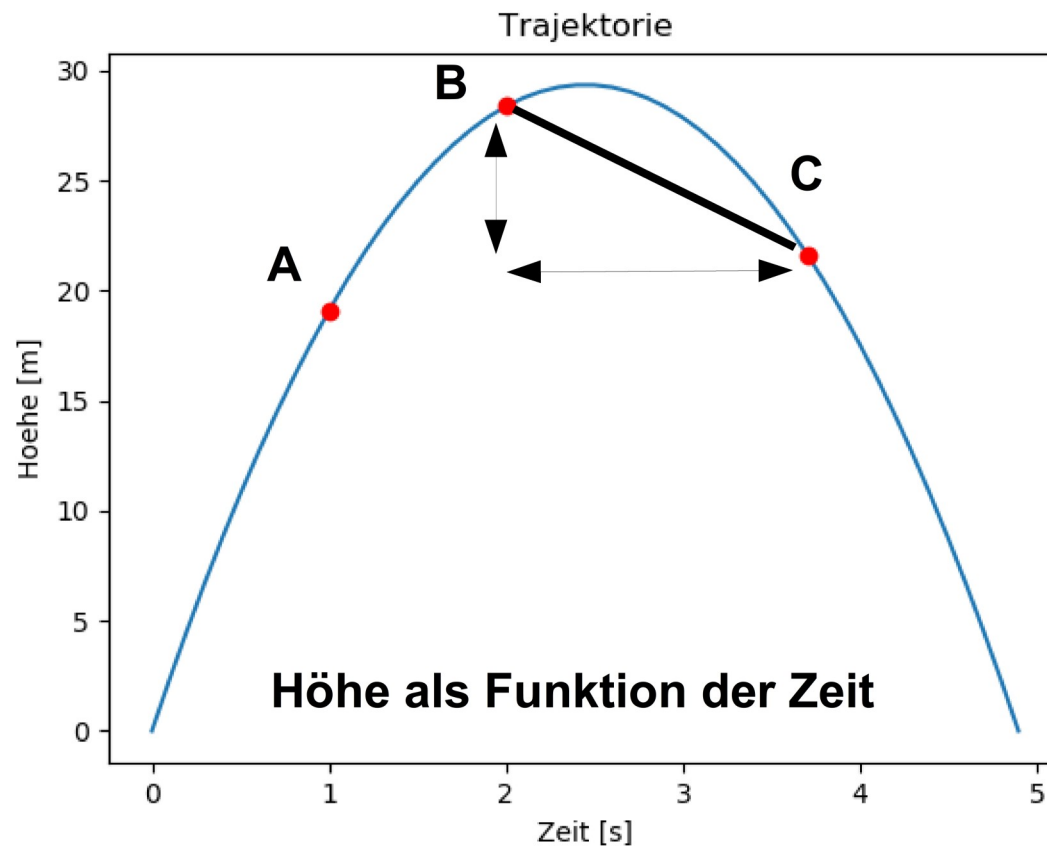
Graphische Interpretation:



Die Ableitung

- W
G

Graphische Interpretation:

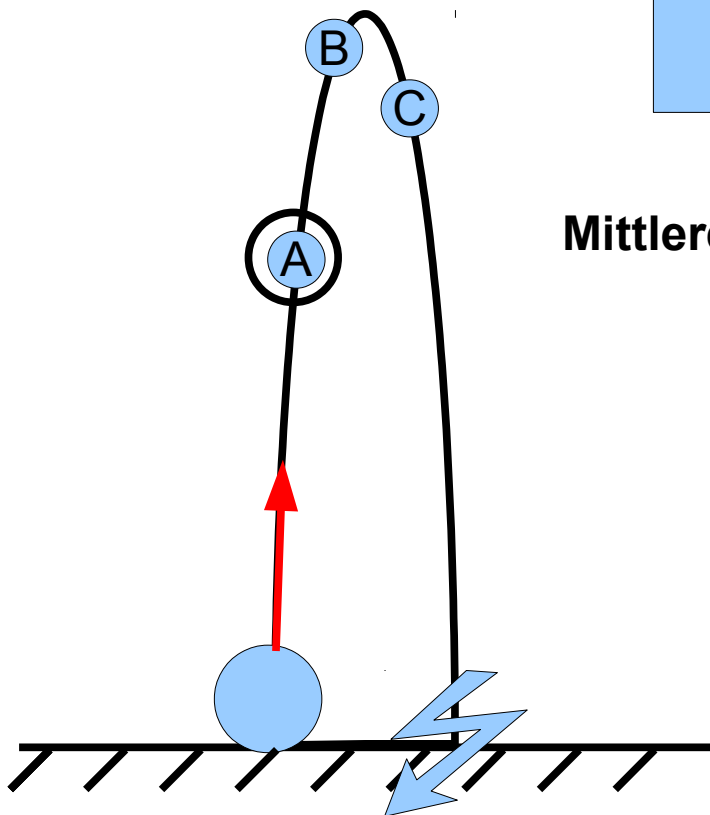


Die Ableitung

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstands?

Instantane Geschwindigkeit???

$$\text{Mittlere Geschwindigkeit} = \frac{\text{Variation der Position}}{\text{Variation der Zeit}}$$



	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Hoehe h [m]	19.10	28.38	21.65

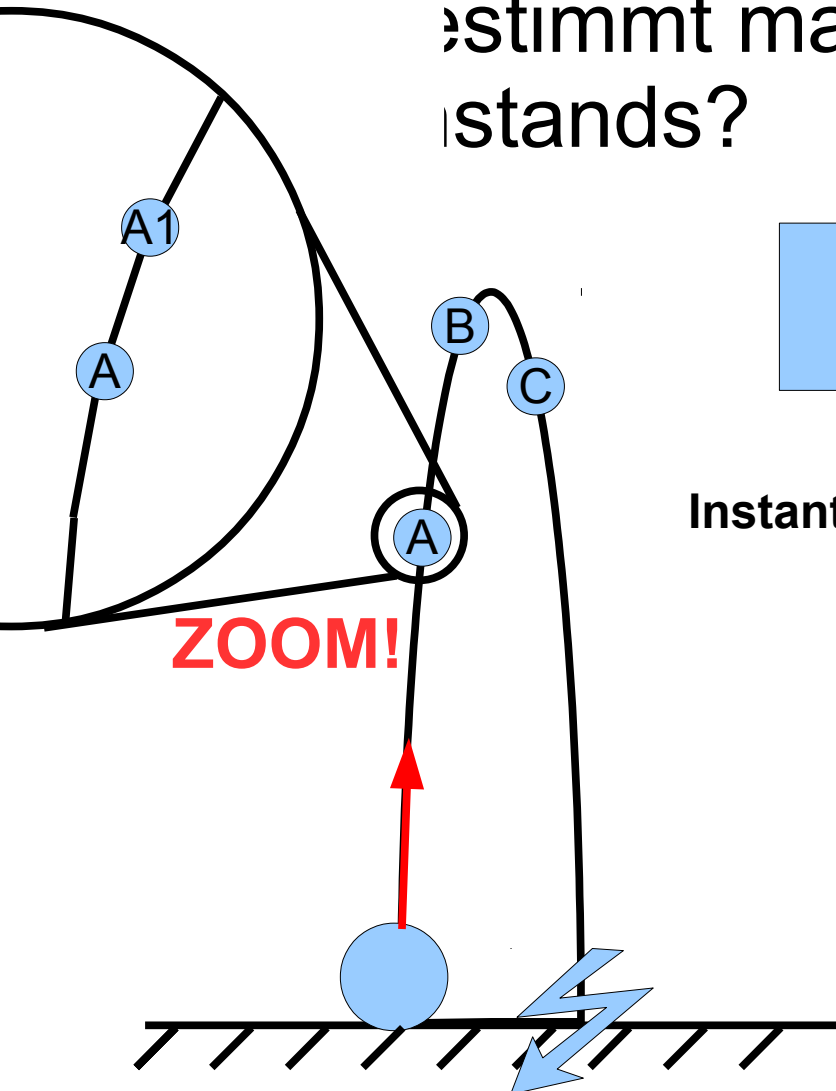
Mittlere Geschw. \approx 9.28 m/s -3.96 m/s

Die Ableitung

Bestimmt man die Geschwindigkeit eines
Zustands?

Instantane Geschwindigkeit???

Instantane Geschw. = $\frac{\text{Variation der Position}}{\text{"Sehr kleine" Variation der Zeit}}$



	A	A1	A2	...
Zeit t [s]	1.0	1.1	1.05	
Höhe h [m]	19.1	20.46	19.79	

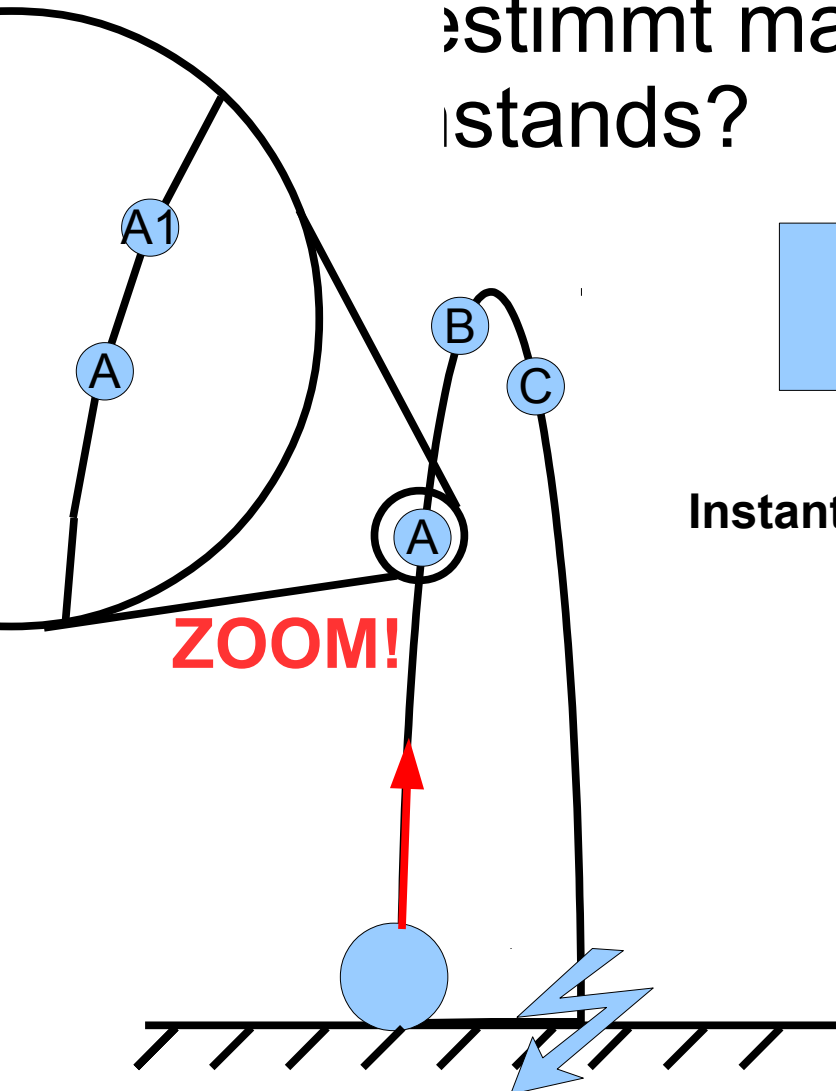
Geschw. \approx 13.70 m/s 13.94 m/s

Die Ableitung

Bestimmt man die Geschwindigkeit eines
Zustands?

Instantane Geschwindigkeit???

$$\text{Instantane Geschw.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$



	A	A1	A2	...
Zeit t [s]	1.0	1.1	1.05	
Höhe h [m]	19.1	20.46	19.79	

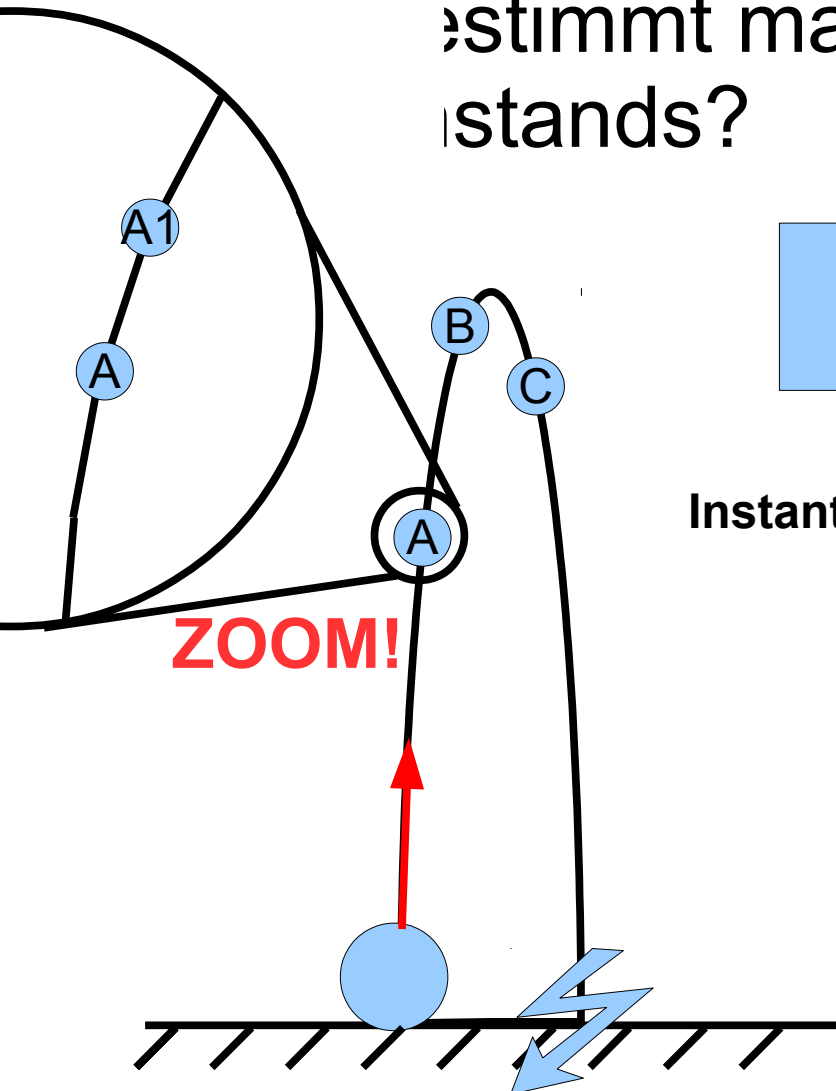
Geschw. \approx 13.60 m/s

Die Ableitung

Bestimmt man die Geschwindigkeit eines
Zustands?

Instantane Geschwindigkeit???

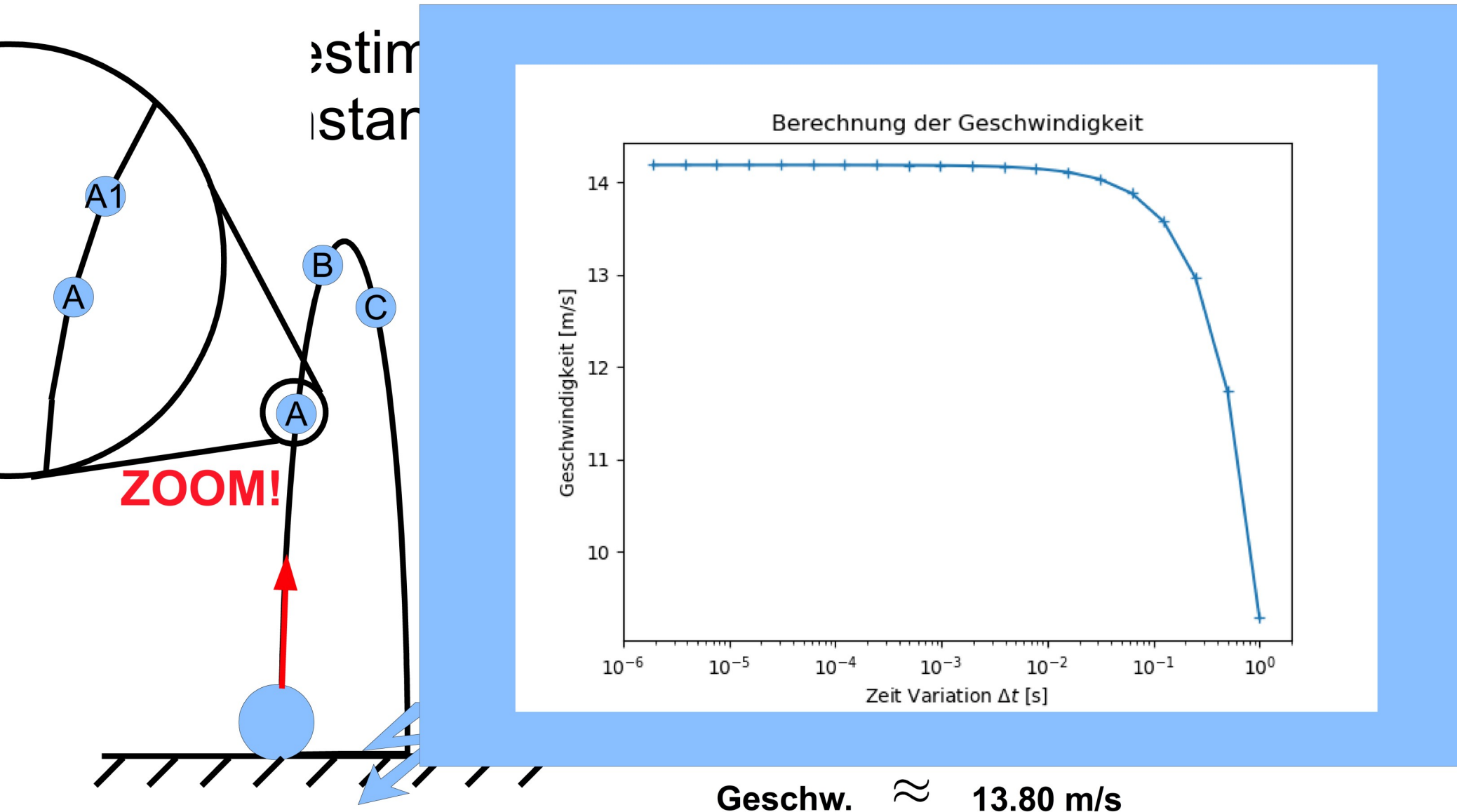
$$\text{Instantane Geschw.} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{h(t + \Delta t) - h(t)}{\Delta t}$$



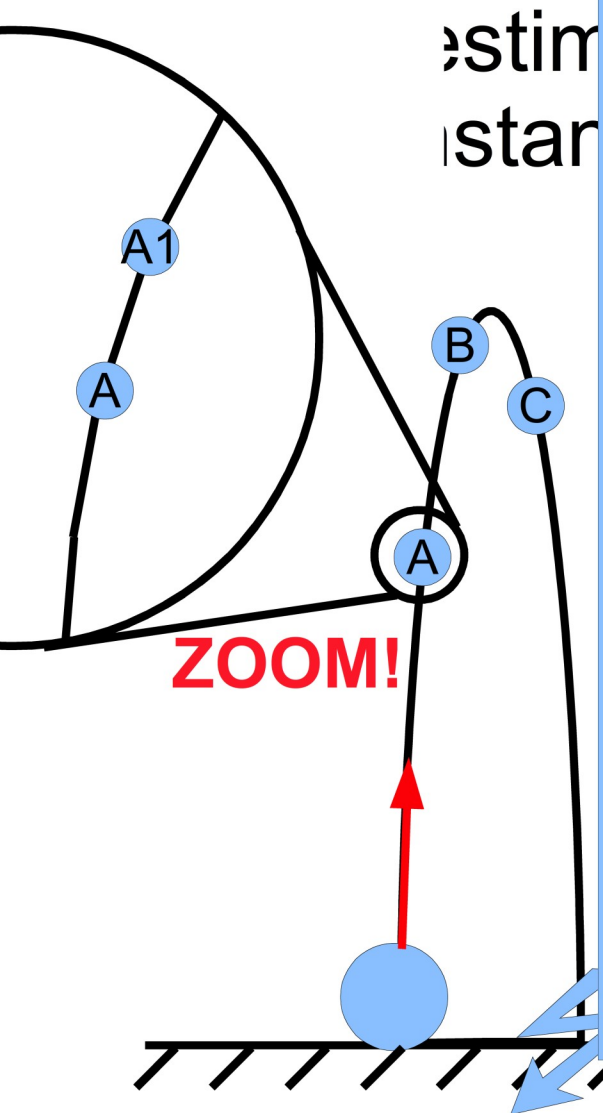
	A	A1	A2	...
Zeit t [s]	1.0	1.1	1.05	
Höhe h [m]	19.1	20.46	19.79	

Geschw. \approx 13.80 m/s

Die Ableitung



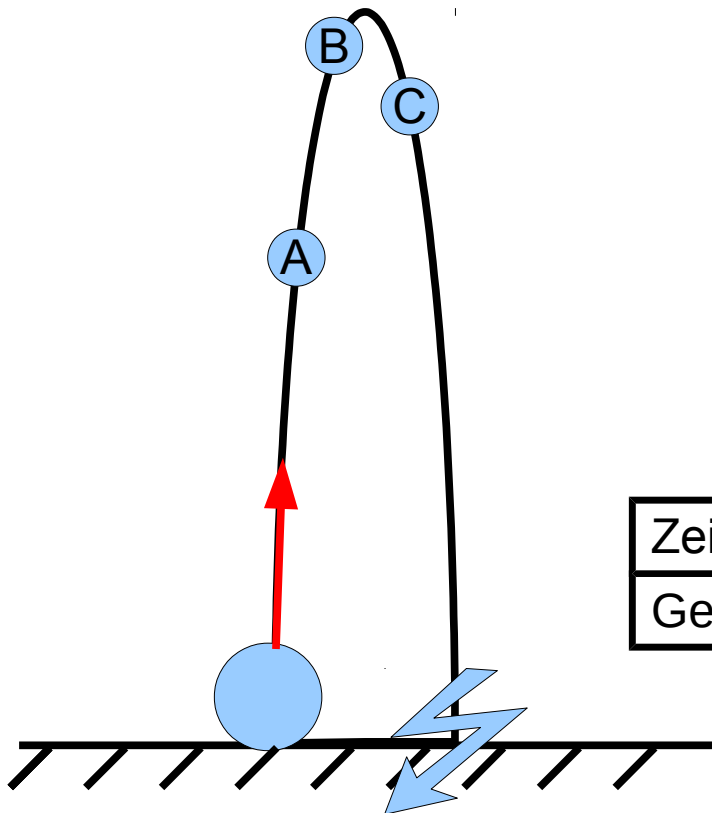
Die Ableitung



Geschw. \approx 13.80 m/s

Das Integral

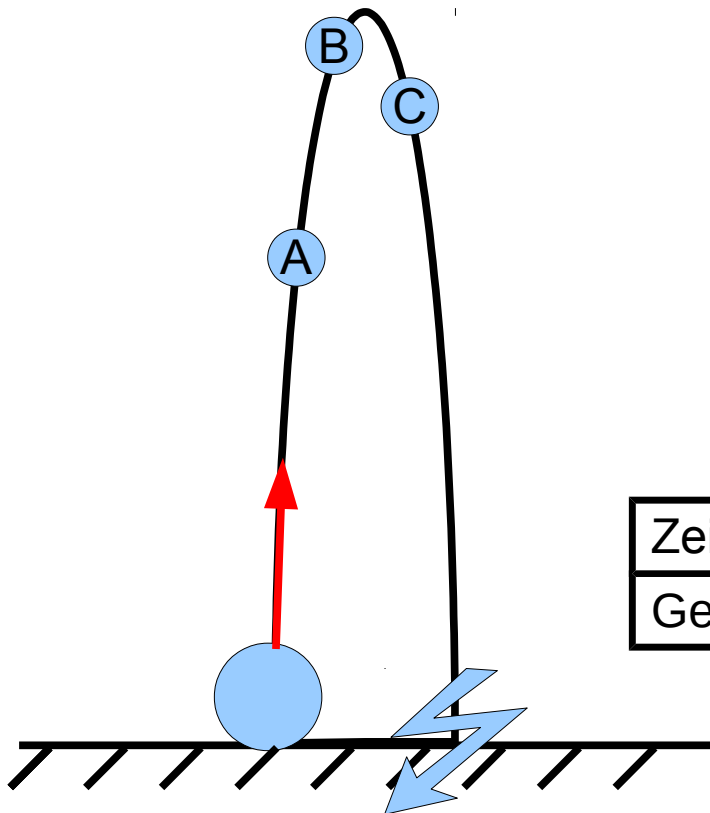
- Wie bestimmt man die Position eines Gegenstands wenn man seine Geschwindigkeit kennt?



	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Geschw. v [m/s]	14.19	4.38	-12.30

Das Integral

- Wie bestimmt man die Position eines Gegenstands wenn man seine Geschwindigkeit kennt?

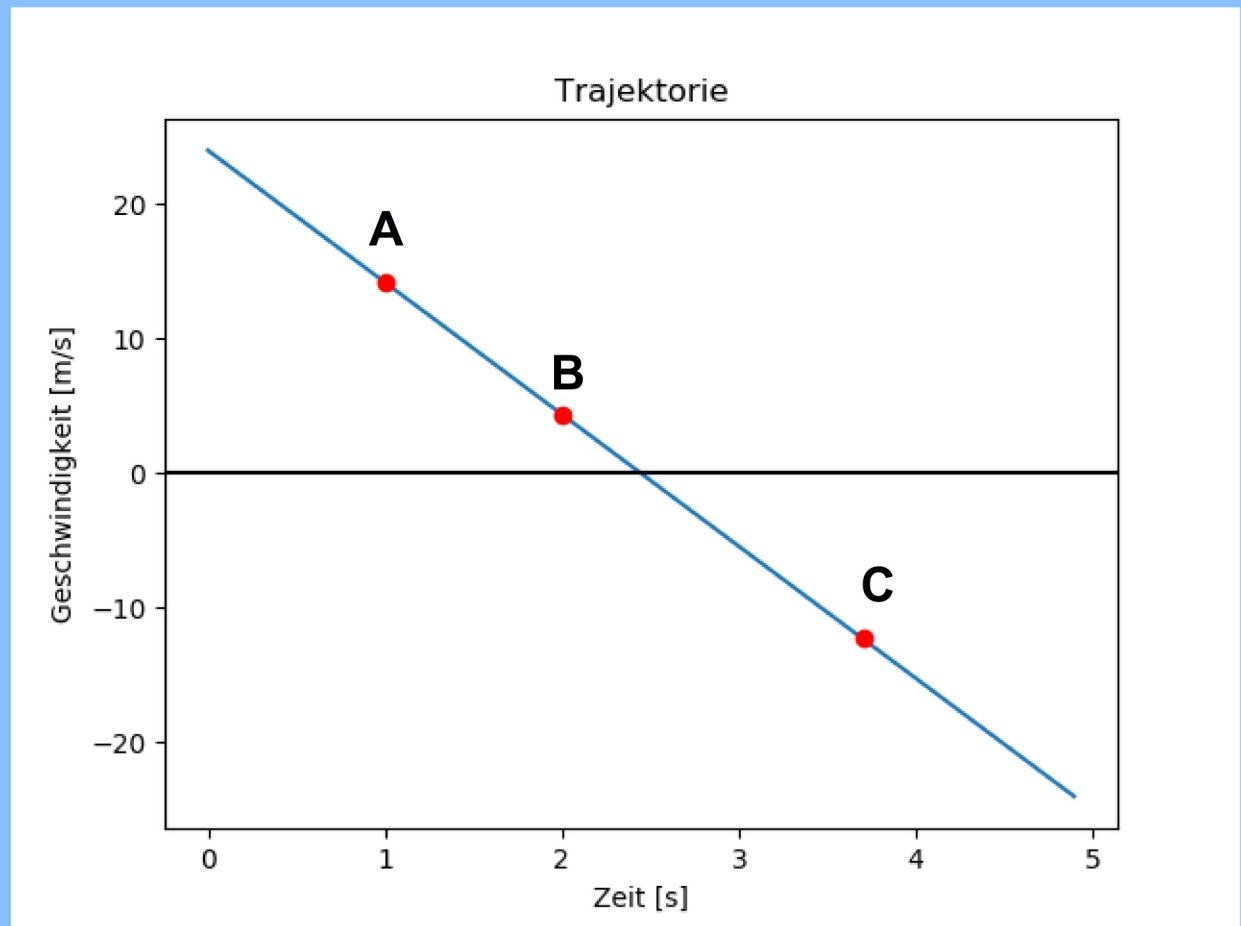
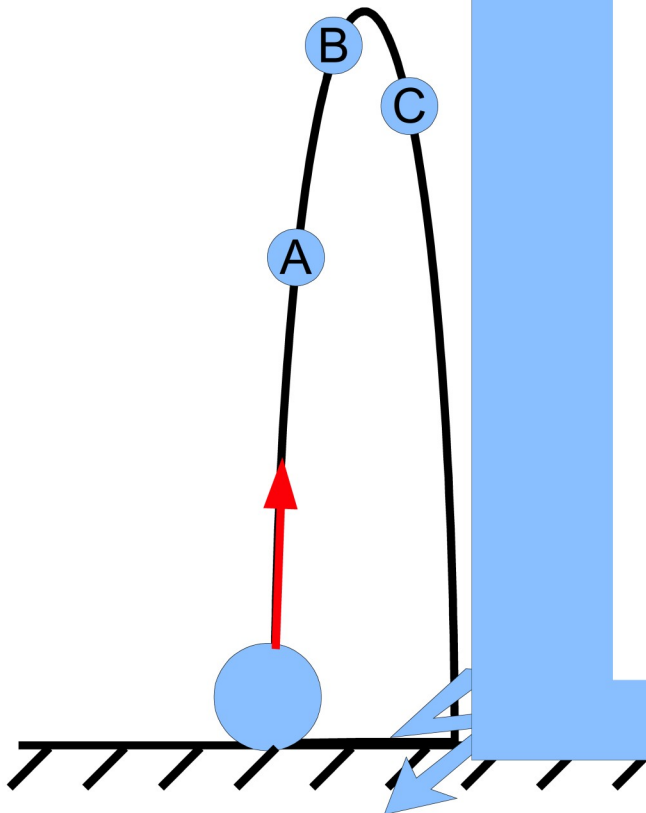


$$\text{Distanz} = \text{Geschwindigkeit} \times \text{Zeit}$$

	A	B	C
Zeit t [s]	1.0	2.0	3.7
Geschw. v [m/s]	14.19	4.38	-12.30

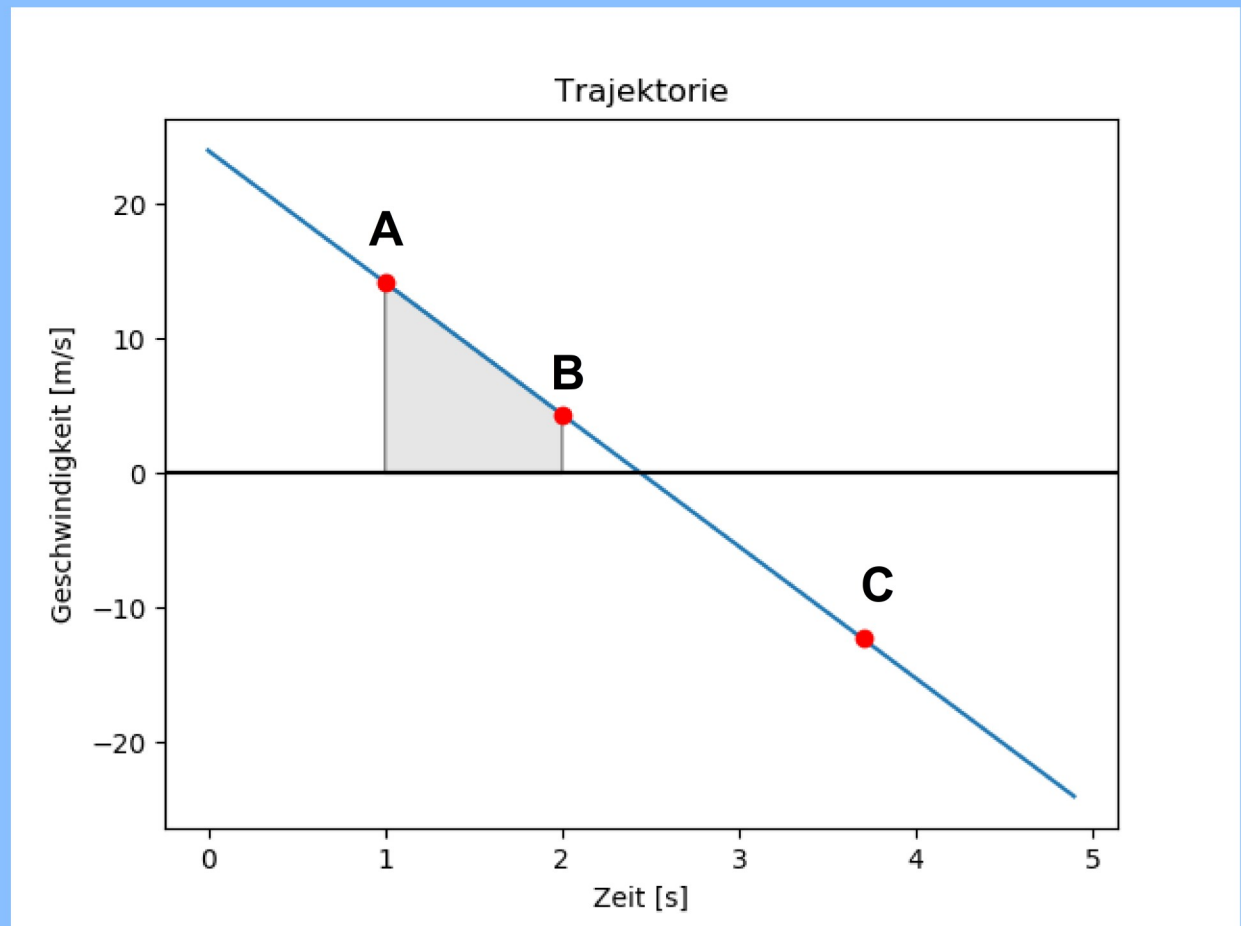
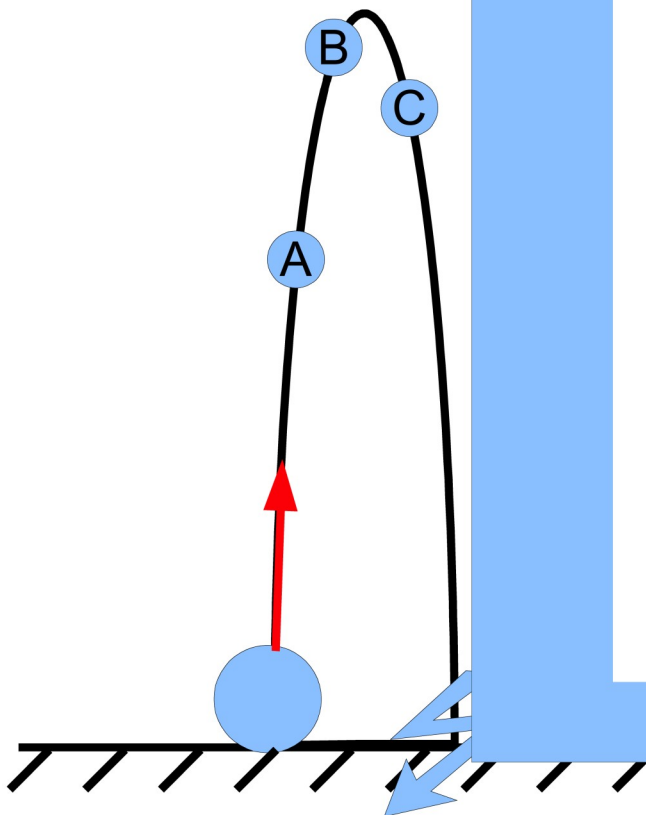
Das Integral

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, wenn man nur die Position kennt?



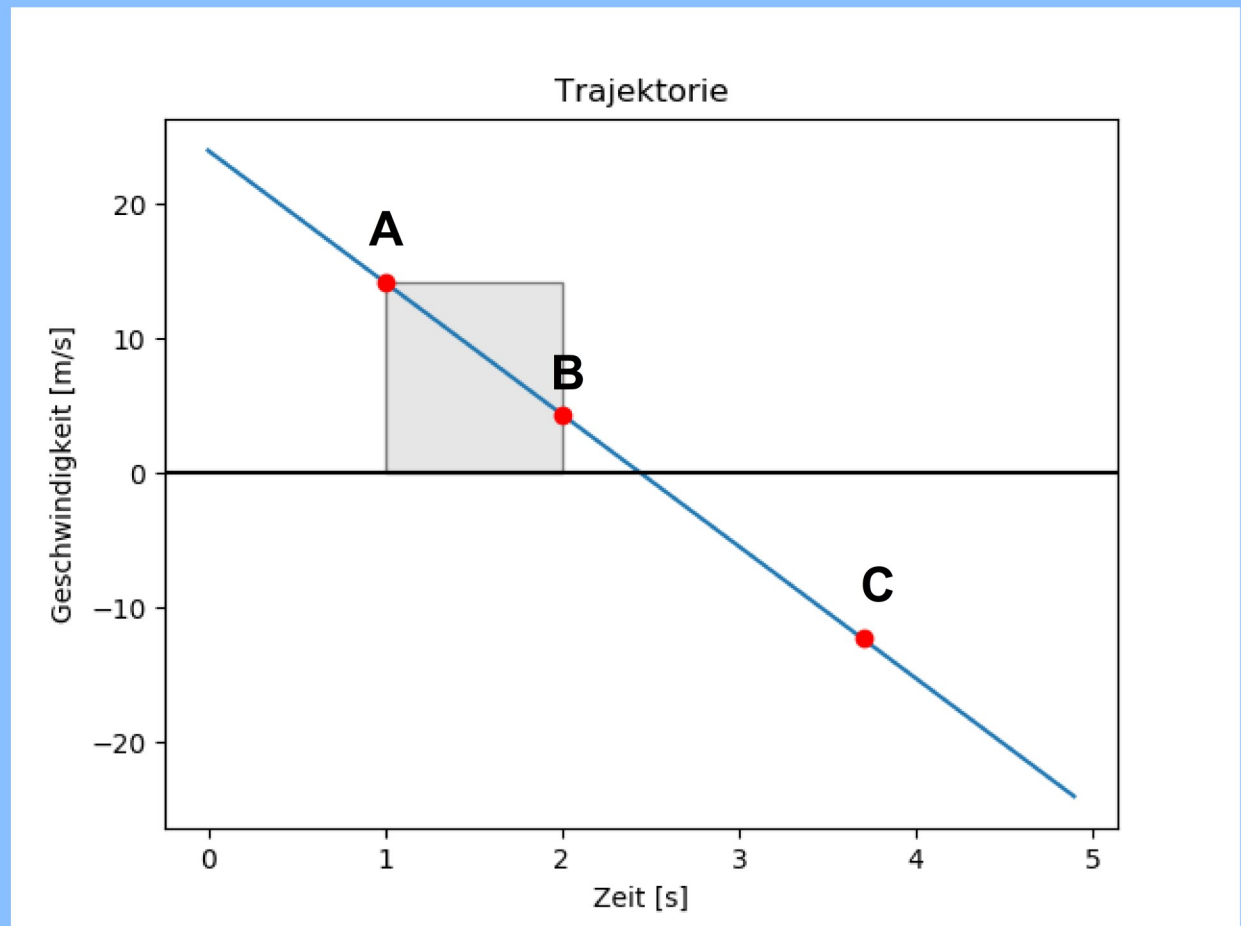
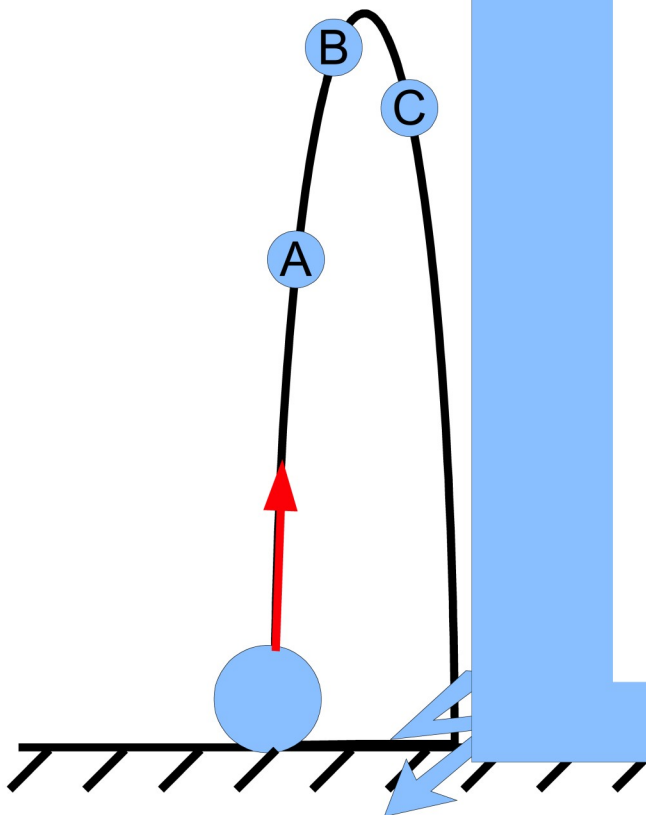
Das Integral

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, wenn man nur die Position kennt?



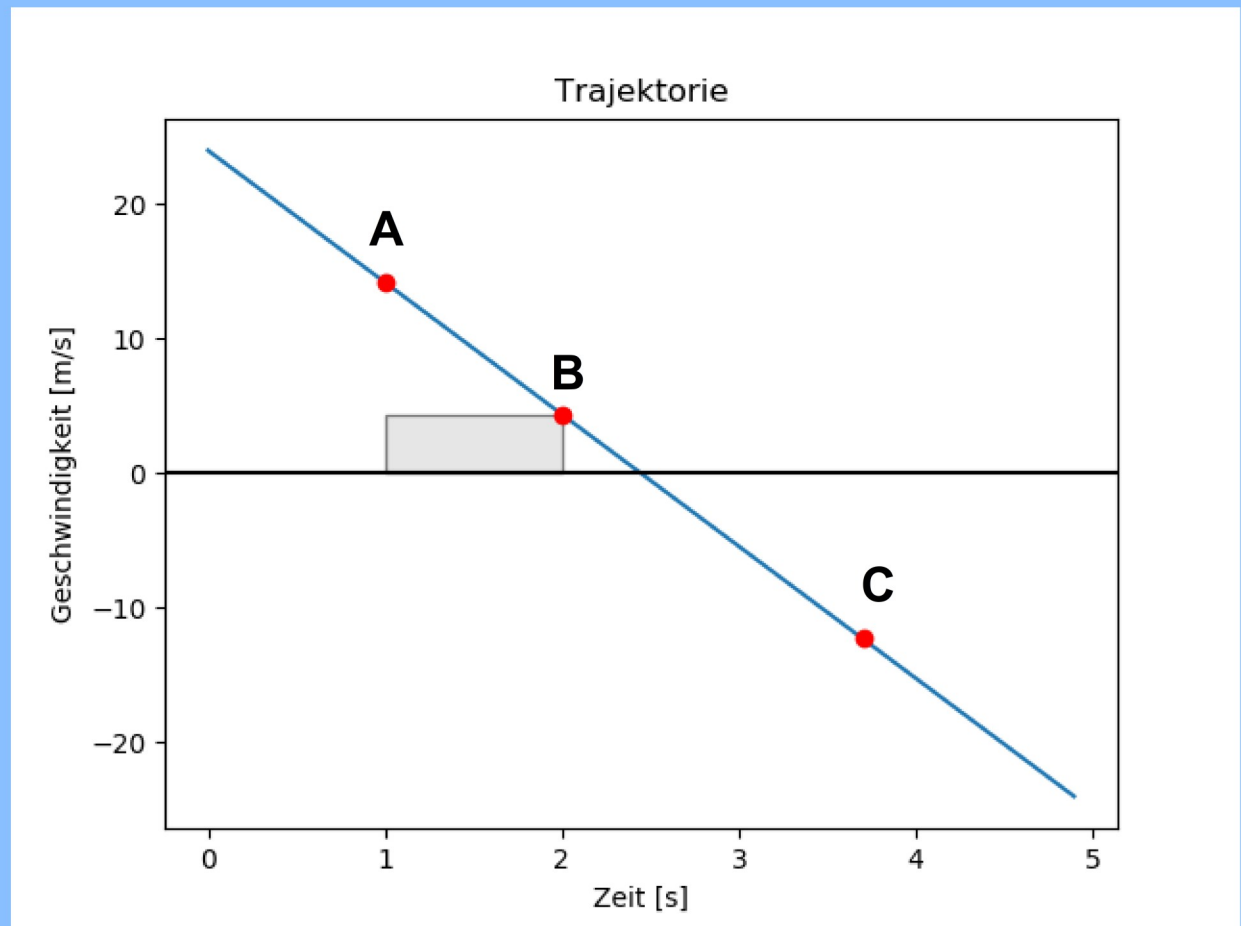
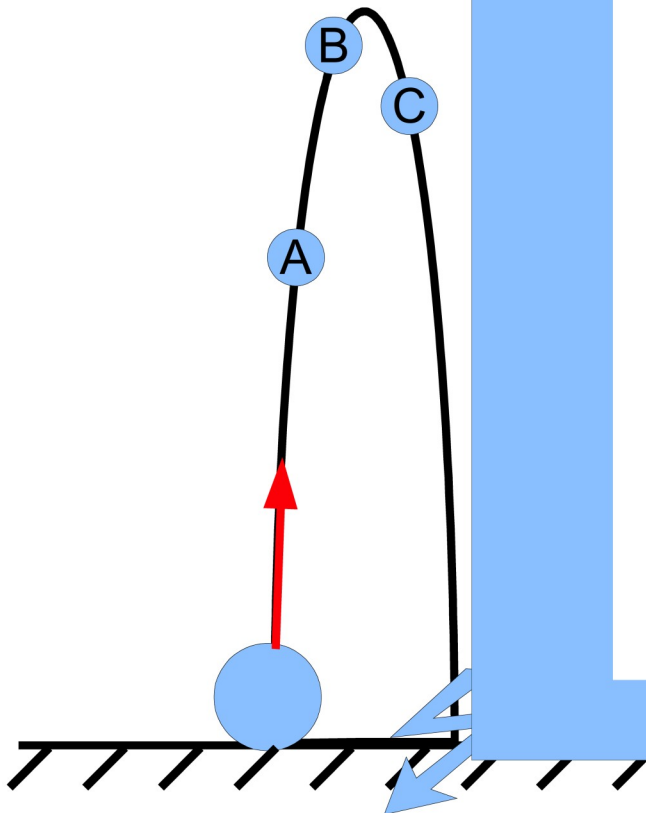
Das Integral

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, wenn man nur die Position kennt?



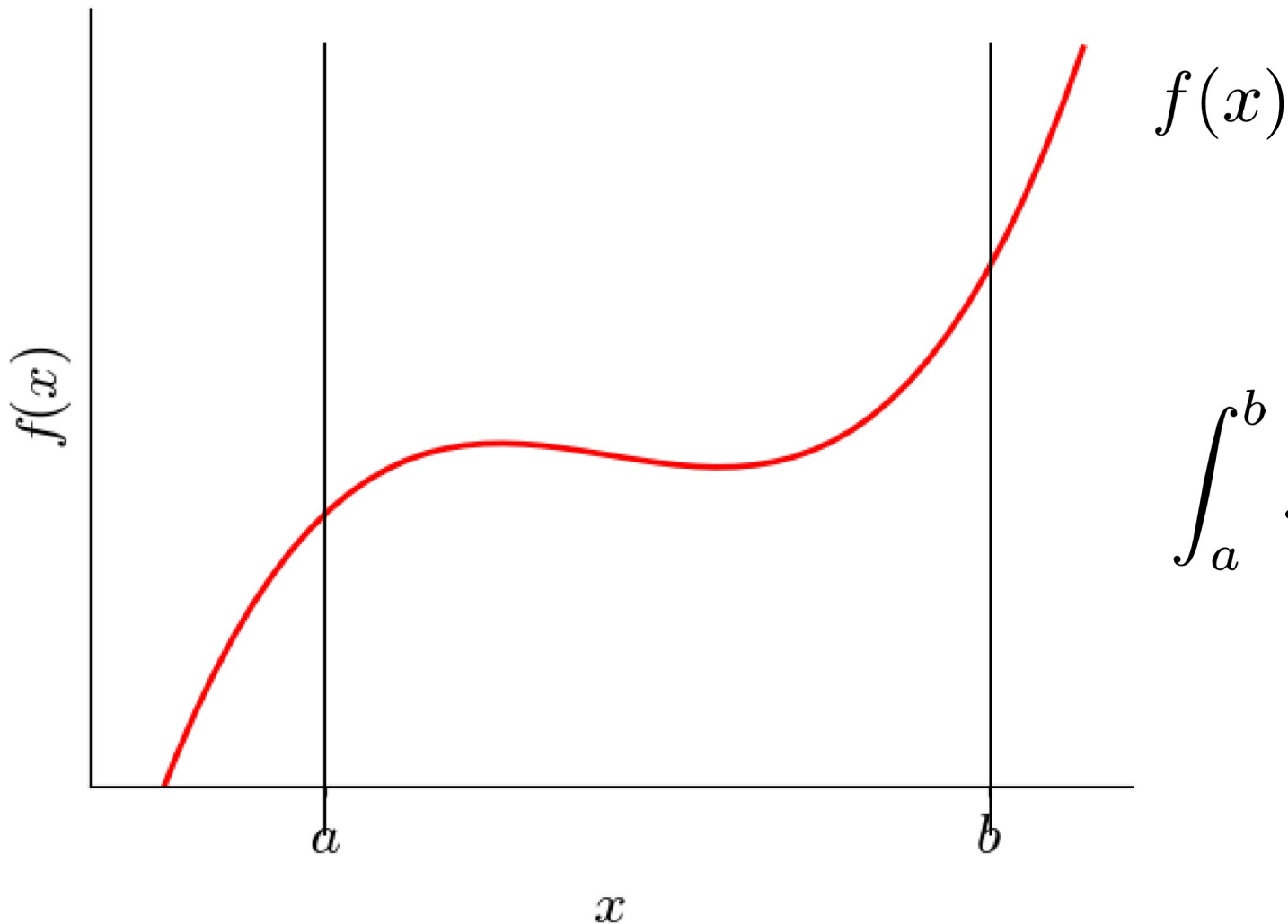
Das Integral

- Wie bestimmt man die Geschwindigkeit eines Gegenstandes, wenn man nur die Position kennt?



Das Integral

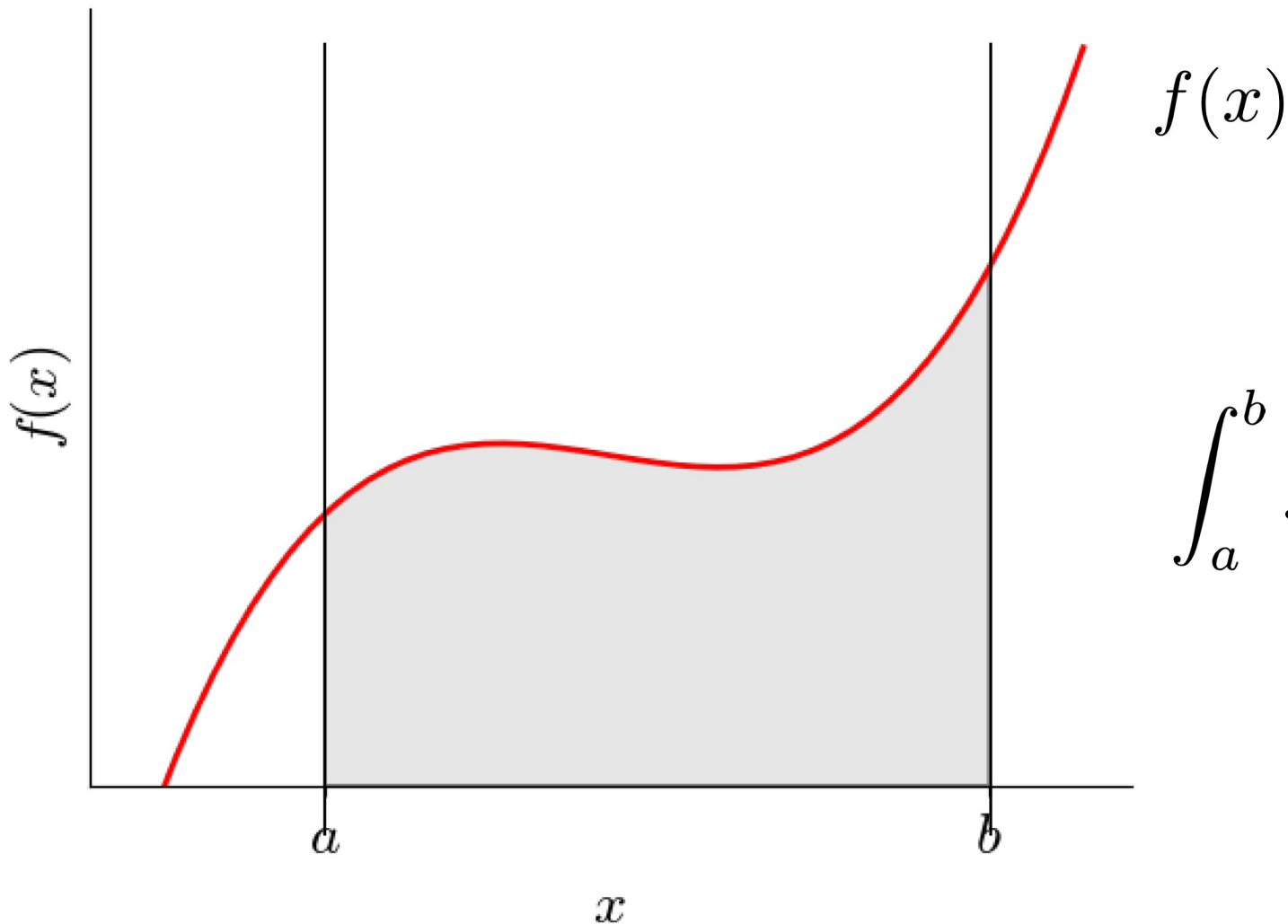
- Allgemein:



$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

Das Integral

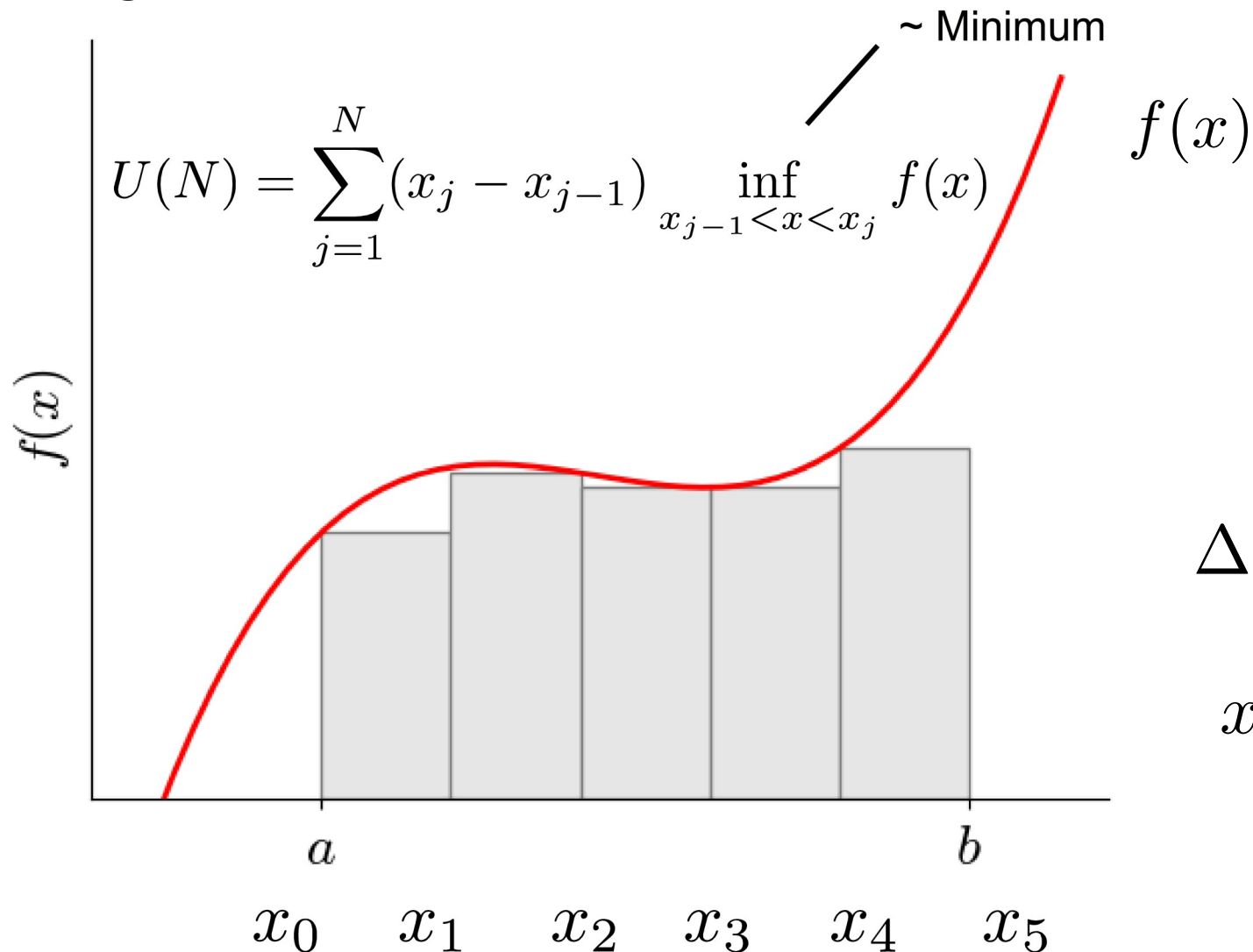
- Allgemein:



$$\int_a^b f(x) dx = ?$$

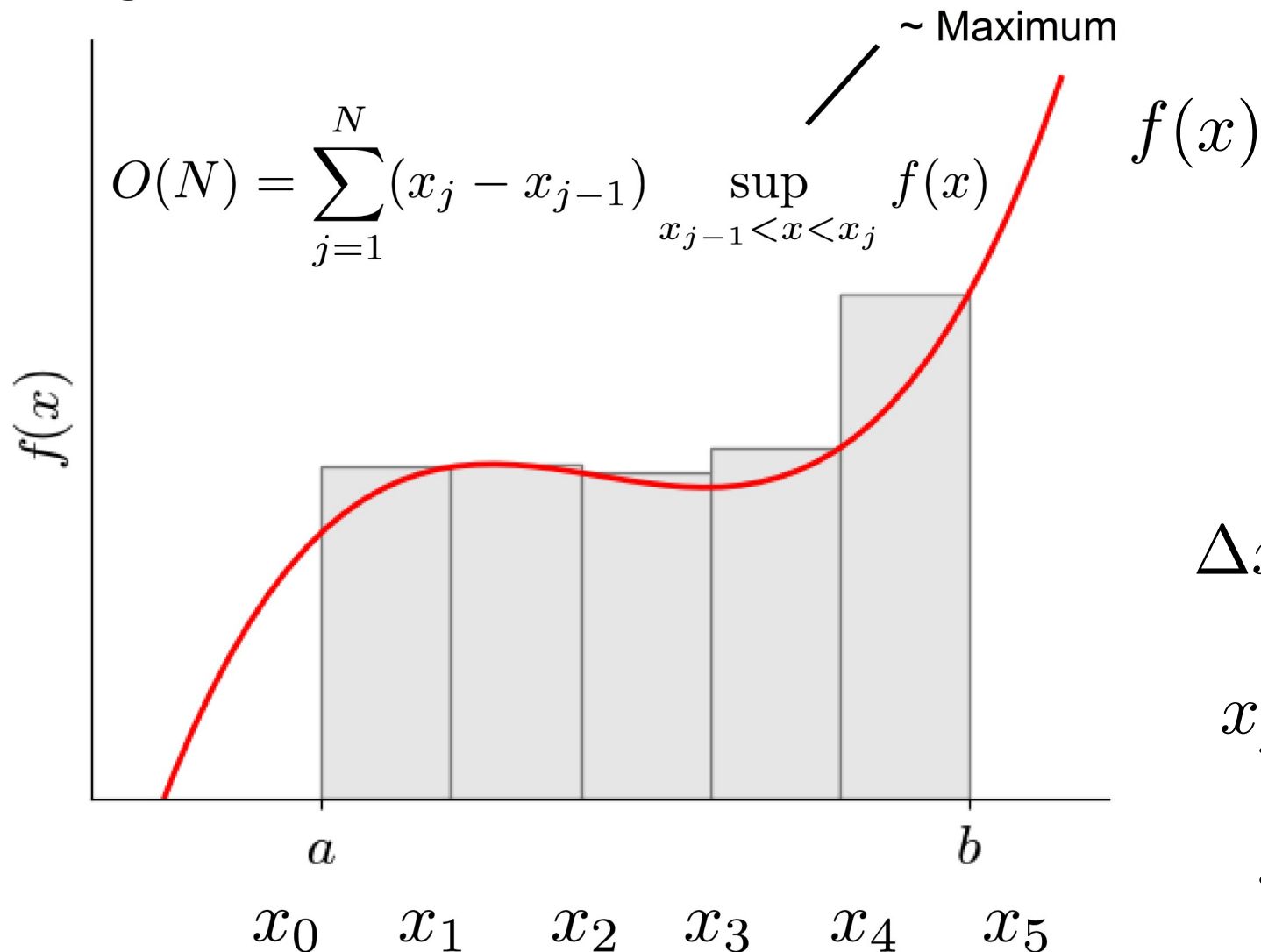
Das Integral

- Allgemein: Untersumme



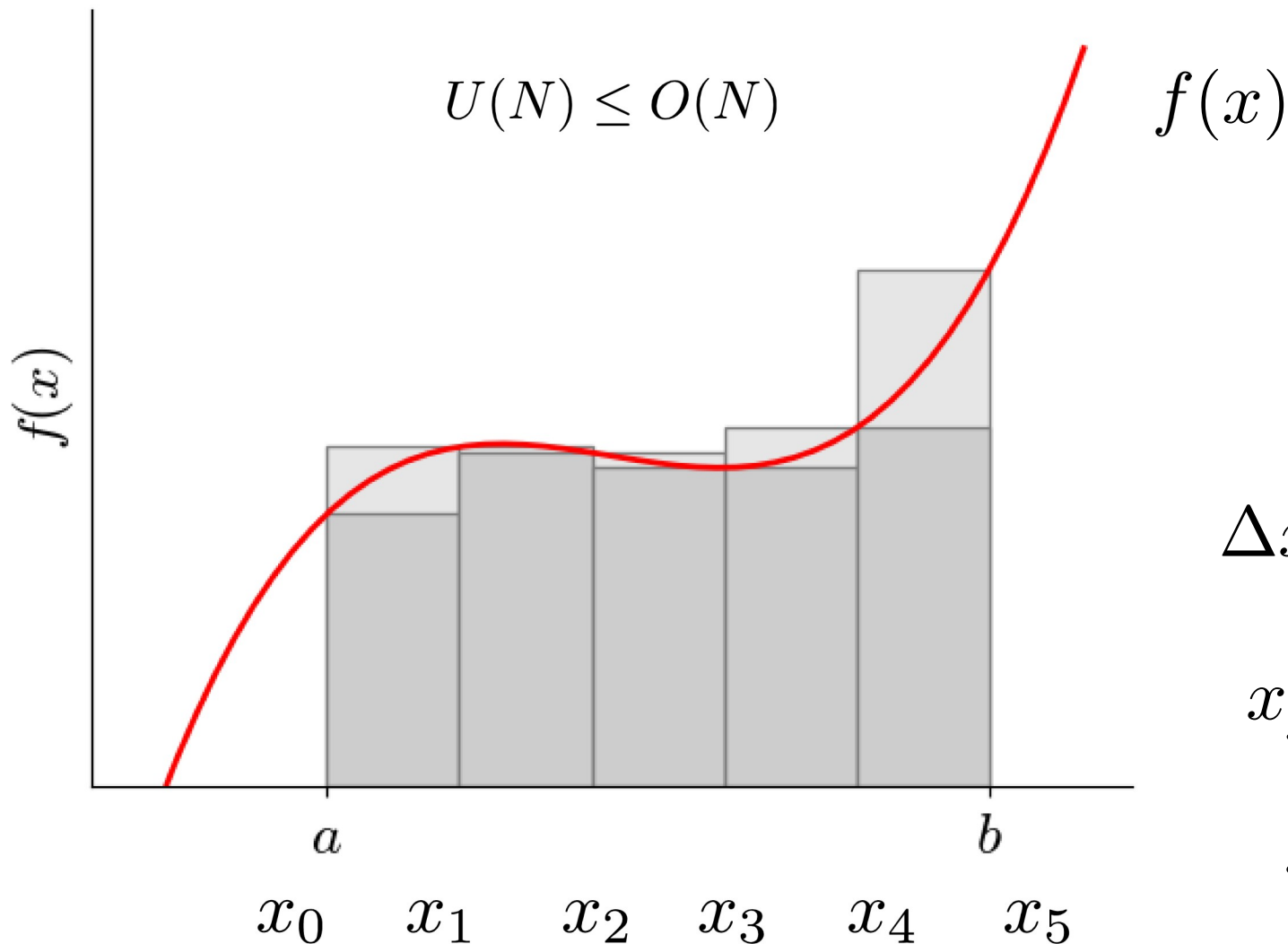
Das Integral

- Allgemein: Obersumme



Das Integral

- Allgemein:



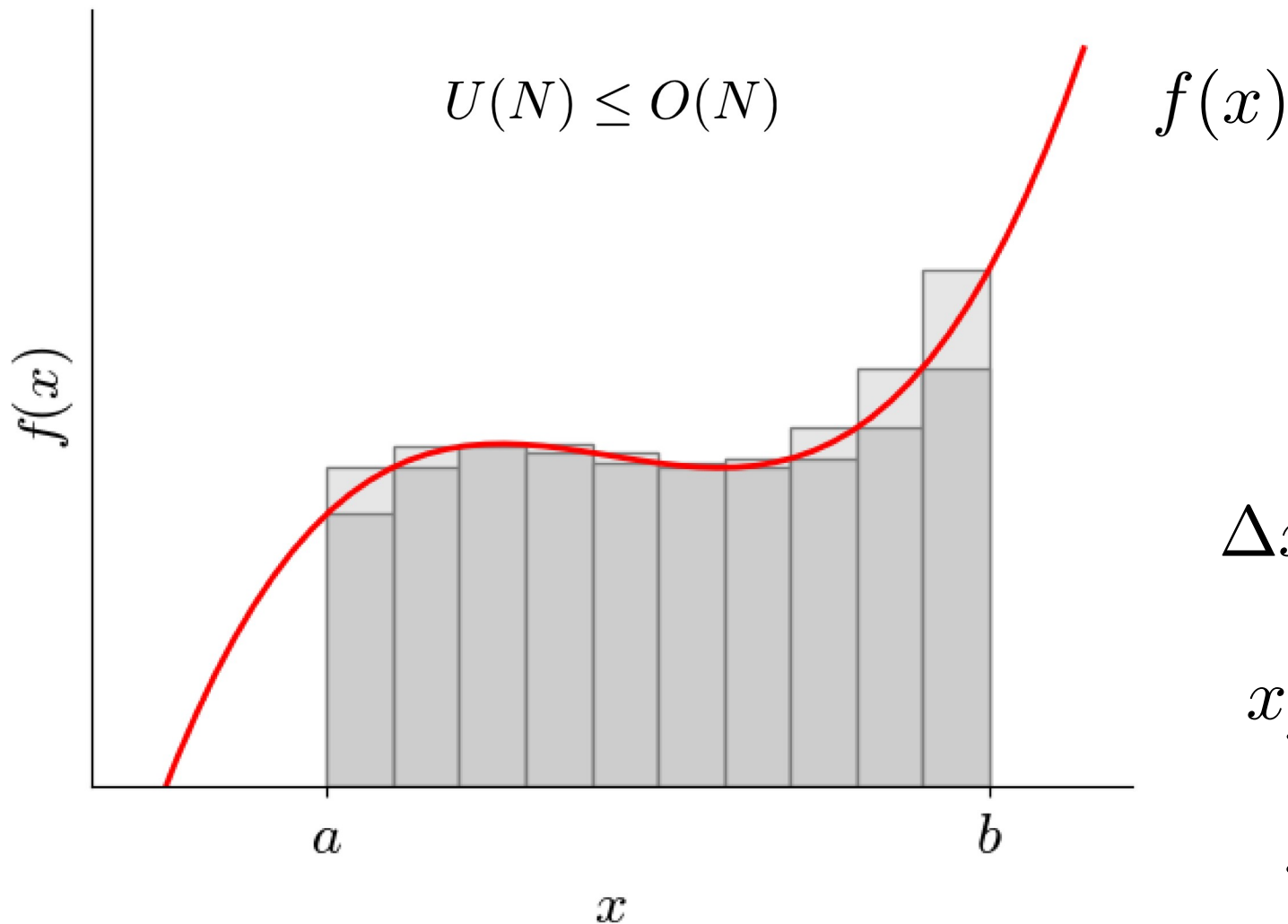
$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

Das Integral

- Allgemein:



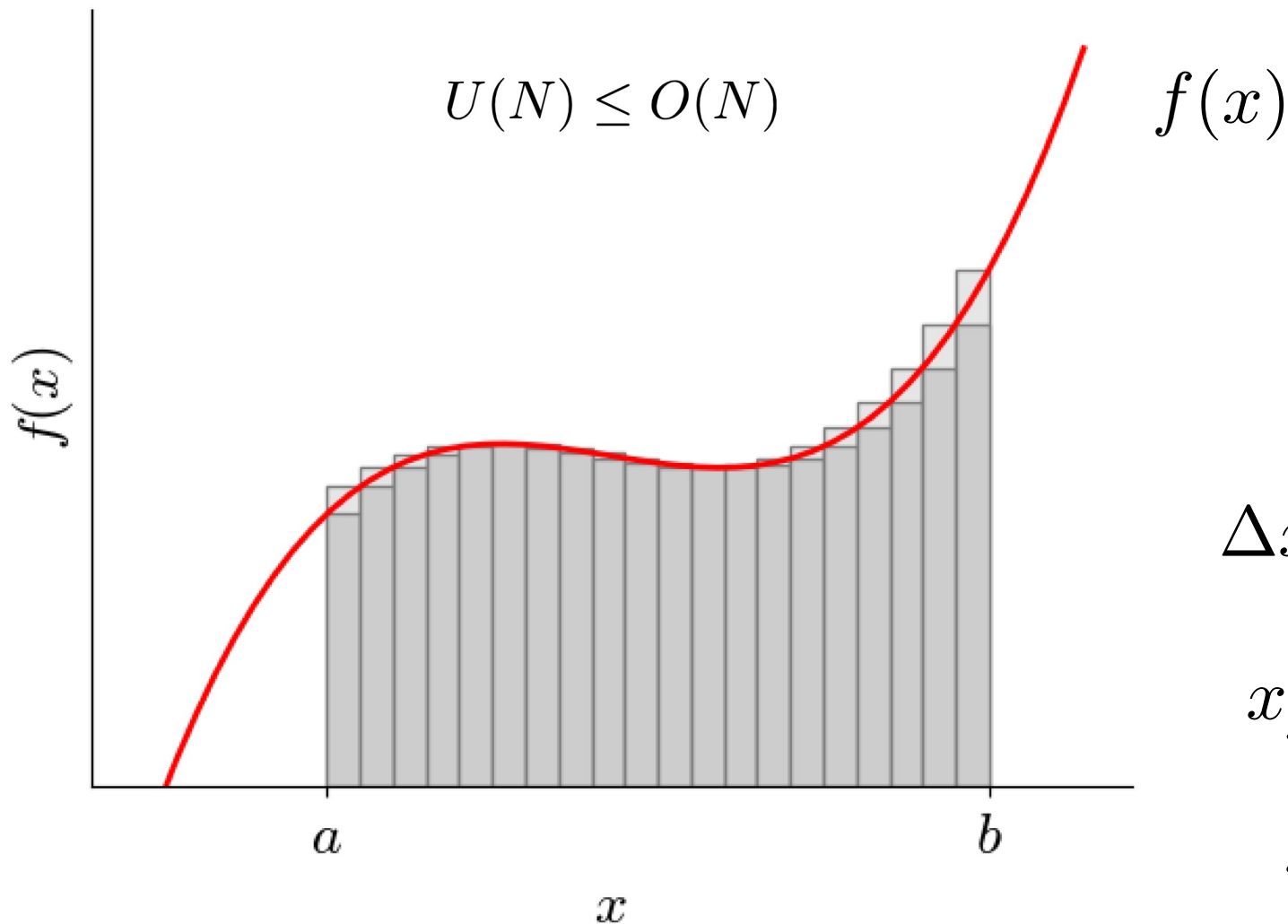
$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$x_j = a + j \Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

Das Integral

- Allgemein:



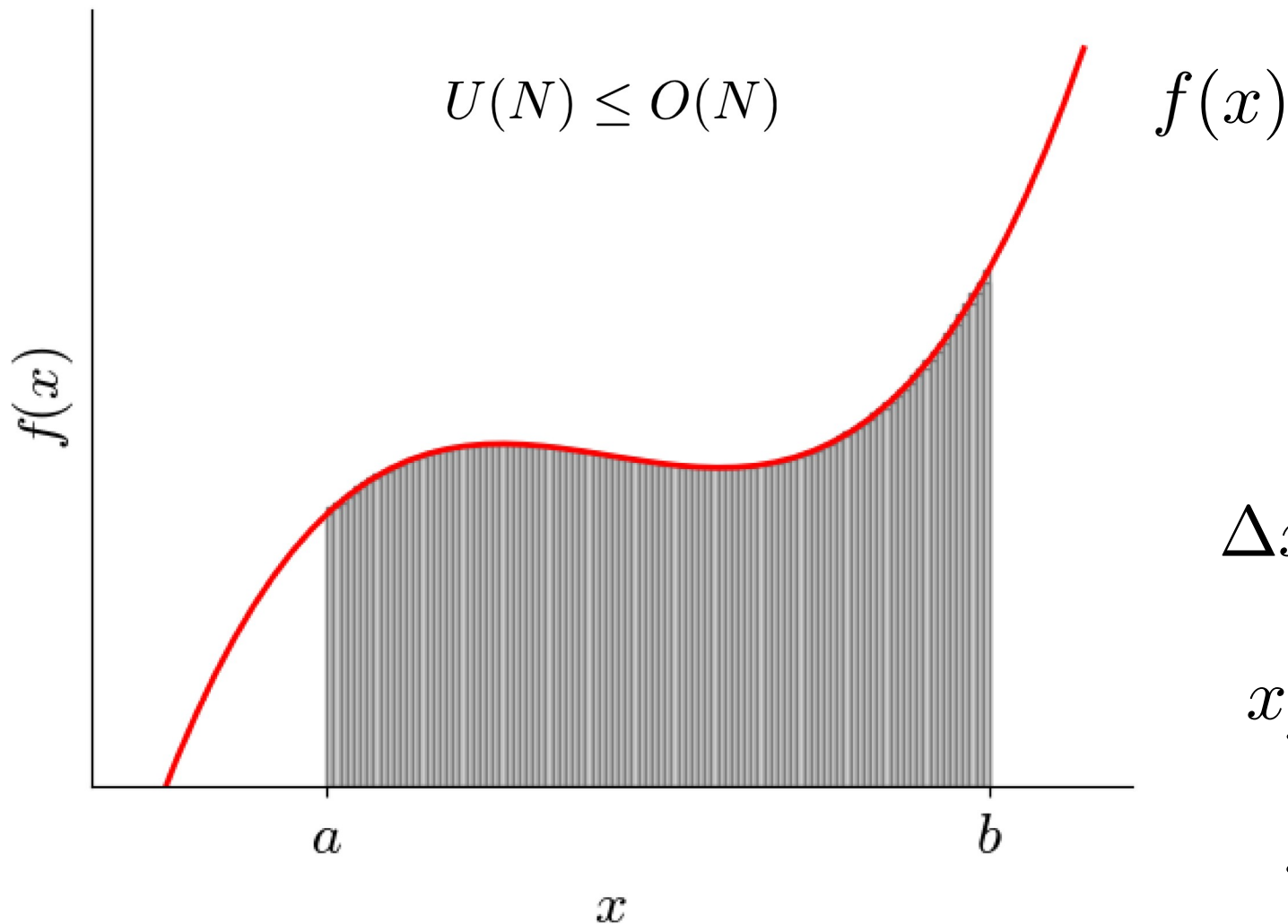
$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

Das Integral

- Allgemein:



$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

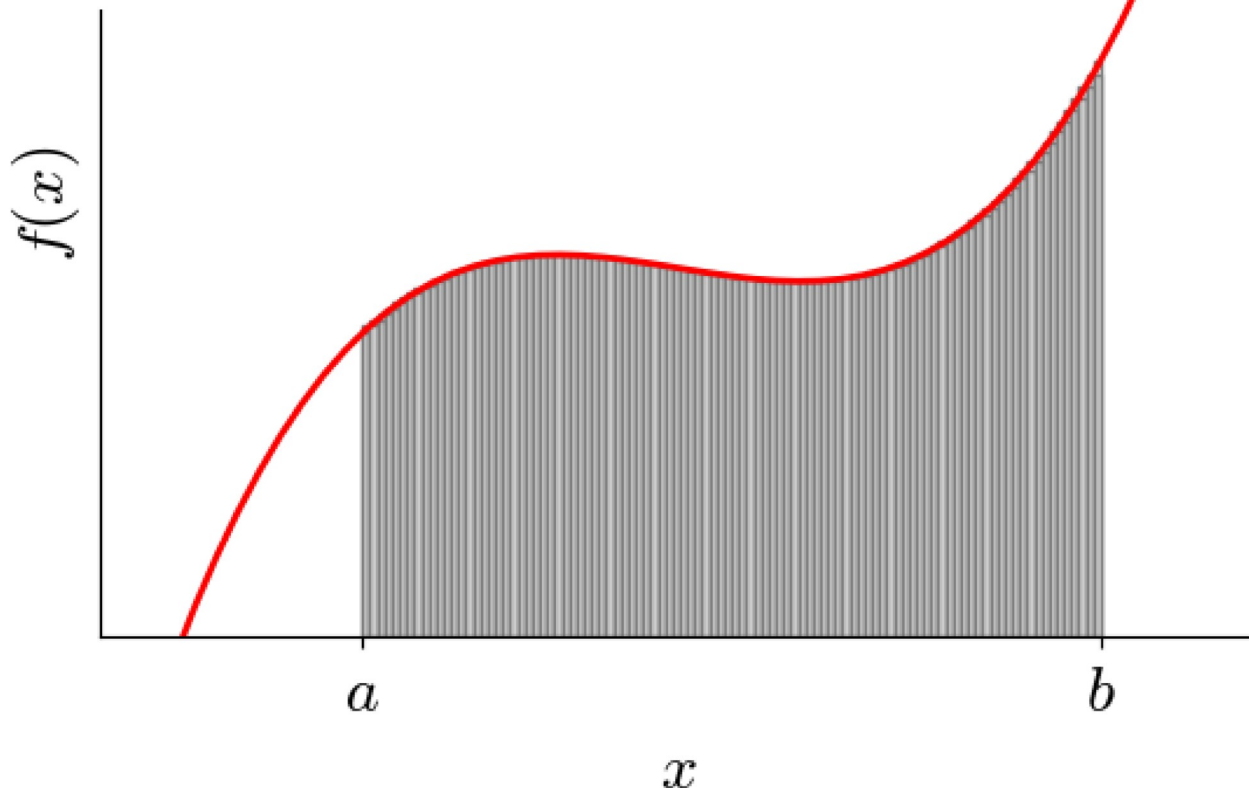
$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

Das Integral

- Allgemein:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{N \rightarrow \infty} U(N) \leq \lim_{N \rightarrow \infty} O(N) = \overline{\int_a^b f(x) dx} \quad f(x)$$



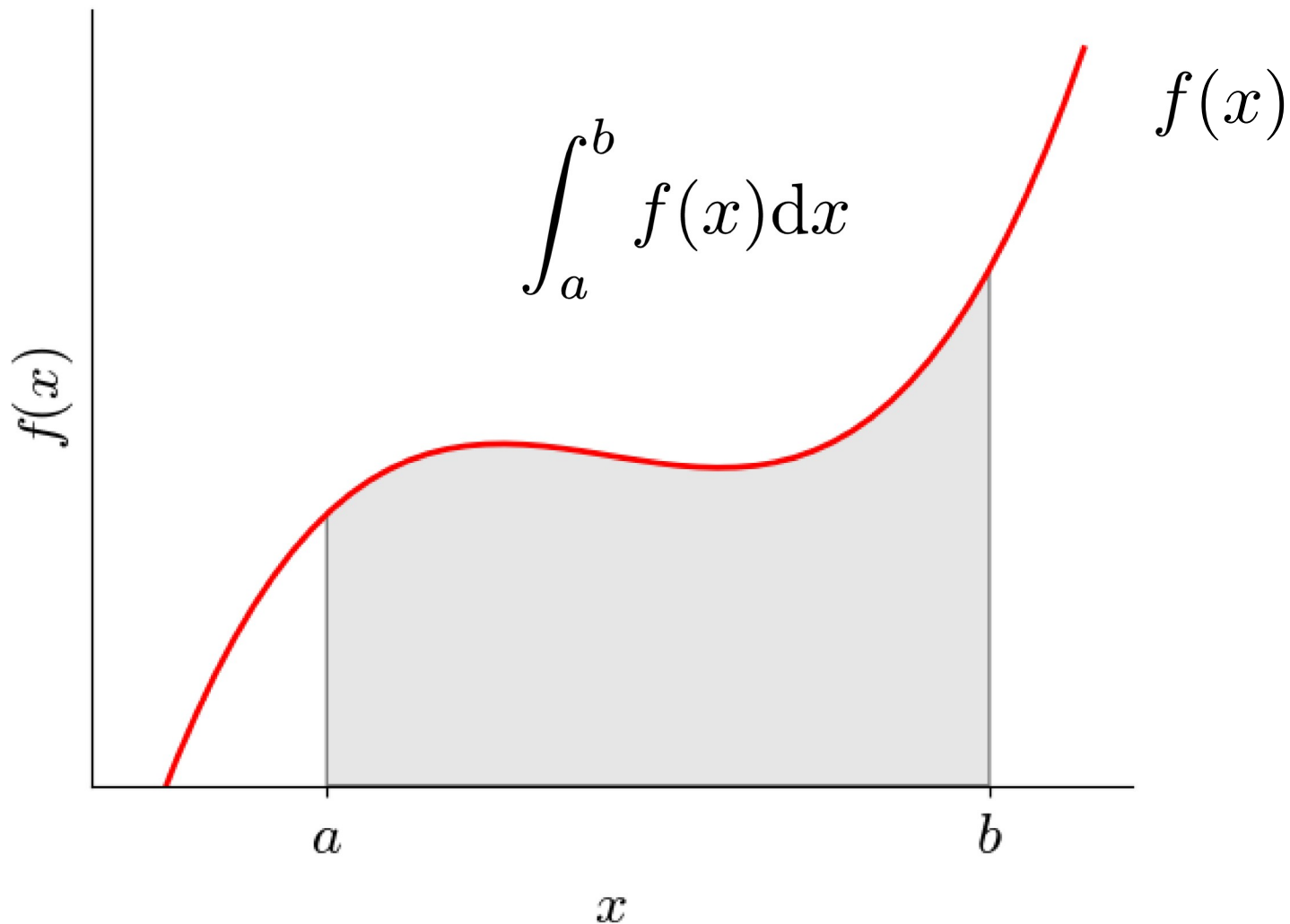
$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$x_j = a + j \Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

Das Integral

- Allgemein:



Zusammenhang

- Stammfunktion

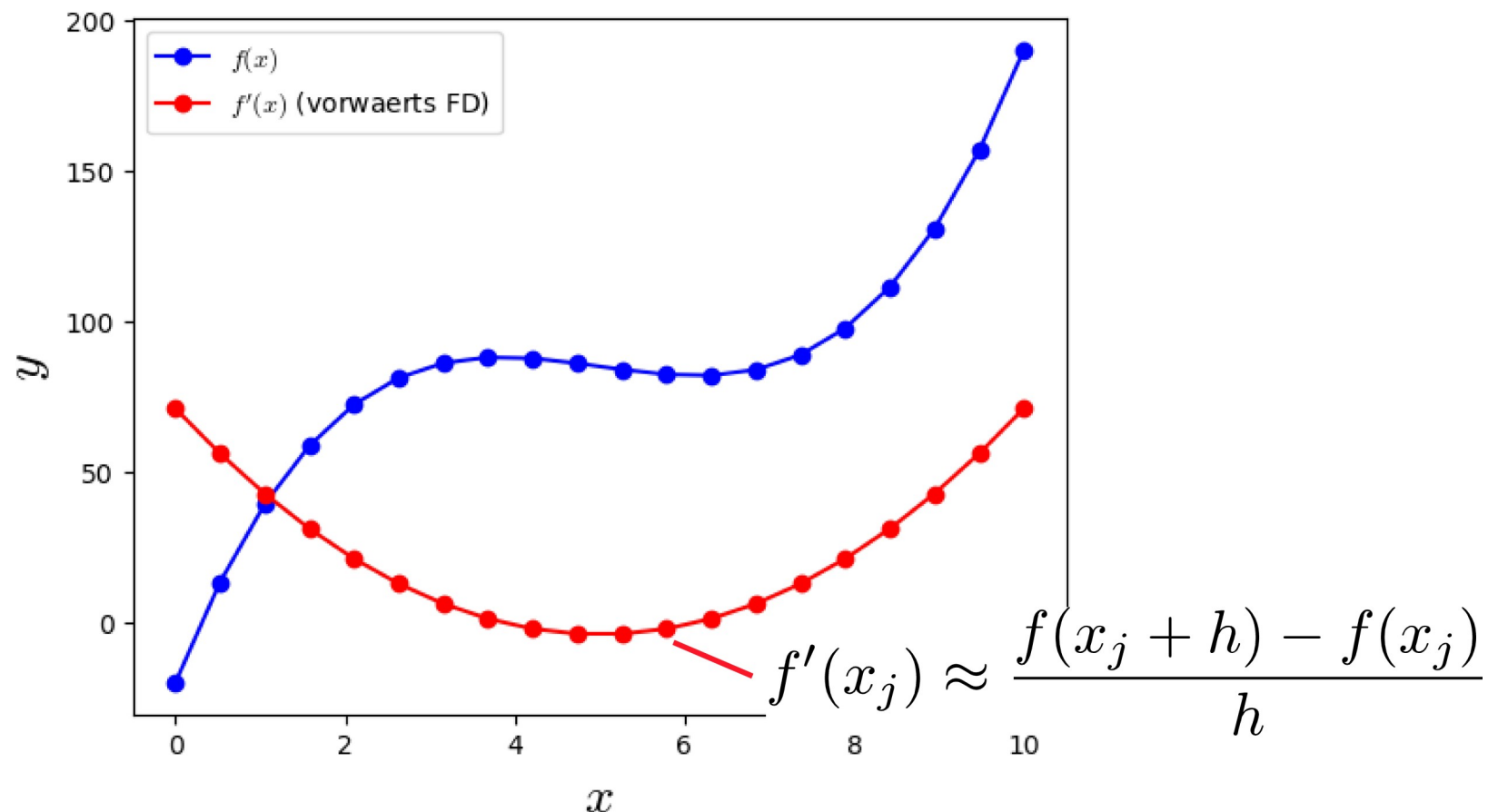
$$F(x) = \int_a^x f(t) dt \quad \longrightarrow \quad F'(x) = \frac{dF}{dx}(x) = f(x)$$

- Fundamentalsatz der Differential- und Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

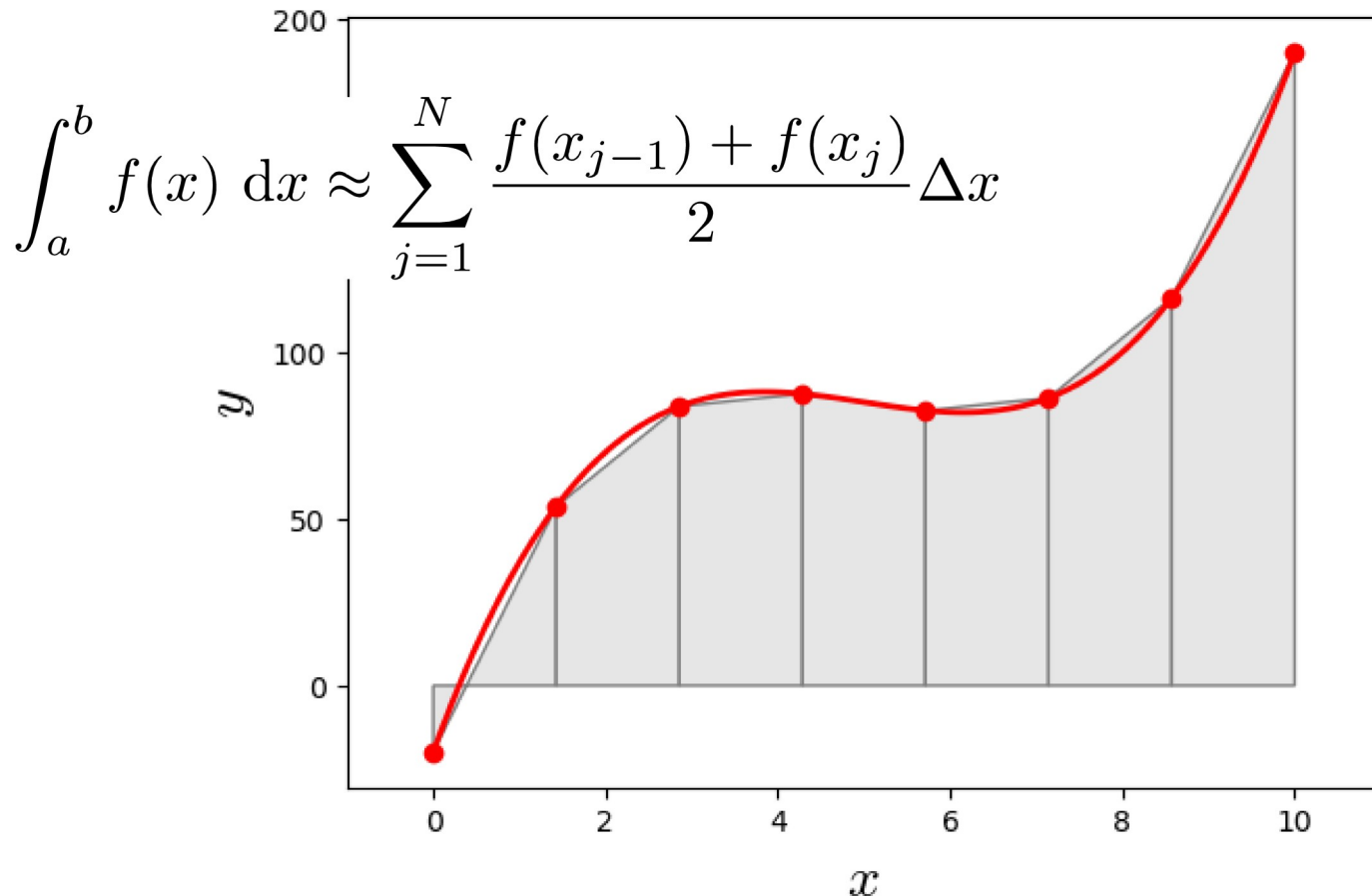
Numerische Behandlung

- Gegeben: $f(x) = (x - 3)(x - 5)(x - 7) + 85$
- Berechne eine **Approximation** der Ableitung mit sog. vorwärts finiten Differenzen in PYTHON



Numerische Behandlung

- Gegeben: $f(x) = (x - 3)(x - 5)(x - 7) + 85$
- Berechne eine **Approximation** des Integrals mit der sog. Trapezregel in PYTHON



$$\Delta x = \frac{b - a}{N}$$

$$x_j = a + j\Delta x$$

$$j = 0, \dots, N$$

Differentialgleichungen

- DGL erster Ordnung

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y(t))$$

- DGL zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dt^2} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}\right)$$

- DGL n-ter Ordnung

$$\frac{d^ny}{dt^n} = f\left(t, y(t), \frac{dy}{dt}, \frac{d^2y}{dt^2}, \dots, \frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}\right)$$

Differentialgleichungen

- Beispiele
 - Zweites Newton'sches Gesetz (1D)

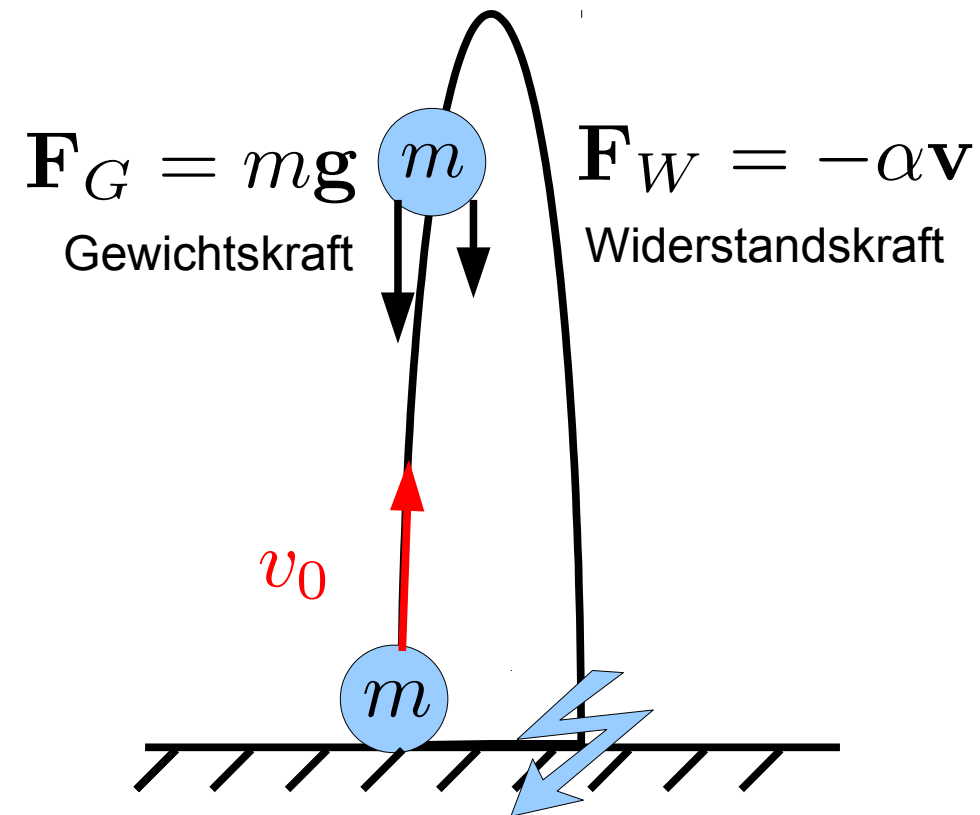
Masse m $\frac{d^2x}{dt^2}$ **Beschleunigung** $= F(t, x(t))$ **Kraft** **Oft:** $m\ddot{x} = F(t, x(t))$

- Radioaktiver Zerfall

$\frac{dy}{dt} = -\lambda y$ **Anzahl Atomkerne** **Zerfallskonstante**

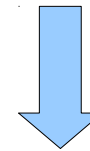
Projekt 1

- Wurf mit Luftwiderstand



$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

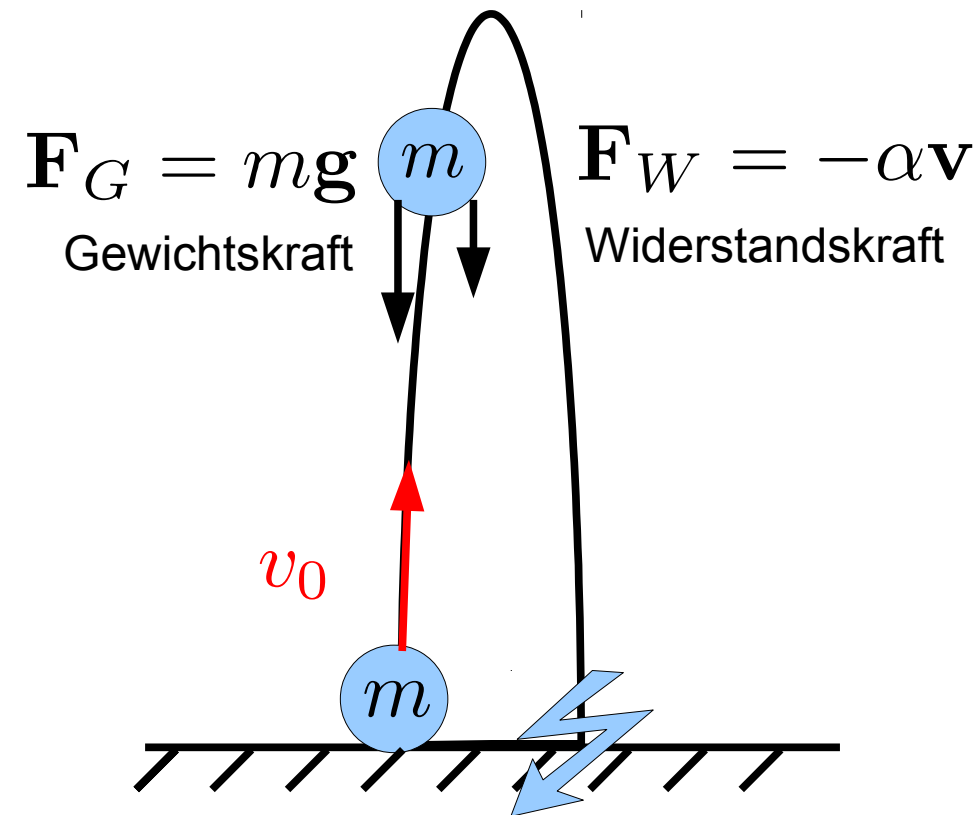


$$m\dot{v} = -mg - \alpha v$$

$$\dot{x} = v$$

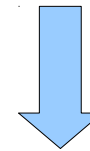
Projekt 1

- Wurf mit Luftwiderstand



$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$



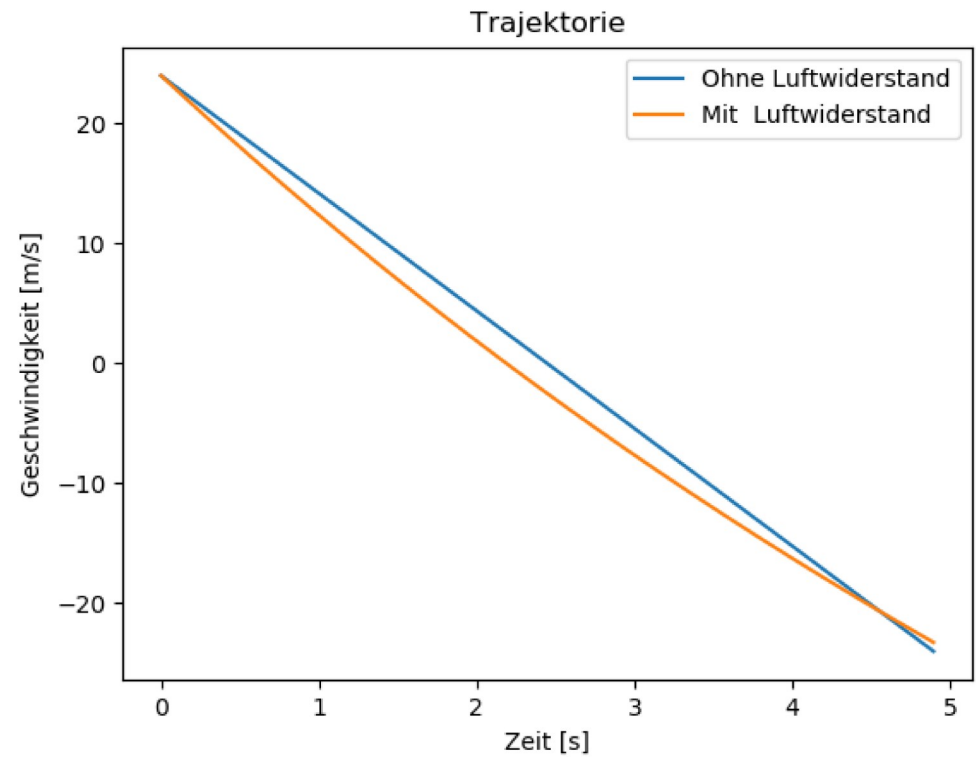
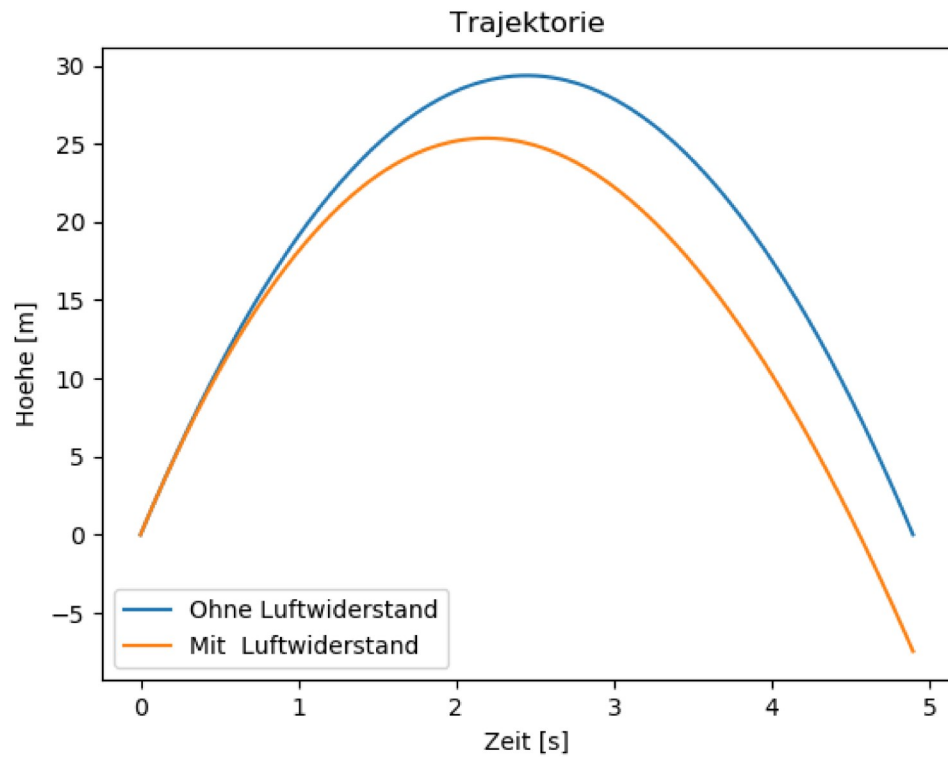
$$m \frac{v^{j+1} - v^j}{\Delta t} = -mg - \alpha v^j$$

$$\frac{x^{j+1} - x^j}{\Delta t} = v^j$$

$$\Delta t = \frac{t_E - t_S}{N}$$

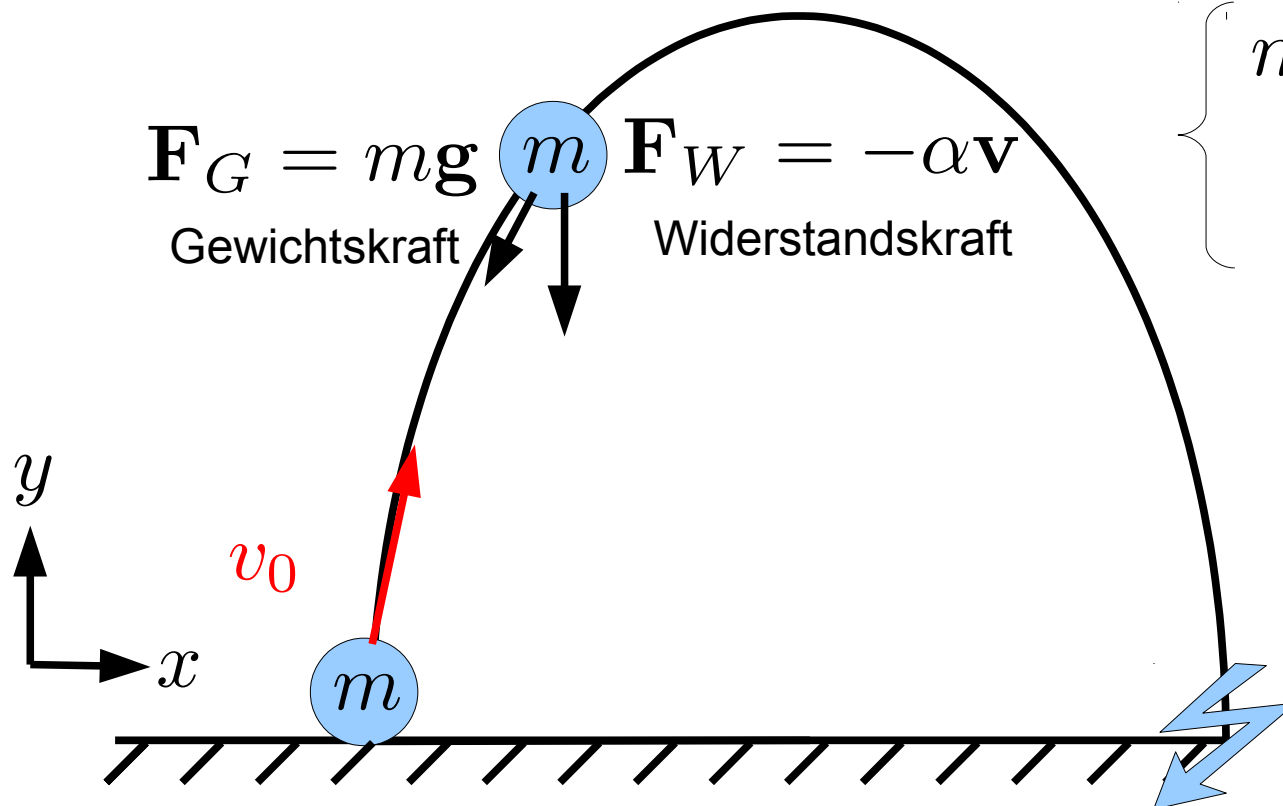
Projekt 1

- Wurf mit Luftwiderstand



Projekt 1+

- Wurf mit Luftwiderstand



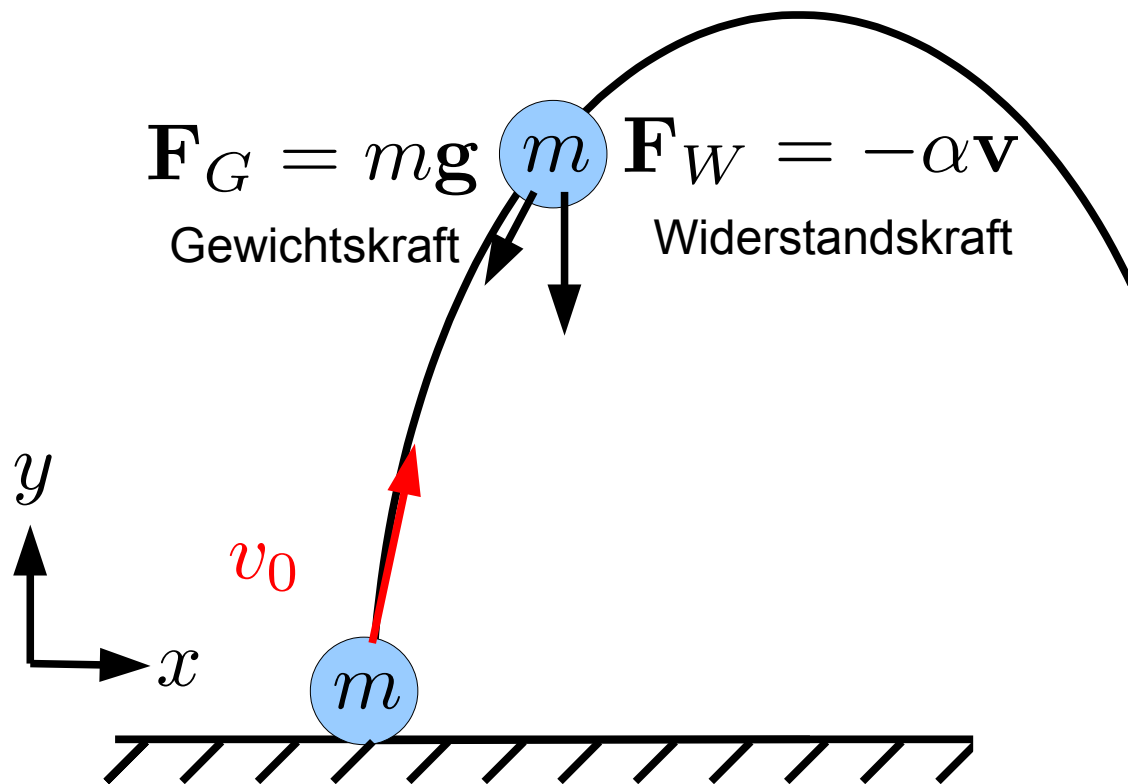
$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W \\ \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v} \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = v_x \\ m\dot{v}_x = -\alpha v_x \\ \dot{y} = v_y \\ m\dot{v}_y = -mg - \alpha v_y \end{array} \right.$$

Projekt 1+

- Wurf mit Luftwiderstand



$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_W$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$$

$$\frac{x^{j+1} - x^j}{\Delta t} = v_x^j$$

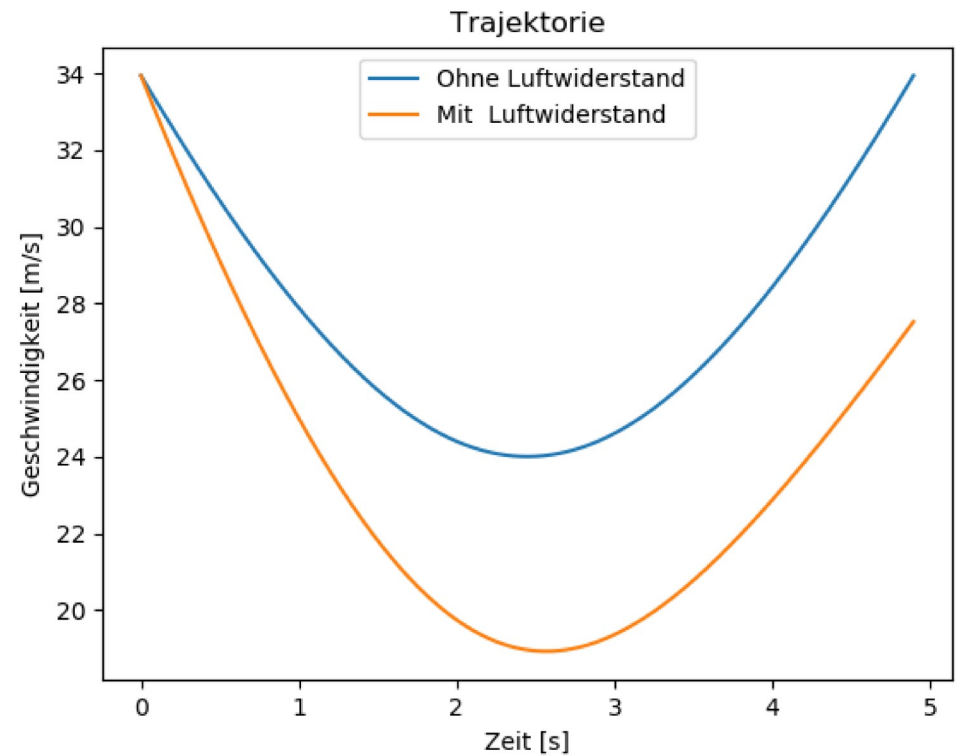
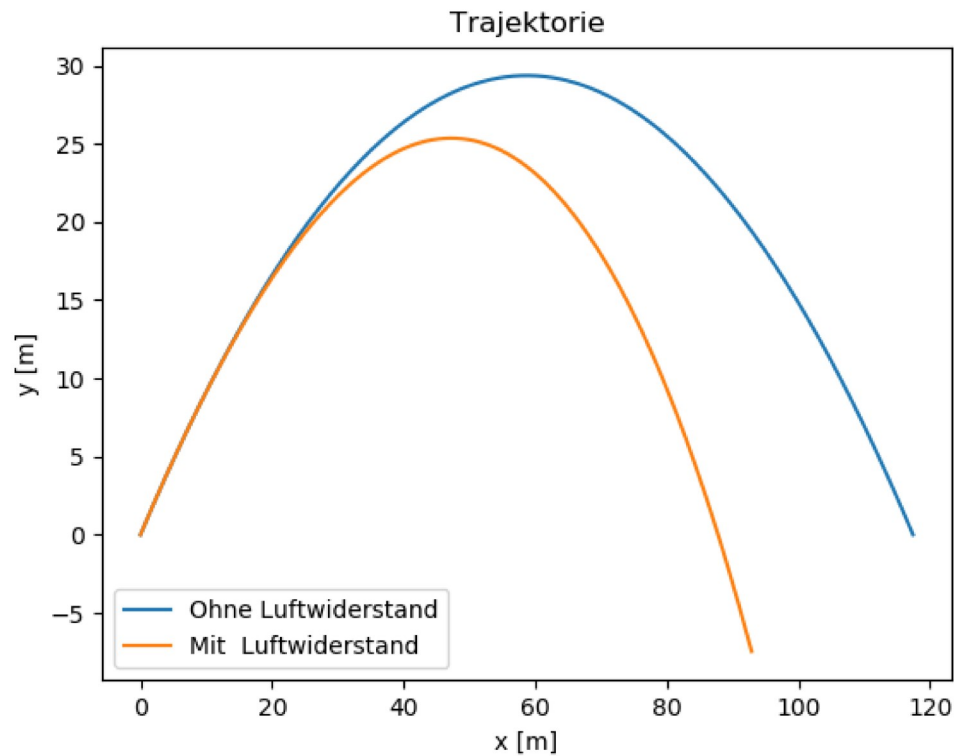
$$\frac{v_x^{j+1} - v_x^j}{\Delta t} = -\frac{\alpha}{m} v_x^j$$

$$\frac{y^{j+1} - y^j}{\Delta t} = v_y^j$$

$$\frac{v_y^{j+1} - v_y^j}{\Delta t} = -g - \frac{\alpha}{m} v_y^j$$

Projekt 1+

- Wurf mit Luftwiderstand



Projekt 1++

- Wurf mit Luftwiderstand: Bestimme Anfangsgeschwindigkeit so dass das Projektil das Auto trifft!

