Vorlesung 401-1652-10L : Numerische Mathematik I

Frühlingssemester 2014 : Prof. Ralf Hiptmair (SAM, D-MATH)

[Vorlesungsniederschrift, Rohformat, URL: http://www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/fs2014/math/nm]

IV. Numerische Lösung nichtlinearer Gleichungen

Gegeben: Funktion $F : D \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$

$\Updownarrow$

Kann bedeuten: Wir verfügen über eine Prozedur `function y=F(x)` zur Auswertung von F

Gesucht: Lösung der nichtlinearen Gleichung $F(\mathbf{x}) = 0$

$n = 1$: skalare Gleichung

5.1. Iterationsverfahren

Iterationsverfahren zur (approximativen) Lösung der nichtlinearen Gleichung $F(\mathbf{x}) = 0$ = Algorithmus, der eine Folge $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ von Näherungslösungen erzeugt.

- Iterierte $\mathbf{x}^{(k)}$ abhängig von F und (von einigen) $\mathbf{x}^{(n)}$, $n < k$, z.B.

$$\mathbf{x}^{(k)} = \underbrace{\mathbf{x}^{(k)}(F, \mathbf{x}^{(k-1)}, \dots, \mathbf{x}^{(k-m)})}_{\text{Iterationsvorschrift für } m\text{-Punkt-Verfahren}}$$

- $\mathbf{x}^{(0)}$ = Startwert (engl. *initial guess*)

Def. 5.1 (konvergentes Iterationsverfahren)
Ein Iterationsverfahren heisst **konvergent**, wenn für die von ihm erzeugte Folge $x^{(k)}$ der Iterierten gilt:

$$\lim_{k\to\infty} x^{(k)} \to x^\star \quad \text{und} \quad F(x^\star) = 0 \,.$$

Konvergenz hangt entscheidend von $x^{(0)}, \dots, x^{(m-1)}$ ab !

Definition 5.2 (Lokale und globale Konvergenz).
Ein Iterationsverfahren konvergiert lokal (engl. converges locally) gegen $\mathbf{x}^* \in \mathbb{R}^n$, falls eine Umgebung $U \subset D$ von $\mathbf{x}^*$ existiert, so dass

$$\mathbf{x}^{(0)} \in U \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}^{(k)} \text{ wohldefiniert} \quad \wedge \quad \lim_{k\to\infty} \mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{x}^*$$

für die erzeugten Iterationsfolgen $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ gilt.
Falls $U = D$, so heisst die Iteration global konvergent.

Entscheidend : Konvergenzgeschwindigkeit

Definition 5.3 (Lineare Konvergenz).
Eine Folge $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, in $\mathbb{R}^n$ konvergiert linear gegen $x^* \in \mathbb{K}^n$, falls

$$\exists L < 1: \quad \left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\right\| \le L \left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\| \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 \,.$$

Iterationsfehler (norm) fallt geometrisch

Definition 5.4 (Konvergenzordnung).
Eine **konvergente** *Folge* $\mathbf{x}^{(k)}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *in* $\mathbb{R}^n$ *konvergiert in* p*-ter Ordnung gegen* $\mathbf{x}^* \in \mathbb{K}^n$, *falls* $p > 1$ *und*

$$\exists C > 0: \quad \left\|\mathbf{x}^{(k+1)} - \mathbf{x}^*\right\| \le C \left\|\mathbf{x}^{(k)} - \mathbf{x}^*\right\|^p \quad \forall k \in \mathbb{N}_0 .$$

Bsp 5.5.: Wurzeliteration (Einpunktverfahren), $a > 0$, $x^{(0)} > 0$

$$x^{(k+1)} = \frac{1}{2}\left(x^{(k)} + \frac{a}{x^{(k)}}\right)$$

$$|x^{(k+1)} - \sqrt{a}| = \frac{1}{2x^{(k)}}|x^{(k)} - \sqrt{a}|^2 \le \frac{1}{2\sqrt{a}}|x^{(k)} - \sqrt{a}|^2 . \quad \triangleright \text{ quadr. Kvgz.}$$

Aus AMG-Ungleichung: $\sqrt{ab} \le \frac{1}{2}(a+b)$

$\Rightarrow \quad x^{(k+1)} \ge \sqrt{a} = \sqrt{x^{(k)} \frac{a}{x^{(k)}}}$

k	$x^{(k)}$	$e^{(k)} := x^{(k)} - \sqrt{2}$	$\log \frac{\lvert e^{(k)}\rvert}{\lvert e^{(k-1)}\rvert} : \log \frac{\lvert e^{(k-1)}\rvert}{\lvert e^{(k-2)}\rvert}$
0	2.00000000000000000	0.58578643762690485	
1	1.50000000000000000	0.08578643762690485	
2	1.41666666666666652	0.00245310429357137	1.850
3	1.41421568627450966	0.00000212390141452	1.984
4	1.41421356237468987	0.00000000000159472	2.000
5	1.41421356237309492	0.00000000000000022	0.630

Verdopplung der Anzahl der gültigen Stellen in jeder Iteration ! [Rundungsfehlereinfluss!]

Konvergenzordnung empirisch: $\varepsilon^{(k)} := \|x^{(k)} - x^*\|$

Annahme: $\varepsilon^{(k+1)} \approx C(\varepsilon^{(k)})^p$ ("Ordnung scharf")

$\log \varepsilon^{(k+1)} \approx \log C + p \cdot \log \varepsilon^{(k)}$ [Differenzbildung]

$\triangleright \quad \log \frac{\varepsilon^{(k+1)}}{\varepsilon^{(k)}} \approx p \log \frac{\varepsilon^{(k)}}{\varepsilon^{(k-1)}}$

Unbekannt

5.2. Fixpunkiterationen

= Einpunktverfahren:

Eine Fixpunktiteration ist definiert durch eine Iterationsfunktion $\Phi : \mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$.

Iterationsfunktion $\Phi : \mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}^n$
Startwert $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathrm{dom}(\Phi)$ $\Rightarrow$ Iterationsfolge $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$: $\mathbf{x}^{(k+1)} := \Phi(\mathbf{x}^{(k)})$.

Iterationsfolge nicht unbedingt wohldefiniert: $\mathbf{x}^{(k)} \notin \mathrm{dom}(\Phi)$ möglich !

$x^{(k)} \to x^* \wedge \Phi$ stetig $\Rightarrow x^* = \Phi(x^*)$
[Fixpunktgleichung]

Def. 5.6 (Konsistente Fixpunktiteration)
Eine Iterationsfunktion $\Phi : \mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ heisst **konsistent** mit $F(\mathbf{x}) = 0$ wenn

$$F(\mathbf{x}) = 0 \quad \text{und} \quad \mathbf{x} \in \mathrm{dom}(\Phi) \quad \Leftrightarrow \quad \Phi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} .$$

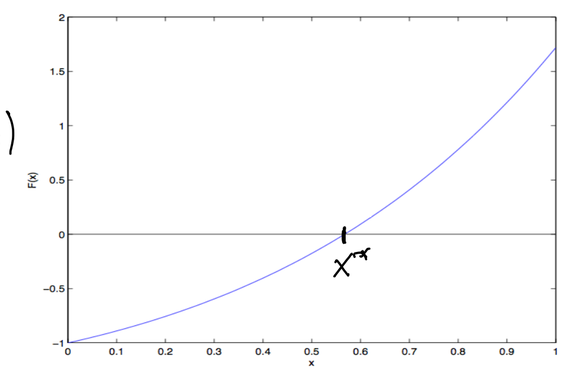
Zu $F(x) = 0$ gibt es in der Regel viele konsistente Iterationsfunktionen

Bsp 5.7: [$n = 1$]

$F(x) = xe^x - 1 , \quad x \in [0, 1]$.

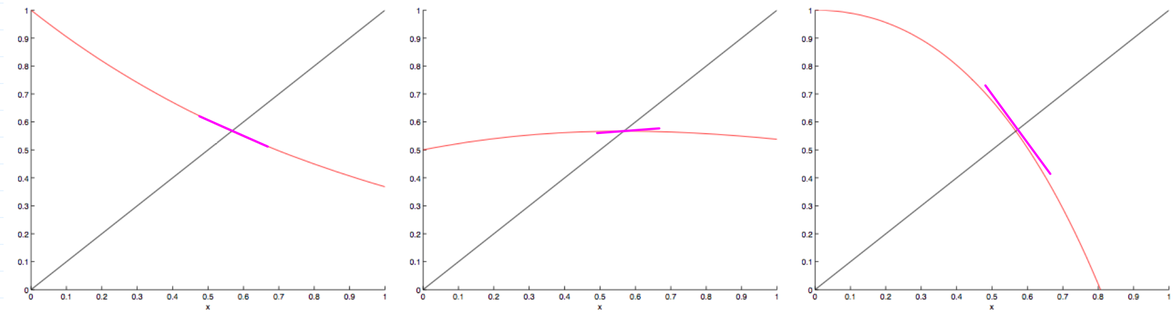
Verschiedene Fixpunktformen: (alle konsistent)

$$\Phi_1(x) = e^{-x} ,$$
$$\Phi_2(x) = \frac{1+x}{1+e^x} ,$$
$$\Phi_3(x) = x + 1 - xe^x .$$



k	ϕ_1: $\lvert x_1^{(k+1)} - x^*\rvert$	ϕ_2: $\lvert x_2^{(k+1)} - x^*\rvert$	ϕ_3: $\lvert x_3^{(k+1)} - x^*\rvert$
0	0.067143290409784	0.067143290409784	0.067143290409784
1	0.039387369302849	0.000832287212566	0.108496074240152
2	0.021904078517179	0.000000125374922	0.219330611898582
3	0.012559804468284	0.000000000000003	0.288178118764323
4	0.007078662470882	0.000000000000000	0.723649245792953
5	0.004028858567431	0.000000000000000	0.410183132337935
6	0.002280343429460	0.000000000000000	1.186907542305364
7	0.001294757160282	0.000000000000000	0.146569797006362
8	0.000733837662863	0.000000000000000	0.310516641279937
9	0.000416343852458	0.000000000000000	0.357777386500765
10	0.000236077474313	0.000000000000000	0.974565695952037
	Lineare Kvgz.	Quad. Kvgz.	Keine Kvgz.

Beobachtung: Lineare Konvergenz von $x_1^{(k)}$, quadratische Konvergenz von $x_2^{(k)}$, Keine Konvergenz (chaotisches Verhalten) von $x_3^{(k)}$), $x_i^{(0)} = 0.5$.



Funktion Φ_1 Funktion Φ_2 Funktion Φ_3

Satz 5.10 (Banachscher Fixpunktsatz)
Sei $E \subseteq \mathbb{R}^n$ abgeschlossen und $\Phi : \mathrm{dom}(\Phi) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ erfülle $\Phi(E) \subseteq E$. Ferner sei Φ eine **Kontraktion auf** E, d.h. es gibt ein $L < 1$, so dass

$$\|\Phi(\underline{x}) - \Phi(\underline{y})\| \le L\|\underline{x} - \underline{y}\|, \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in E, \qquad (*) \quad \to \text{Stetigkeit von } \phi$$

für eine Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$. Dann gelten die folgenden Aussagen.

1. Es existiert genau ein $\underline{x}^\star \in E$ mit $\Phi(\underline{x}^\star) = \underline{x}^\star$.
2. Für beliebiges $x^{(0)} \in E$ konvergiert
$$\underline{x}^{(k+1)} = \Phi(\underline{x}^{(k)}), \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad [\text{Fixpkt.-Iteration}]$$
linear gegen $\underline{x}^\star$.
3. Es gilt die a priori* Fehlerabschätzung
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^\star\| \le \frac{L^k}{1-L}\|\underline{x}^{(1)} - \underline{x}^{(0)}\| .$$
4. Es gilt die a posteriori* Fehlerabschätzung
$$\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^\star\| \le \frac{L}{1-L}\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^{(k-1)}\| .$$

* Information über Anzahl der nötigen Schritte vor Start der Iteration

* Information über Genauigkeit während der Rechnung.

Analyse der Kvgz. von Fixpunktiterationen $\underline{x}^{(k+1)} = \phi(\underline{x}^{(k)})$

NLGS : $F(\underline{x}) = 0$, $F : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Aus $(*)$ mit $\underline{y} = \underline{x}^*$: $\|\underbrace{\phi(\underline{x}^{(k)})}_{x^{(k+1)}} - \underline{x}^*\| \le L\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^*\|$

↳ Lineare Kvgz.

Zu 3.: $(*) \Rightarrow \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| \le L^k \|x^{(1)} - x^{(0)}\|$

$\Rightarrow \|x^{(k)} - x^*\| \le \sum_{j=k}^{\infty} \|x^{(j+1)} - x^{(j)}\| \le \|x^{(1)} - x^{(0)}\| \sum_{j=k}^{\infty} L^j$

Zu 4. aus 3. mit Startwert $x^{(k-1)}$

Korollar 5.11 (Hinreichende Bedingung für lokale Kontraktivität)
Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(\underline{x}^\star) = \underline{x}^\star$ für ein $\underline{x}^\star \in \mathbb{R}^n$, und Φ stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\underline{x}^\star$. Für eine mit einer Vektornorm $\|\cdot\|$ auf $\mathbb{R}^n$ verträgliche (submultiplikative) Matrixnorm gelte

$$\|\Phi'(\underline{x}^\star)\| < 1 .$$

Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass mit $E = B_\epsilon := \{\underline{x} \in \mathbb{R}^n : \|\underline{x} - \underline{x}^\star\| \le \epsilon\}$ die Voraussetzungen des Banachschen Fixpunktsatzes erfüllt sind.

Beweis: Φ stetig $\Rightarrow \exists$ Umgebung E von x^*: $\|\Phi'(x)\| \le L < 1 \quad \forall x \in E$

Mittelwertsatz: $\Phi(x) - \Phi(y) = \int_0^1 \Phi'(x+\tau(y-x))(y-x)\,d\tau$

$x, y \in E$

$\Rightarrow \|\Phi(x) - \Phi(y)\| \le \int_0^1 \underbrace{\|\Phi'(x+\tau(y-x))\|}_{\le L < 1} \|y-x\|\,dt$

$\square$

Satz 5.9 (Hinreichende Bedingung für lokal quadratische Konvergenz)
Sei $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\Phi(\underline{x}^\star) = \underline{x}^\star$ für ein $\underline{x}^\star \in \mathbb{R}^n$, Φ zweimal stetig differenzierbar in einer Umgebung von $\underline{x}^\star$ und $\Phi'(x^\star) = 0$.
Dann existiert ein $\epsilon > 0$, so dass die durch $\underline{x}^{(k+1)} := \Phi(\underline{x}^{(k)})$, $k \in \mathbb{N}_0$, definierte Folge in **zweiter Ordnung** gegen $\underline{x}^\star$ konvergiert, falls $\|\underline{x}^{(0)} - \underline{x}^\star\| \le \epsilon$ ($\|\cdot\|$ eine Vektornorm auf $\mathbb{R}^n$).

Beweis:

$\Phi'(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$, $\Phi''(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$

↳ stetige lineare Abb.

Mittelwertsatz:

$$\Phi(y) - \Phi(x) = \underbrace{\Phi'(x)}_{=0}(y-x) + \tfrac{1}{2}\int_0^1 \Phi''(x+t(y-x))(y-x, y-x)(1-t)^2\,dt$$

$$\triangleright \quad \|\Phi(y) - \Phi(x^*)\| \le \tfrac{1}{2}\int_0^1 \|\Phi''(x+t(y-x^*))\|\,\|y-x^*\|^2 (1-t)^2\,dt$$

$$\overset{*}{\le} C\,\|y-x^*\|^2 \quad \text{mit } C > 0$$

Mit $y := x^{(k)} \to$ Beh. $\square$

$*$ $\|\Phi''(x)\| = \sup_{w, v \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\Phi''(x)(v,w)\|}{\|v\|\,\|w\|}$

$\Rightarrow \|\Phi''(x)(v,w)\| \le \|\Phi''(x)\|\,\|v\|\,\|w\|$

5.5. Das Newton-Verfahren

5.5.1. Die Newton-Iteration

Idee: Sukzessive lineare Approximation von F

Gegeben $x^{(k)}$: $x^{(k+1)} \overset{!}{=}$ N.S. von $\tilde{F}(x) = F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x - x^{(k)})$

Newton-Iteration (Fixpunktiteration)

$$\boxed{x^{(k+1)} = x^{(k)} - \underbrace{F'(x^{(k)})^{-1} F(x^{(k)})}_{\text{Newton-Korrektur}}}$$

Annahme: $F'(x^{(k)})$ regulär

MATLAB-Shell für Newton-Verfahren:

Löse lineares Gleichungssystem:

A\b = $A^{-1}b$ → ~~Abschn. 3.2~~

F, DF: Funktionshandles

MATLAB-CODE: Newtonverfahren

```
function x = newton(x,F,DF,tol)
% MATLAB template for Newton method
for i=1:MAXIT
  s = DF(x)\F(x);
x = x-s;
  if (norm(s) < tol), return; end;
end
```

Abbruchkriterium (affin-invariant!)

Bem.: Affin-Invarianz des Newton-Verfahren

→ Falls $x^{(0)}$ gleich $\Rightarrow$ Newton-Folgen gleich für $AF(x) = 0$ für jedes $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär

$\hat{F}(x) := AF(x) \Rightarrow \hat{F}'(x) = AF'(x)$

$\Rightarrow \hat{F}'(x)^{-1}\hat{F}(x) = F'(x)^{-1}F(x)$

5.5.2. Konvergenztheorie

N.-V. = Fixpunktiteration mit $\phi(x) = x - F'(x)^{-1}F(x)$

[$F'(x^*)$ regulär $\Leftrightarrow$] $\phi(x^*) = x^* \Leftrightarrow F(x^*) = 0$: Konsistenz!

Annahme : $F \in C^3$ in einer Umgebung von x^* mit $F(x^*) = 0$

$F'(x)$ regulär "

$$\phi'(x)\cdot = \cancel{I}\cdot - [G'(x)\cdot]F(x) - \overbrace{G(x)\cancel{F'(x)}\cdot}^{= I\cdot}$$

[$G(x) := (F'(x))^{-1}$; $G : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n\times n}$]

$\Rightarrow \phi(x) = x - \underbrace{G(x)F(x)} = x - \beta(G(x), F(x))$

bilineare Abbildung $\mathbb{R}^{n\times n} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

Anwendung der Produktregel :

$(\beta(G(x), F(x)))'\cdot = \beta(G'(x)\cdot, F(x)) + \beta(G(x), F'(x)\cdot)$

Satz 5.20 (Konvergenzsatz für das Newton-Verfahren)

(A) $D \subset \mathbb{R}^n$ offen und konvex,

(B) $F : D \mapsto \mathbb{R}^n$ stetig differenzierbar,

(C) Jacobi-Matrix $F'(\underline{x})$ regulär $\forall \underline{x} \in D$,

(D) $\exists L \geq 0$: $\left\|F'(\underline{x})^{-1}(F'(\underline{y}) - F'(\underline{x}))\right\|_2 \leq L\,\|\underline{y} - \underline{x}\|_2 \quad \forall \underline{x}, \underline{y} \in D$, ▷ Affin-invariante Lipschitz-Bedingung

(E) $\exists \underline{x}^\star \in D$: $F(\underline{x}^\star) = 0$ (Existenz einer Lösung in D)

(F) Startwert $\underline{x}^{(0)} \in D$ erfüllt

$$\rho := \left\|\underline{x}^\star - \underline{x}^{(0)}\right\|_2 < \frac{2}{L} \quad \wedge \quad B_\rho(\underline{x}^\star) \subset D$$

→ lokale Kvgz.

▶ Die Newton-Iteration $\underline{x}^{(k+1)} := \underline{x}^{(k)} - F'(\underline{x}^{(k)})^{-1}F(\underline{x}^{(k)})$ erfüllt

(i) $\underline{x}^{(k)} \in B_\rho(\underline{x}^\star) := \{\underline{y} \in \mathbb{R}^n, \|\underline{y} - \underline{x}^\star\| < \rho\}$ for all $k \in \mathbb{N}$,

(ii) $\lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)} = \underline{x}^\star$,

(iii) $\left\|\underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^\star\right\|_2 \leq \frac{L}{2}\left\|\underline{x}^{(k)} - \underline{x}^\star\right\|_2^2$ (Quadratische Konvergenz)

$\phi(x^*) = x^* \Leftrightarrow F(x^*) = 0 \Rightarrow \phi'(x^*) = 0$

Satz 5.9 $\Rightarrow$ Lokal quadratische Kvgz.

↓

∇

!

Quantitative Aussage :

Beweis :

$$\underbrace{x^{(k+1)} - x^*} = x^{(k)} - F'(x^{(k)})^{-1}F(x^{(k)}) - x^*$$

$$= \underbrace{x^{(k)} - x^*} - F'(x^{(k)})^{-1}(F(x^{(k)}) - F(x^*))$$

$$= F'(x^{(k)})^{-1}(F(x^*) - F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x^{(k)} - x^*))$$

Mittelwertsatz :

$$\|F'(x^{(k)})^{-1}(F(x^*) - F(x^{(k)}) + F'(x^{(k)})(x^{(k)} - x^*))\| =$$

$$= \left\| \int_0^1 F'(x^{(k)})^{-1}\big(F'(\underbrace{x^{(k)} + t(x^* - x^{(k)})}_{\hat{=}\, y \text{ in } (D)}) + F'(x^{(k)})\big)(x^{(k)} - x^*)\,dt \right\|$$

$$\overset{(D)}{\leq} L \int_0^1 t\,\|x^{(k)} - x^*\|\,\|x^{(k)} - x^*\|\,dt \to (iii)$$

□

Abbruchkriterien für Newton-Iteration: Praxis

Einfach: $\underbrace{\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\|}_{} \leq tol \, \|x^{(k)}\|$

↳ relative Toleranz

Heuristik: $\approx \|x^{*} - x^{(k)}\|$

(im Fall quadratischer Kvgz.)

Hier: Ein überflüssiger Schritt (→ teuer für $n \gg 1$)

Praxis: STOP, wenn $\|F'(x^{(k-1)})^{-1} F(x^{(k)})\| \leq tol \, \|x^{(k)}\|$

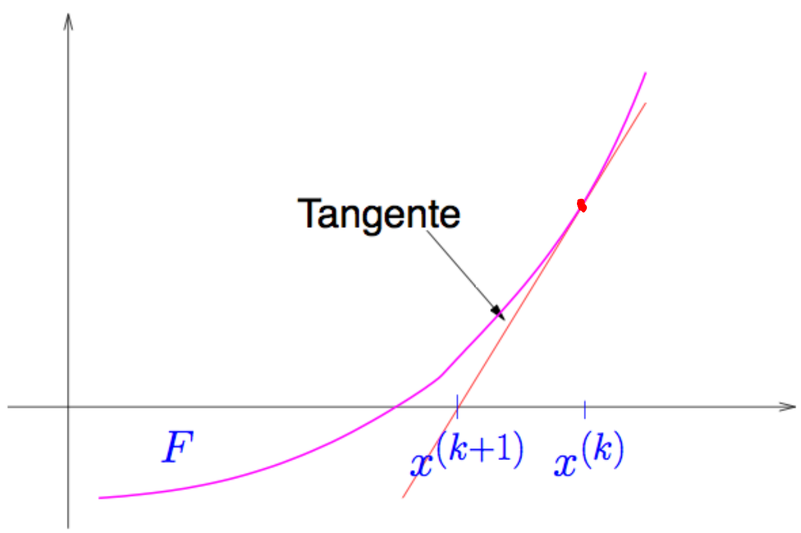
↑ Vereinfachte Newton-Korrektur

```
function x = newtontc(x,F,DF,reltol,abstol)
% MATLAB template for Newton method with affine invariant termination
% based on (affine invariant) simplified Newton correction
% x supplies the initial guess, F and DF are function handles of type @(x)
% to the function F and its Jacobian, reltol/abstol are the absolute and
% relative tolerances to be met by the final approximation solution, which
% is returned in x.
f = F(x);
while (true)
  % Save computational effort by precomputing LU-decomposition of Jacobian
  J = DF(x); [L,U] = lu(J);
  % Compute Newton correction and new iterate
  s = U\(L\f); x = x - s;
  f_old = f; f = F(x);
  % simplified Newton correction
  st = U\(L\f); stn = norm(st);
  if ((stn < abstol) || (stn < reltol*norm(x))), return; end
end
```

↳ Abbruchkriterium

5.5.3 Das gedämpfte Newton-Verfahren

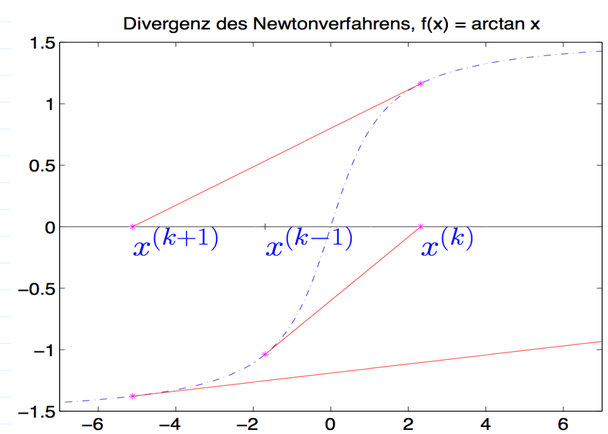
Newton-Verfahren 1D:



Bsp 5.21: Lokale Konvergenz des Newton-Verfahren

Für $a > 0$:

$f(x) = \arctan(ax)$, $x \in \mathbb{R}$



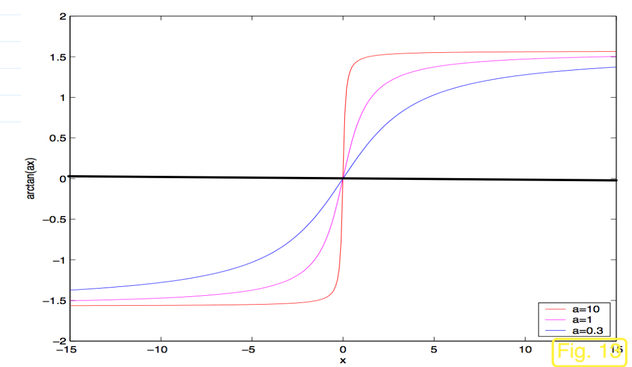
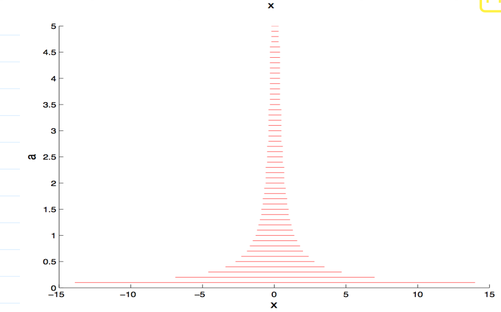


Fig. 18

$a \gg 1 \Rightarrow$ Sehr kleiner Bereich lokaler Konvergenz



roter Bereich = $\{x^{(0)} \in \mathbb{R}, x^{(k)} \to 0\}$

Beispiel 5.21: Problem ist „Überschiessen" der Newton-Korrektur

Idee: Dämpfung der Korrektur:

Mit $\lambda^{(k)} > 0$: $\underline{x}^{(k+1)} := \underline{x}^{(k)} - \lambda^{(k)} F'(\underline{x}^{(k)})^{-1} F(\underline{x}^{(k)})$.

Terminologie: $\lambda^{(k)}$ = Dämpfungsfaktor , $0 < \lambda^{(k)} \leq 1$

Heuristik:

Wahl des Dämpfungsfaktors: Affininvarianter natürlicher Monotonietest

„grösstmögliches" $\lambda^{(k)} > 0$: $\left\| \underline{t}(\lambda^{(k)}) \right\| \leq (1 - \frac{\lambda^{(k)}}{2}) \, \|\underline{s}\|$

mit $\underline{s} := F'(\underline{x}^{(k)})^{-1} F(\underline{x}^{(k)})$ → aktuelle Newton-Korrektur ,

$\underline{t}(\lambda^{(k)}) := F'(\underline{x}^{(k)})^{-1} F(\underbrace{\underline{x}^{(k)} + \lambda^{(k)} \underline{s}})$ → versuchsweise vereinfachte Newton-Korrektur .

Heuristik: Konvergenz ⇔ Abnahme der „Länge" der Newton-Korrektur

versuchsweise neue Iterierte

Bsp: $f(x) = \arctan(ax)$, $a = 1$

$F(x) = \arctan(x)$,

- $x^{(0)} = 20$
- $q = \frac{1}{2}$
- LMIN = 0.001

Beobachtung: asymptotische quadratische Konvergenz

k	$\lambda^{(k)}$	$x^{(k)}$	$F(x^{(k)})$
1	0.03125	0.94199967624205	0.75554074974604
2	0.06250	0.85287592931991	0.70616132170387
3	0.12500	0.70039827977515	0.61099321623952
4	0.25000	0.47271811131169	0.44158487422833
5	0.50000	0.20258686348037	0.19988168667351
6	1.00000	-0.00549825489514	-0.00549819949059
7	1.00000	0.00000011081045	0.00000011081045
8	1.00000	-0.00000000000001	-0.00000000000001

```
function [x, res] = dampnewton(x,F,DF,abstol,reltol)
% Damped Newton method for non-linear system of equations
% x passes the initial guess, F and DF handles of type @(x) to the function
% F and its Jacobian, abstol and reltol specify absolute and relative
% tolerances for termination. Returns convergence history beside
% approximate solution.
LMIN = 1e-3; % minimal damping factor
% Compute first Newton correction
[L,U] = lu(DF(x)); s = U\(L\F(x));
% first update, initially no damping
xn = x-s; lambda = 1;
% first simplified Newton correction
f = F(xn); st = U\(L\f); stn = norm(st);
res = stn; % matrix for recording convergence history
while ((stn > reltol*norm(xn)) && (stn > abstol))
  % natural monotonicity test
  while (norm(st) > (1-lambda/2)*norm(s))
    % if not passed reduce damping factor by a factor of 2
    lambda = lambda/2;
    % If damping becomes too strong, bail out
    if (lambda < LMIN), warning('No convergence'); return; end
    % New tentative iterate and associated simplified Newton correction
    xn = x-lambda*s; f = F(xn);
    st = U\(L\f);
  end
  % Step accepted, update approximate solution
  x = xn; [L,U] = lu(DF(x)); s = U\(L\f);
  % Boldly increase damping factor
  lambda = min(2*lambda,1);
  % Compute next tentative iterate and associated simplified Newton
  % correction
  xn = x-lambda*s; f = F(xn); st = U\(L\f);
  stn = norm(st);
  res = [res; stn]; % record norms of simplified Newton corrections
end
x = xn;
```

$\lambda^{(0)} = 1$: Optimismus

← Monotoniekot

Zurückweisen

Akzeptieren

* Neue Näherung

Pessimistisch