2.3. Matrixprodukt

Geschachtelte Linearkombinationen $\longleftrightarrow$ Matrix $\times$ Linearkombination

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{m} c_j\, \underline{a}^j \quad \text{wobei} \quad \underline{a}^j = \sum_{l=1}^{k} s_{l,j}\, \underline{b}^l \;,\quad \underline{b}^l \in \mathbb{R}^n,\; c_j, s_{l,i} \in \mathbb{R}$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{\underline{v} = \underline{A}\,\underline{c} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = [\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m]}_{\underline{v} \text{ ist auch eine Linearkombination der } \underline{b}^l,\ l=1,\dots,k}$$

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{k} s_{l,j}\, \underline{b}^l \right) c_j = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{1,l}\, s_{l,j} \right) c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{l=1}^{k} b_{n,l}\, s_{l,j} \right) c_j \end{pmatrix}, \quad \underline{b}^j = \begin{pmatrix} b_{1,j} \\ \\ b_{n,j} \end{pmatrix}$$

Vergleiche mit $\underline{A}\,\underline{c} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} a_{i,j} c_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} a_{n,j} c_j \end{pmatrix}, \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$

$\triangleright \quad \underline{v} = \underline{A}\,\underline{c}$ mit $\underline{A} = \begin{pmatrix} \sum_{\ell=1}^{k} b_{1,\ell} s_{\ell,1} & \cdots & \sum_{\ell=1}^{k} b_{1,\ell} s_{\ell,m} \\ \vdots & & \vdots \\ \sum_{\ell=1}^{k} b_{n,\ell} s_{\ell,1} & \cdots & \sum_{\ell=1}^{k} b_{n,\ell} s_{\ell,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m}$

(2.3.A) $\quad \Longleftrightarrow \quad a_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{k} b_{i,\ell} s_{\ell,j}, \quad \begin{matrix} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq m \end{matrix}$

Notation: Matrixprodukt $\quad \underline{A} = \underline{B}\,\underline{S}$

mit $\underline{B} = [\underline{b}^1, \ldots, \underline{b}^k] \in \mathbb{R}^{n,k}, \quad \underline{S} = \begin{pmatrix} s_{1,1} & \cdots & s_{1,m} \\ s_{k,1} & & s_{k,m} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{k,m}$

$$\underbrace{\begin{array}{cc} i \rightarrow & \begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,m} \\ & a_{i,j} & \\ a_{n,1} & & a_{n,m} \end{pmatrix} \\ & \begin{array}{c} \uparrow \\ j \end{array} \end{array}}_{\in \mathbb{R}^{n,m}} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_{1,1} & & b_{1,K} \\ b_{i,1} & & b_{i,K} \\ b_{n,1} & & b_{n,K} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{n,K}} \underbrace{\begin{pmatrix} S_{1,1} & S_{1,j} & S_{1,m} \\ & & \\ S_{K,1} & S_{K,j} & S_{K,m} \end{pmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{K,m}}$$

$$n \text{ Zeilen} \updownarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \quad A \quad \end{pmatrix}}_{m \text{ Spalten}} = \begin{array}{c} n \\ \text{Zeilen} \end{array} \updownarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \quad B \quad \end{pmatrix}}_{K \text{ Spalten}} \underbrace{\begin{pmatrix} \qquad S \qquad \end{pmatrix}}_{m \text{ Spalten}} \updownarrow \begin{array}{c} K \\ \text{Zeilen} \end{array}$$

Mogliche Matrixprodukte :

(i) :

$n = m = k$:

$$\begin{pmatrix} \quad A \quad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad B \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad S \quad \end{pmatrix}$$

quadratische Matrizen

(ii) : $m < n \ll k$:

$$\begin{pmatrix} A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \quad B \quad \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \quad S \quad \end{pmatrix}$$

(iii) $n < k < m$:

$$\begin{pmatrix} & A & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} B \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & S & \end{pmatrix}$$

(iv) $n = m = 1$, $k > 1$:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \ \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Zahl} \\ \underline{A} \in \mathbb{R}^{1,1} = \mathbb{R}}} = \underbrace{\begin{pmatrix} & & \end{pmatrix}}_{\substack{\text{Zeilen vektor} \\ \underline{B} \in \mathbb{R}^{1,k}}} \underbrace{\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}}_{\text{Spaltenvektor } \underline{S} \in \mathbb{R}^{k,1} = \mathbb{R}^k}$$

(Spalten)Vektoren $\in \mathbb{R}^k$ sind spezielle Matrizen

▷ Matrix × Vektor = spezielle Matrixmultiplikation

$$\underline{A}\,\underline{c} = \underline{A}\,\underline{C} \qquad , \underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$$

Spaltenvektor $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}$ m×1-Matrix $\underline{C} = \begin{pmatrix} c_{1(,1)} \\ \\ c_{m(,1)} \end{pmatrix}$

Nützliche Rechenregel:

$$\underline{A}\,[\underline{s}^1, \ldots, \underline{s}^k] = [\underline{A}\underline{s}^1, \ldots, \underline{A}\underline{s}^k] \qquad (2.3.B)$$

Satz 2.3.C: Matrixmultiplikation ist assoziativ

$$(\underline{A}\,\underline{B})\,\underline{C} = \underline{A}\,(\underline{B}\,\underline{C}) \quad \text{für alle } \underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{m,k}, \underline{C} \in \mathbb{R}^{k,\ell}$$

Spezialfall: Multiplikation mit Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & A & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & d_1 a_{1,2} & \cdots & d_1 a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_n a_{n,1} & d_n a_{n,2} & \cdots & d_n a_{n,m} \end{pmatrix}}_{i.\text{ Zeile von } \underline{A} \text{ multipliziert mit } d_i}$$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_m \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} d_1 a_{1,1} & d_2 a_{1,2} & \cdots & d_m a_{1,m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_1 a_{n,1} & d_2 a_{n,2} & \cdots & d_m a_{n,m} \end{pmatrix}}_{j.\text{ Spalte von } \underline{A} \text{ multipliziert mit } d_j}$$

▷ Spezielle Matrix: Einheitsmatrix

$$\underline{I} := \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matrixprodukt und Transponieren:

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{m,k}$:

$$\boxed{(\underline{A}\underline{B})^T = \underline{B}^T \underline{A}^T}$$

Bemerkung: Euklidisches Skalarprodukt durch Matrixmultiplikation

$\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^n$: $\langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \underline{v}^T * \underline{w}$

Spaltenvektor, interpretiert als $n \times 1$-Matrix,
dann transponiert ($\to$ $1 \times n$-Matrix)

! Matrixprodukt ist nicht kommutativ !

(i) $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{m,k}$: $\underline{A} \cdot \underline{B}$ ✓ aber $\cancel{\underline{B}\underline{A}}$ nicht möglich, wenn $k \neq n$

(ii) Selbst wenn $\underline{A}, \underline{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ (quadratische Matrizen)

In der Regel : $\boxed{\underline{A}\,\underline{B} \neq \underline{B}\,\underline{A}}$

Bsp :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 & 34 \\ 31 & 46 \end{pmatrix}$$

Matrixprodukt ist verträglich mit Vektorraumoperationen*:

* im Matrizenraum

Distributiv: Für alle $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\underline{C} \in \mathbb{R}^{m,k}$

$$\boxed{\underline{A}(\underline{B}+\underline{C}) = \underline{A}\,\underline{B} + \underline{A}\,\underline{C}}$$

Für alle $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $B \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{C} \in \mathbb{R}^{m,k}$

$$\boxed{(\underline{A}+\underline{B})\,\underline{C} = \underline{A}\,\underline{C} + \underline{B}\,\underline{C}}$$

Assoziativ: Für alle $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\boxed{(\alpha \underline{A})\,\underline{B} = \alpha(\underline{A}\,\underline{B}) = \underline{A}(\alpha \underline{B})}$$