4.2. Matrixdarstellung linearer Abbildungen

Vektorräume $(V,+,\cdot)$, $m := \dim V$, Basis $B_V := \{\underline{b}^1, \ldots, \underline{b}^m\}$

$(W,+,\cdot)$, $n := \dim W$, Basis $B_W := \{\underline{q}^1, \ldots, \underline{q}^n\}$

Erinnerung (Abschnitt 2.1): Koordinatenabbildungen

$$I_{B_V} : \begin{cases} V & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^m \\ \underline{v} & \longrightarrow \quad \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} : \sum_{j=1}^{m} c_j \underline{b}^j = \underline{v} \end{cases}$$

$$I_{B_W} : \begin{cases} W & \longrightarrow \quad \mathbb{R}^n \\ \underline{w} & \longrightarrow \quad \underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} : \sum_{j=1}^{n} d_j \underline{q}^j = \underline{w} \end{cases}$$

(Koordinaten/Koeffizienten c_j/d_j eindeutig wegen Basiseigenschaft)

Umkehrungen der Koordinatenabbildungen :

$$I_{\mathcal{B}_V}^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^m & \longrightarrow & V \\ \underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} & \longrightarrow & \underline{v} := \sum_{j=1}^{m} c_j \underline{b}^j \end{cases}$$

$$I_{\mathcal{B}_W}^{-1} : \begin{cases} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & W \\ \underline{d} = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} & \longrightarrow & \underline{w} := \sum_{j=1}^{n} d_j \underline{q}^j \end{cases}$$

Sei $L : V \longrightarrow W$ lineare Abbildung

Wende sie an auf die Basisdarstellung von $\underline{v} \in V$:

$$L(\underline{v}) = L\Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{m} c_j \underline{b}^j}_{\text{Basisdarstellung, } \underline{c} := \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix} = I_{\mathcal{B}_V}(\underline{v})}\Big) = \sum_{j=1}^{m} c_j \, L(\underline{b}^j) \qquad (4.2.A)$$

Satz 4.2.B.: Eine lineare Abbildung $L : V \to W$ ist eindeutig durch ihre Wirkung auf die Vektoren einer Basis von V definiert.

Koordinatendarstellungen : $$L(\underline{b}^j) = \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\, q^\ell \qquad (4.2.C)$$

$\uparrow$ eindeutige Koeffizienten

(4.2.B) & (4.2.C) : $\left[\underline{v} = \sum_{j=1}^{m} c_j \underline{b}^j\right]$

$$L(\underline{v}) = \sum_{j=1}^{m} c_j L(\underline{b}^j) \overset{(4.2.C)}{=} \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell j}\, q^\ell = \sum_{\ell=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_j a_{\ell j} \right) q^\ell$$

$$\Leftrightarrow \quad \boxed{I_{\mathcal{B}_W} L(\underline{v}) = \underline{A}\, I_{\mathcal{B}_V}(\underline{v}) \ , \quad \underline{A} = (a_{\ell j}) \in \mathbb{R}^{n,m}}$$

Graphisch:

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
V \arrow[r, "\text{Lineare Abbil-}", "\text{dung } L"'] \arrow[d, "I_{\mathcal{B}_V}"'] & W \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "\text{Multiplikation}", "\text{mit Matrix } \underline{A}"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "I_{\mathcal{B}_W}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

"Auf der Koordinatenseite lässt sich jede lineare Abbildung durch die Multiplikation mit einer Matrix beschreiben"

$\rightarrow$ $\boxed{\text{Matrizen} \mathrel{\hat{=}} \text{Koordinatendarstellung für lineare Abbildungen}}$

$\Rightarrow$ Koordinatenabbildung: $I_{\mathcal{B}_V}^{\mathcal{B}_W} : \begin{cases} \mathcal{L}(V,W) \longrightarrow \mathbb{R}^{n,m} \\ L \longrightarrow \underline{A} \text{ gemäss } (4.2.C) \end{cases}$

Merkregel:

$$A = \begin{pmatrix} \quad & \boxed{} & \quad \end{pmatrix} \quad : \quad \text{Die } j.\text{ Spalte enthält die Koordinaten von } L(\underline{b}^j)$$

$$\begin{array}{c} \uparrow \\ j.\ \text{Spalte} \end{array}$$

Bsp: Differentiation im Polynomraum $\mathbb{P}_d$, $d \in \mathbb{N}_0$

$$L : \begin{cases} \mathbb{P}_d \longrightarrow \mathbb{P}_{d-1} \\ p \longrightarrow p' \end{cases} \quad (\text{Ableitung von } p(x) \text{ nach } x)$$

$$m := \dim \mathbb{P}_d = d+1 \quad , \quad n := \dim \mathbb{P}_{d-1} = d$$

Basen:

$$\mathcal{B}_d := \{1, x, x^2, \dots, x^d\} \text{ von } \mathbb{P}_d \quad (x \mapsto x^j \hat{=} \underline{b}^{j+1})$$

$$\mathcal{B}_{d-1} := \{1, x, x^2, \quad , x^{d-1}\} \text{ von } \mathbb{P}_{d-1} \quad (x \to x^j \hat{=} q^{j+1})$$

Wirkung von T auf Basisvektoren:

$$L(x^{j-1}) = \frac{d}{dx}(x^{j-1}) = \begin{cases} (j-1)\, x^{j-2}, & \text{für } j = 2, \dots, d-1 \\ 0, & \text{für } j = 1 \end{cases} \in \mathbb{P}_{d-1}$$

Basisdarstellung (4.2.C) :

$$L(x^{j-1}) = \sum_{l=1}^{d} a_{lj}\, x^{l-1}$$

mit $a_{lj} = \begin{cases} j-1 & \text{für } l = j-1 \\ 0, & \text{für } l \neq j-1 \end{cases}$

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & 0 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & d \end{pmatrix}}_{d+1} \in \mathbb{R}^{d,d+1}$$

[Vorlesung 19.11.]

Matrixdarstellung und spezielle Unterräume:

Satz 4.2.D: Für eine lineare Abbildung $L \in \mathcal{L}(V,W)$ mit Matrixdarstellung $\underline{A} := I_{B_V}^{B_W}(L) \in \mathbb{R}^{n,m}$ gilt:

$$I_{B_W}(\mathrm{Bild}(L)) = \mathrm{Bild}(\underline{A}) \subset \mathbb{R}^n$$
$$I_{B_V}(\mathrm{Kern}(L)) = \mathrm{Kern}(\underline{A}) \subset \mathbb{R}^m$$

▷ $\dim(\mathrm{Bild}(L)) = \dim \mathrm{Bild}(\underline{A}) = \mathrm{Rang}(\underline{A}) \triangleq$ Rang von L

▷ [Aus Satz 3.7.F]: $\dim \mathrm{Kern}(L) = \dim V - \dim \mathrm{Bild}(L)$ (4.2.E)

▷ [Aus Satz 3.7.G]:

$\dim V = \dim W$ und $\mathrm{Kern}(L) = \{0\} \Rightarrow L$ ein-eindeutig (umkehrbar)

Matrixdarstellung und Komposition von linearen Abbildungen:

Satz 4.2 E: Seien U, V, W Vektorräume der Dimensionen $\ell, m, n \in \mathbb{N}$ mit Basen $\mathcal{B}_U, \mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$.

Sei $L \in \mathcal{L}(V, W)$ mit Matrixdarstellung $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ bzgl. $\mathcal{B}_V, \mathcal{B}_W$

Sei $S \in \mathcal{L}(W, U)$ mit Matrixdarstellung $\underline{B} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$ bzgl. $\mathcal{B}_W, \mathcal{B}_U$

Dann hat $S \circ L \in \mathcal{L}(V, U)$ die Matrixdarstellung $\underline{B}\,\underline{A} \in \mathbb{R}^{\ell,m}$ bzgl. $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_U$

(vgl. "geschachtelte Linearkombinationen" aus Abschnitt 2.3)

Satz 4.2 E: Matrixprodukt $\hat{=}$ Hintereinanderausführung linearer Abbildungen in Koordinatendarstellung

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge, row sep=huge]
V \arrow[r, "\text{Lineare Abbildung } L"] \arrow[d, "I_{\mathcal{B}_V}"'] \arrow[rr, bend left, "\text{Abbildung } S \circ L"] & W \arrow[r, "\text{Lineare Abbildung}", "S"'] & \mathcal{U} \\
\mathbb{R}^m \arrow[r, "\text{Multiplikation}", "\text{mit Matrix } A"'] \arrow[rr, bend right, "\text{Multiplikation mit Matrix } BA"'] & \mathbb{R}^n \arrow[u, "I_{\mathcal{B}_W}^{-1}"'] \arrow[r, "\text{Multiplikation}", "\text{mit Matrix } B"'] & \mathbb{R}^l \arrow[u, "I_{\mathcal{B}_\mathcal{U}}^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Vektorraum-
seite

Koordinaten-
seite

4.3. Matrixdarstellung bei Basiswechsel

Lineare Abbildung : $L \in \mathcal{L}(V, W)$ $\rightarrow$ Matrix $\underline{A}$ bzgl. $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$

• Basiswechsel für V :

"Alte Basis" $\mathcal{B}_V = \{\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m\}$ $\longrightarrow$ "Neue Basis" $\tilde{\mathcal{B}}_V := \{\tilde{\underline{b}}^1, \dots, \tilde{\underline{b}}^m\}$

mit $$\tilde{\underline{b}}^k = \sum_{j=1}^{m} s_{j,k} \underline{b}^j \quad , \quad s_{j,k} \in \mathbb{R} \qquad (4.3.A)$$

$$\triangleright \quad L(\tilde{\underline{b}}^k) \overset{(4.3.A)}{=} \sum_{j=1}^{m} s_{j,k} L(\underline{b}^j) \overset{(4.2.C)}{=} \sum_{j=1}^{m} s_{j,k} \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,j} \underline{q}_\ell \right)$$

$$= \sum_{\ell=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m} a_{\ell,j} s_{j,k} \right)} \underline{q}_\ell := \sum_{\ell=1}^{n} \tilde{a}_{\ell,k} \underline{q}^\ell$$

$\triangleright$ Matrixdarstellung von L bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_V$ und $\mathcal{B}_W$: Mit $\underline{S} := (s_{j,k}) \in \mathbb{R}^{m,m}$

$$\boxed{\underset{\sim}{\tilde{A}} = \underset{\sim}{A}\,\underset{\sim}{S}} \qquad (4.3.B)$$

[Erinnerung an Abschnitt 2.6: $\underset{\sim}{S}$ ist die Matrix mit der ein Koordinatenvektor bzgl. der "neuen Basis" multipliziert werden muss, um einen Koordinatenvektor bzgl. der "alten Basis" zu erhalten.]

- Basiswechsel in W

"Alte Basis" $\mathcal{B}_W = \{q^1, \ldots, q^n\}$ $\longrightarrow$ "Neue Basis" $\tilde{\mathcal{B}}_W = \{\tilde{q}^1, \ldots, \tilde{q}^n\}$

$$q^\ell = \sum_{i=1}^{n} r_{i,\ell}\, \tilde{q}^i \qquad (4.3.C)$$

▷ Multiplikation mit $\underset{\sim}{R} = (r_{i,\ell}) \in \mathbb{R}^{n,n}$ rechnet Koordinaten bzgl. der "alten Basis" $\mathcal{B}_W$ in solche bzgl. der "neuen Basis" $\tilde{\mathcal{B}}_W$ um.

▷ $$L(\underline{b}^j) \overset{(4.2.c)}{=} \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,j}\, q^\ell \overset{(4.3.C)}{=} \sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell,j} \left(\sum_{i=1}^{n} r_{i,\ell}\, \tilde{q}^i \right)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n} r_{i,\ell}\, a_{\ell,j} \right)}\tilde{q}^{i} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{a}_{i,j}\, \tilde{q}^{i}$$

▷ Matrixdarstellung von L bzgl. $\mathcal{B}_V$ und $\tilde{\mathcal{B}}_W$:

$$\boxed{\underline{\tilde{A}} = \underline{R}\,\underline{A}} \qquad (4.3.D)$$

Zusammenfassung:

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$: Matrixdarstellung von L bzgl. $\mathcal{B}_V$ und $\mathcal{B}_W$

$\underline{S} \in \mathbb{R}^{m,m} \leftrightarrow$ Basiswechsel $\tilde{\mathcal{B}}_V \rightarrow \mathcal{B}_V$ in V

$\underline{R} \in \mathbb{R}^{n,n} \leftrightarrow$ Basiswechsel $\mathcal{B}_W \rightarrow \tilde{\mathcal{B}}_W$ in W

vgl. Abschnitt 2.6

$\underline{\tilde{A}} \in \mathbb{R}^{n,m}$: Matrixdarstellung von L bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_V$ und $\tilde{\mathcal{B}}_W$

$$\boxed{\tilde{A} = R\,A\,S}$$

(4.3.E)

Wandelt Koordinaten bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_W$ in Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}_W$.

Wirkt auf Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}_V$, liefert Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}_W$

Wandelt Koordinaten bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_V$ in Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}_V$

wirkt auf Koordinaten bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_V$, liefert Koordinaten bzgl. $\tilde{\mathcal{B}}_W$

Es gilt: (i) Die Basiswechselmatrizen sind invertierbar

(ii) $\operatorname{Rang}(\tilde{A}) = \operatorname{Rang}(A)$