3.4. Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

LGS : $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$

Zeilenstufenform (Def. 3.3.C)

Gausselimination: $\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{Z}}\,\underline{x} = \underline{y}$

Sukzessive Zeilenumformungen (Def. 3.3.A)
(angewandt sowohl auf $\underline{A}$ als auch auf $\underline{b}$)

$$[\underline{\underline{Z}}, \underline{y}] = \texttt{gaussianelimination}([\underline{A}, \underline{b}])$$

Thm. 3.3.B $\Rightarrow$ $\{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{A}\underline{x} = \underline{b}\} = \{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{\underline{Z}}\,\underline{x} = \underline{y}\}$

▷ Es genügt, die Lösungsmengen von LGS mit Koeffizientenmatrizen in Zeilenstufenform zu untersuchen

Beispiele :

(i) $n = m$ (# Gleichungen = # Unbekannte)
Anzahl von

- $\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{pmatrix} \underline{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \Rightarrow$ Lösung : $\underline{x} = \underline{y}$

Eindeutige Lösung $\underline{x} = \underline{y}$, falls $\mathrm{Rang}(\underline{A}) = n$

- $$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & & z_{1,r+1} & z_{1,r+2} \\ & \ddots & & \vdots & \\ & & 1 & z_{r,r+1} & z_{r,r+2} \\ \hline & 0 & & & 0 & \end{array}\right) \underline{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad r = \mathrm{Rang}(A)$$

r (rows), r and $m-r$ (columns)

Falls $\begin{pmatrix} y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow$ Keine Lösung

sonst

$$\begin{array}{llll} x_1 & + z_{1,r+1} x_{r+1} & + z_{1,r+2} x_{r+2} & = y_1 \\ \quad x_2 & + z_{2,r+1} x_{r+1} & + z_{2,r+2} x_{r+2} & = y_2 \\ \quad\quad \ddots & \quad\vdots & & \\ \quad\quad\quad x_r & + z_{r,r+1} x_{r+1} & + z_{r,r+2} x_{r+2} & = y_r \end{array}$$

▷ x_{r+1}, x_{r+2} frei wählbar, dann $x_1, \ldots, x_r$ fixiert.
↳ "Parameter"

$$x_1 = y_1 - x_{r+1} z_{1,r+1} - x_{r+2} z_{1,r+2}$$
$$\vdots$$
$$x_r = y_r - x_{r+1} z_{r,r+1} - x_{r+2} z_{r,r+2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ x_{r+2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+1} \begin{pmatrix} -z_{1,r+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ -z_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_{r+2} \begin{pmatrix} -z_{1,r+2} \\ \vdots \\ \vdots \\ -z_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Umbenennung: $x_{r+1} \rightarrow \alpha$, $x_{r+2} \rightarrow \beta$ ("Parameter")

$$\triangleright \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -z_{1,r+1} \\ \vdots \\ -z_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -z_{1,r+2} \\ \vdots \\ -z_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Jede Wahl von α und β liefert eine Lösung!

$$\triangleright \quad \underbrace{\{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{\underline{Z}}\,\underline{x} = \underline{y}\}}_{\text{Lösungsmenge}} = \underbrace{\underline{y} + \operatorname{Span}\left\{ \overset{x_{r+1}=1,\ x_{r+2}=0}{\begin{pmatrix} -z_{1,r+1} \\ \vdots \\ -z_{r,r+1} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{x_{r+1}=0,\ x_{r+2}=1}{\begin{pmatrix} -z_{1,r+2} \\ \vdots \\ -z_{r,r+2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\}}_{\text{affiner Raum (vgl. Satz 3.1.B)}}$$

(ii) $n > m$ (Mehr Gleichungen als Unbekannte)

$$r=m\left\{\vphantom{\begin{pmatrix}1\\ \\ 1\end{pmatrix}}\right.\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \\ \hline & 0 & \end{pmatrix}}_{r=m} \underline{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \\ y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \mathrm{Rang}(A) = m$$

Falls $\begin{pmatrix} y_{m+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$ keine Lösung, sonst eindeutige Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}$

(iii) $n < m$ (Mehr Unbekannte als Gleichungen)

$$r=n\left\{\vphantom{\begin{pmatrix}1\\ \\ 1\end{pmatrix}}\right.\begin{pmatrix} \underbrace{\begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix}}_{r=n} & \Big| & * \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{y}, \quad \mathrm{Rang}(A) = n$$

▷ $x_{n+1}, \dots, x_m$ frei wählbar, dann

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \underline{y} - x_{n+1}\,\underline{Z}(:,n+1) - \dots - x_m\,\underline{Z}(:,m)$$

▷ $$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{A}\underline{x} = \underline{b}\} = \underline{y} + \underbrace{\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -Z(:,n+1) \\ \hline 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} -Z(:,m) \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}}_{\text{Affiner Raum}}$$

Satz 3.4.A.: Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems

Für $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^{n}$ seien $\underline{Z} \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{y} \in \mathbb{R}^{n}$ gegeben durch

$[\underline{Z}, \underline{y}] = \texttt{gaussianelimination}([\underline{A}, \underline{b}])$ (Zeilenstufenform).

Sei $r := \operatorname{Rang}(A)$, $\{1, \dots, m\} = \{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_{m-r}\}$ (vgl. Def. 3.3.C)

(i) Ist $r = n = m$, dann hat das LGS $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ die eindeutige Lösung $\underline{x} = \underline{y}$.

(ii) Ist $r < n$ und $\begin{pmatrix} y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \neq \underline{0}$, dann hat das LGS $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ keine Lösung

(iii) Ist $r = m < n$ und $\begin{pmatrix} y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{0}$, dann hat das LGS $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ die eindeutige Lösung $\underline{x} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

(iv) Ist $r < m$ und $\begin{pmatrix} y_{r+1} \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{0}$, falls $r < n$, dann ist die Lösungsmenge des LGS $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ der affine Raum

$$\{\underline{x} \in \mathbb{R}^m : \underline{A}\underline{x} = \underline{b}\} = \underline{q} + \operatorname{Span}\{\underline{p}^1, \dots, \underline{p}^{m-r}\}$$

mit

$$q_k = \begin{cases} y_k, & \text{wenn } k \in \{i_1, \dots, i_r\} \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases} \quad, k \in \{1, \dots, m\}$$

$$p_k^\ell = \begin{cases} 1, & \text{wenn } k = j_\ell \\ 0, & \text{wenn } k \in \{j_1, \dots, j_{m-r}\} \setminus \{j_\ell\} \\ z_{k,j_\ell}, & \text{wenn } k \in \{i_1, \dots, i_r\} \end{cases}, \quad \begin{array}{l} k \in \{1, \dots, m\} \\ \ell \in \{1, \dots, m-r\} \end{array}$$

Flussdiagramm: Lösen von LGS

($\underline{Z}\,\underline{x} = \underline{y}$ ist Zeilenstufenform von $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$)

$\mathrm{Rang}(\underline{Z}) = n$?

- ja → Lösungsmenge
- nein ($r < n$) → $\begin{pmatrix} y_{r+1} \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \underline{0}$?
  - ja → Lösungsmenge
  - nein → keine Lösung

Lösungsmenge ist affiner Raum $\tilde{y} + \mathcal{U}$ mit

- $\tilde{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$
- $\dim(\mathcal{U}) = m - r$