2.2. Linearkombinationen und Matrizen

Gegeben : $\{\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^m\} \subset \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, $\underline{a}^j = \begin{pmatrix} a_{1,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{pmatrix}$

Linearkombination : $\underline{v} = \sum_{j=1}^{m} c_j \underline{a}^j$, $c_j \in \mathbb{R}$

2.2.1. Matrix-Vektor-Produkt

Eine andere Notation:

$$\underline{v} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{m} c_j a_{1,j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{m} c_j a_{n,j} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,m} \\ a_{2,1} & \vdots & & \\ \vdots & & & \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}}_{n \times m\text{-Matrix}} \underbrace{\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_m \end{pmatrix}}_{=:\, \underline{c} \in \mathbb{R}^m} =: \underline{A}\,\underline{c}$$

$n \times m$ - Matrix (mit n Zeilen, m Spalten)

Spalte

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & & a_{1,m} \\ & & \\ a_{n,1} & & a_{n,m} \end{pmatrix}$$

← Zeile

Beachte: $\underline{A}\,\underline{c}$ nur dann definiert, wenn
$\#\{\text{Spalten von } \underline{A}\} = \#\{\text{Komponenten von } \underline{c}\}$

Notationen:

- $\mathbb{R}^{n,m}$: $n \times m$ - Matrizen
- Fette / unterstrichene Grossbuchstaben für Matrizen
- $\underline{C} \in \mathbb{R}^{n,m} \Rightarrow$ Matrixeinträge $c_{i,j} \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq m$

  Zeilenindex i Spaltenindex j
- $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ durch "Nebeneinanderstellen" von m Spaltenvektoren $\in \mathbb{R}^n$

Rechenregel (1.2.A):
$$\underline{A}\left(\sum_{j=1}^{k} c_j \underline{b}^j\right) = \sum_{j=1}^{k} c_j (\underline{A}\underline{b}^j), \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}, \underline{b}^j \in \mathbb{R}^m, c_j \in \mathbb{R}$$

Spezialfall:

Diagonalmatrix $\underline{D} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}, \ d_j \in \mathbb{R}$

$\triangleright \quad \underline{D}\,\underline{c} = \begin{pmatrix} d_1 c_1 \\ \vdots \\ d_n c_n \end{pmatrix}$ für Spaltenvektor $\underline{c} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

Bemerkung: Vektoren als spezielle Matrizen

Spaltenvektor: $\underline{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n,1}$

Zeilenvektor: $(v_1 \quad v_2 \quad \cdots \quad v_n) \in \mathbb{R}^{1,n}$

Eine spezielle Matrixoperation : Transponieren

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$: $\quad \underline{B} = \underline{A}^T \in \mathbb{R}^{m,n}$ mit $b_{i,j} = a_{j,i}$, $\begin{matrix} 1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,m} \\ \vdots & A & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,m} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{n,1} \\ \vdots & A^T & \vdots \\ a_{1,m} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} & & & \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$$

Beachte : Transponieren wandelt um Zeilenvektor $\leftrightarrow$ Spaltenvektor