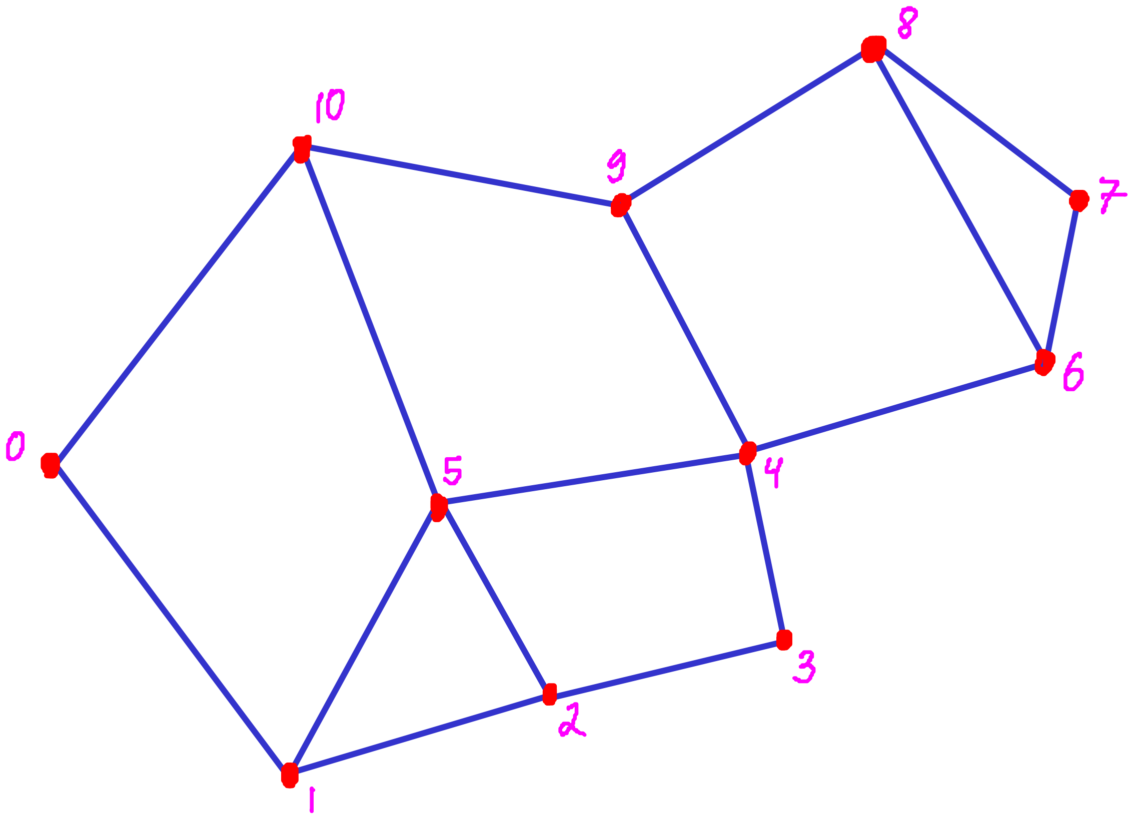
3.8. LGS: Anwendungsbeispiele

3.8.1. Netzwerke



——— $\hat{=}$ Kanten

• $\hat{=}$ Knoten

Knoten sind numeriert von 0 bis $n \in \mathbb{N}$

Bsp: Leitungsnetzwerk: Kanten $\hat{=}$ Rohre

Durchflussgesetz : $Q_{lj} = \frac{1}{R_{lj}} \Delta p_{lj}$ (3.8.1.A)

Volumenstrom im Rohr zwischen Knoten l und j

$$[Q_{lj}] = \frac{m^3}{s}$$

Druckabfall zwischen Knoten l und j

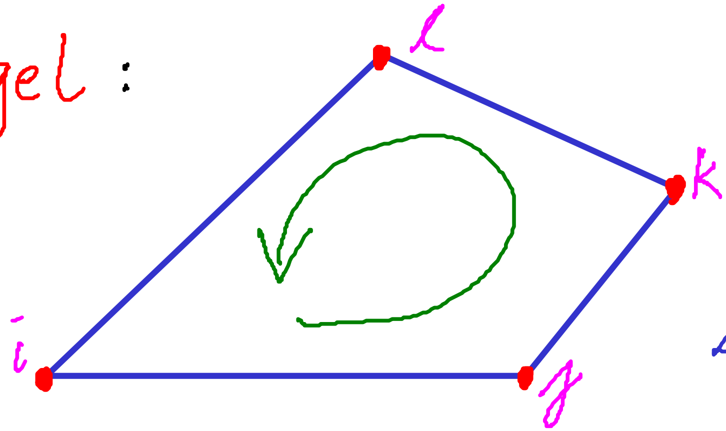
$$[\Delta p_{lj}] = \frac{N}{m^2}$$

Proportionalitätsfaktor

R_{lj} ≙ Hydraulischer Widerstand : $R_{lj} = R_{jl}$

$$[R_{lj}] = \frac{Ns}{m^5}$$

(I) Maschenregel :



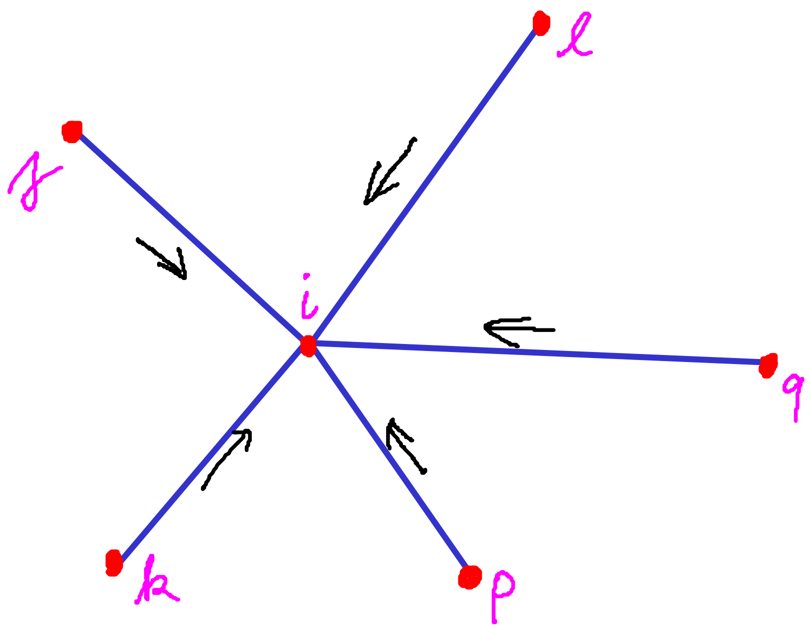
Summe der Druckabfälle in den Kanten jeder Masche des Netzwerks = 0

$$\Delta p_{ij} + \Delta p_{jk} + \Delta p_{kl} + \Delta p_{li} = 0$$

▷ **Satz 3.8.1.B**: Ist die Maschenregel erfüllt, so lässt sich jedem Knoten ℓ des Leitungsnetzes ein **Druck** $p_\ell \in \mathbb{R}$ so zuordnen, dass

$$\Delta p_{\ell j} = p_\ell - p_j \quad \text{für alle } \ell, j \in \{0, \dots, n\}$$

(II) **Knotenregel**: (aus Massenerhaltung)



Die Summe aller Volumenflüsse in einen Knoten = 0

$$Q_{ki} + Q_{pi} + Q_{qi} + Q_{\ell i} + Q_{ji} = 0$$

Synthese: Satz 3.8.1.B & Durchflussgesetz & Knotenregel

An Knoten i:
$$\sum_{j \in I(i)} \frac{1}{R_{ij}} (p_i - p_j) = 0 \ , \quad i = 0, \dots, n$$
(3.8.1.C)

$I(i) = \{ j \in \{1, \dots, n\} : i$ und j sind durch eine Kante verbunden $\}$

Bsp: Elektrisches Widerstandsnetzwerk

$\rightarrow$ Kanten $\triangleq$ Drähte

Ohmsches Gesetz:
$$I_{\ell j} = \frac{1}{R_{\ell j}} \Delta U_{\ell j} \quad (3.8.1.D)$$

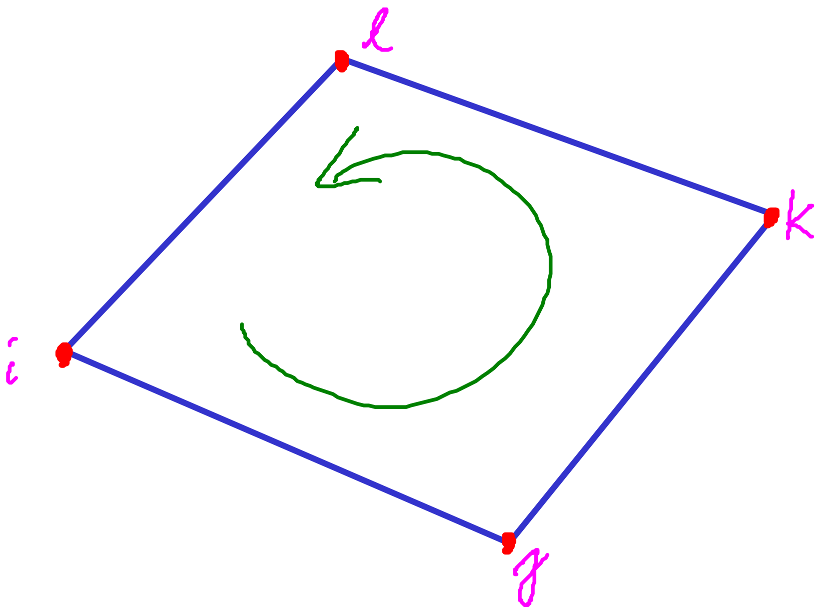
Strom durch Draht zwischen ℓ und j: $[I_{\ell j}] = 1A$

Spannungsabfall entlang Draht zwischen ℓ und j: $[\Delta U_{\ell j}] = 1V$

$R_{\ell j}$ $\hat{=}$ Elektrischer Widerstand des Drahtes zwischen ℓ und j

$$[R_{\ell j}] = 1\,\Omega = 1\,\frac{V}{A}\,, \quad R_{\ell j} = R_{j\ell}$$

(I) Kirchhoffsche Maschenregel:

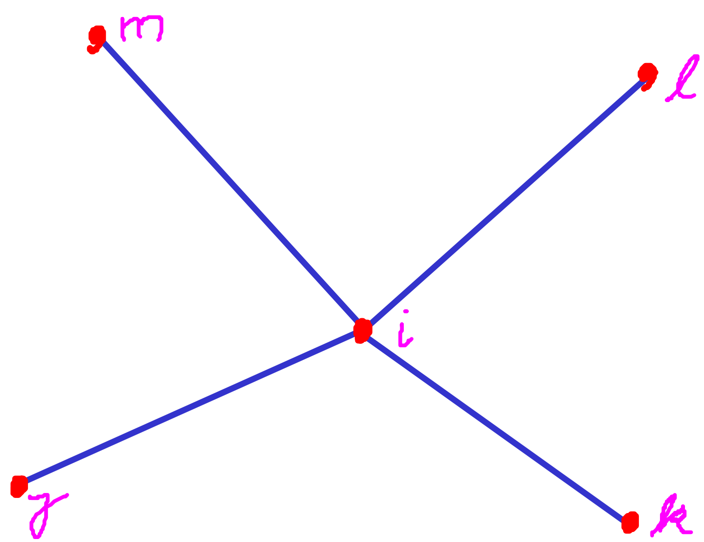


$$\Delta U_{ij} + \Delta U_{jk} + \Delta U_{k\ell} + \Delta U_{\ell i} = 0$$

(II) Kirchhoffsche Knotenregel:

(aus Ladungserhaltung)

$$I_{ij} + I_{ik} + I_{i\ell} + I_{im} = 0$$



Satz 3.8.1.E: Gilt die Kirchhoffsche Maschenregel, dann lässt sich jedem Knoten ℓ ein elektrisches Potential u_ℓ so zuordnen, dass

$$\Delta u_{\ell j} = u_\ell - u_j \quad \text{für alle} \quad \ell, j \in \{0, \ldots, n\}$$

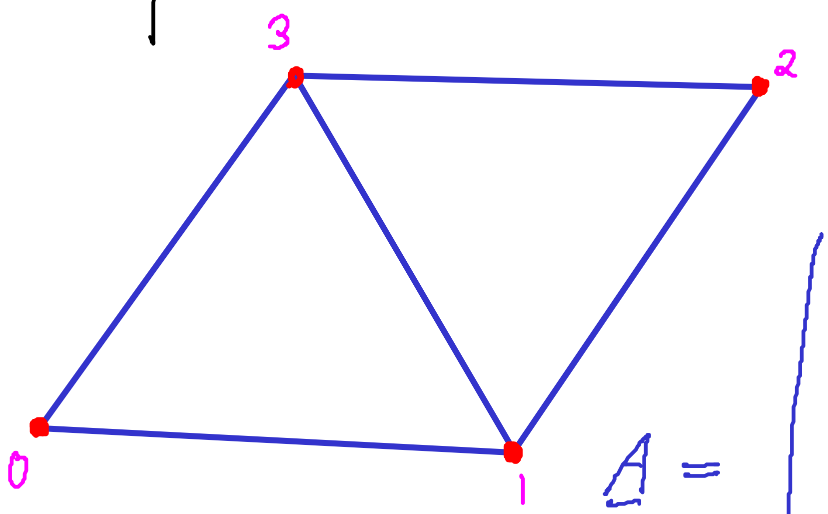
Synthese: Satz 3.8.1.E & Ohmsches Gesetz & Knotenregel

An Knoten i:
$$\sum_{j \in I(i)} \frac{1}{R_{ij}} (u_i - u_j) = 0 \qquad (3.8.1.F)$$

(3.1.8.C)
(3.1.8.F): Lineare Gleichungssysteme $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{0}$

$$\underline{A} = (a_{ij})_{i,j=0}^{n} \quad \text{mit} \quad a_{ij} = \begin{cases} -R_{ij}^{-1}, & \text{falls } j \in I(i), \\ \sum\limits_{j \in I(i)} R_{ij}^{-1}, & \text{für } j = i, \\ 0, & \text{sonst}. \end{cases} \qquad (3.8.1.G)$$

Bsp:



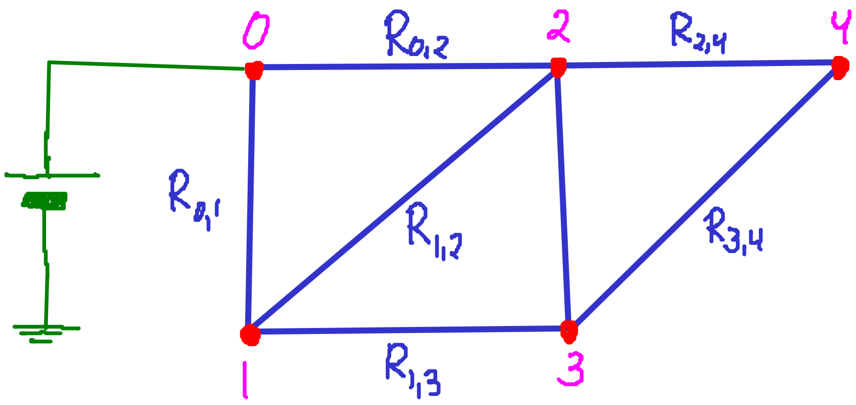
Mit $\sigma_{ij} = R_{ij}^{-1}$

$$A = \begin{pmatrix} \sigma_{0,1} + \sigma_{0,3} & -\sigma_{0,1} & 0 & -\sigma_{0,3} \\ -\sigma_{1,0} & \sigma_{1,0} + \sigma_{1,2} + \sigma_{1,3} & -\sigma_{1,2} & -\sigma_{1,3} \\ 0 & -\sigma_{2,1} & \sigma_{2,1} + \sigma_{2,3} & -\sigma_{2,3} \\ -\sigma_{3,0} & -\sigma_{3,1} & -\sigma_{3,2} & \sigma_{3,2} + \sigma_{3,1} + \sigma_{3,0} \end{pmatrix}$$

Da $\sigma_{i,j} = \sigma_{j,i} \Rightarrow \underline{A} = \underline{A}^T$: symmetrische Matrix

Was ist $\underline{x}$?

- Leitungsnetzwerk : $x_j = p_j$: Druck
- Widerstandsnetzwerk : $x_j = u_j$: Potential



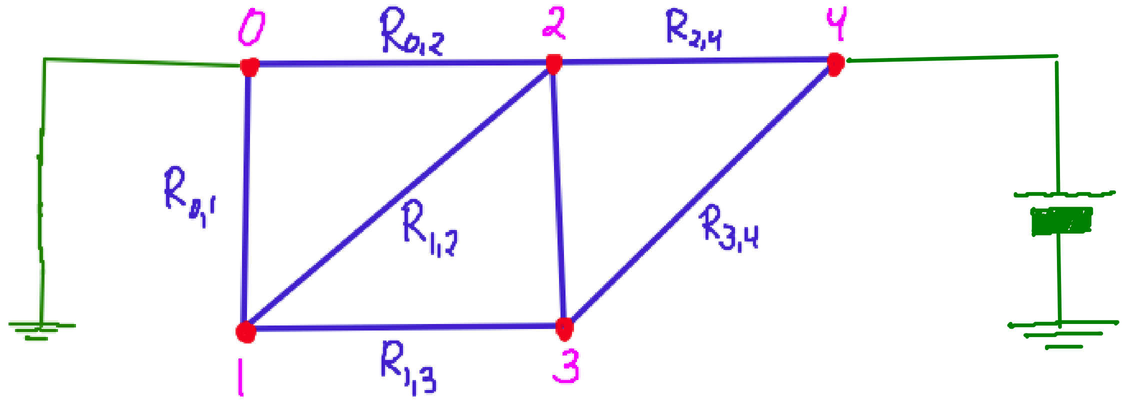
Lege an Knoten 0 Potential u_0 an:

→ Welche Potentiale an den anderen Knoten?

Mit $\sigma_{ij} = R_{ij}^{-1}$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{0,2}+\sigma_{0,1} & -\sigma_{0,1} & -\sigma_{0,2} & 0 & 0 \\ -\sigma_{1,0} & \sigma_{1,0}+\sigma_{1,2}+\sigma_{1,3} & -\sigma_{1,2} & -\sigma_{1,3} & 0 \\ -\sigma_{2,0} & -\sigma_{2,1} & \sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}+\sigma_{2,3}+\sigma_{2,4} & -\sigma_{2,3} & -\sigma_{2,4} \\ 0 & -\sigma_{3,1} & -\sigma_{3,2} & \sigma_{3,1}+\sigma_{3,2}+\sigma_{3,4} & -\sigma_{3,4} \\ 0 & 0 & -\sigma_{4,2} & -\sigma_{4,3} & \sigma_{4,2}+\sigma_{4,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lege an Knoten 0 das Potential 0V ("Erdung") und an Knoten 4 das Potential u_q ("Quellenspannung") an :



Welche Ströme fliessen ?

$$\begin{pmatrix} \sigma_{0,2}+\sigma_{0,1} & -\sigma_{0,1} & -\sigma_{0,2} & 0 & 0 \\ -\sigma_{1,0} & \sigma_{1,0}+\sigma_{1,2}+\sigma_{1,3} & -\sigma_{1,2} & -\sigma_{1,3} & 0 \\ -\sigma_{2,0} & -\sigma_{2,1} & \sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}+\sigma_{2,3}+\sigma_{2,4} & -\sigma_{2,3} & -\sigma_{2,4} \\ 0 & -\sigma_{3,1} & -\sigma_{3,2} & \sigma_{3,1}+\sigma_{3,2}+\sigma_{3,4} & -\sigma_{3,4} \\ 0 & 0 & -\sigma_{4,2} & -\sigma_{4,3} & \sigma_{4,2}+\sigma_{4,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

❗ Knotenregel verletzt an Knoten 0 und 4.

$\Rightarrow$ Streiche 0. und 4. Zeile des LGS

$$\begin{pmatrix} -\sigma_{1,0} & \sigma_{1,0}+\sigma_{1,2}+\sigma_{1,3} & -\sigma_{1,2} & -\sigma_{1,3} & 0 \\ -\sigma_{2,0} & -\sigma_{2,1} & \sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}+\sigma_{2,3}+\sigma_{2,4} & -\sigma_{2,3} & -\sigma_{2,4} \\ 0 & -\sigma_{3,1} & -\sigma_{3,2} & \sigma_{3,1}+\sigma_{3,2}+\sigma_{3,4} & -\sigma_{3,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

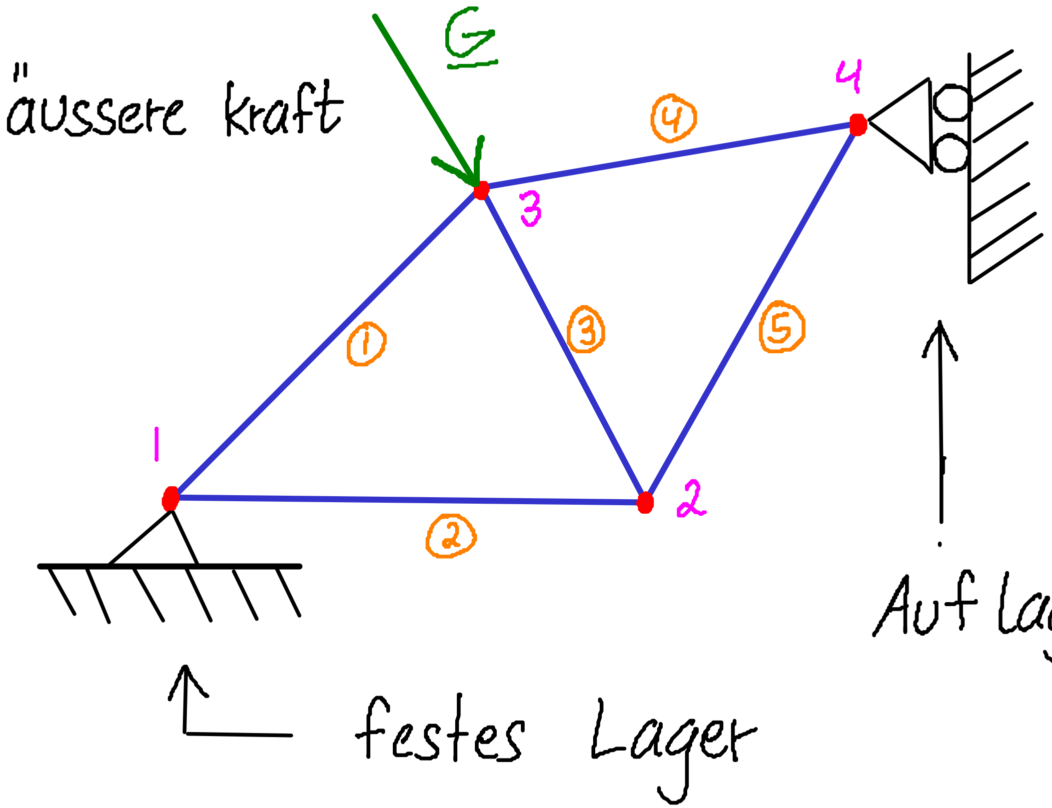
$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,0}+\sigma_{1,2}+\sigma_{1,3} & -\sigma_{1,2} & -\sigma_{1,3} \\ -\sigma_{2,1} & \sigma_{2,0}+\sigma_{2,1}+\sigma_{2,3}+\sigma_{2,4} & -\sigma_{2,3} \\ -\sigma_{3,1} & -\sigma_{3,2} & \sigma_{3,1}+\sigma_{3,2}+\sigma_{3,4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} \sigma_{1,0} \\ \sigma_{2,0} \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ \sigma_{2,4} \\ \sigma_{3,4} \end{pmatrix}$$

▷ Reduziertes LGS: $\underline{A}_R \underline{x}_R = \underline{b}$

Auflösen nach unbekannten Potentialen: $\underline{x}_R = \underline{A}_R^{-1} \underline{b}$

Dann Ströme aus Ohmschem Gesetz 3.8.1.D.

3.8.2. Ideale statische Fachwerke



≙ masselose Stäbe
(nur auf Zug/Druck belastbar)

≙ reibungsfreie Gelenke

Auflager : übt nur Kraft senkrecht zur Wand aus

Gelenke numeriert von 1 bis k
Stäbe numeriert von 1 bis s

Gegeben :
- Positionen aller Gelenke
- Lage der Stäbe (zwischen Gelenken)
- Position und Art der Lager

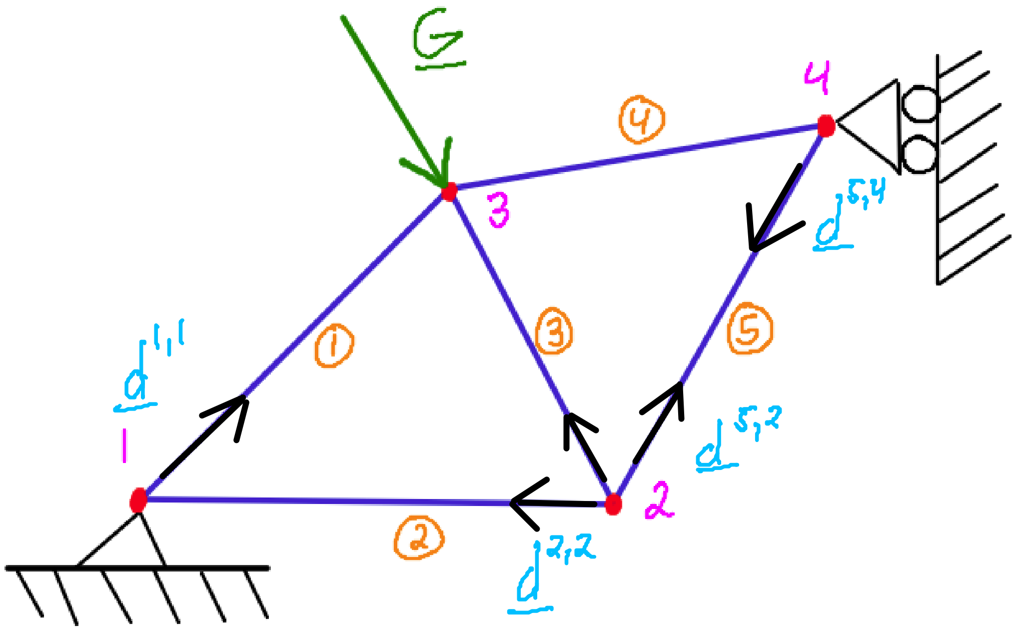
Gesucht: - Stabkräfte und Lagerkräfte

Notation: $S(i)$ = { Nummern der Stäbe an Lager i }

$\underline{d}^{j,i} \in \mathbb{R}^2 \;\hat{=}\;$ Vektor in Richtung des j. Stabes, weist vom Gelenk i weg, $\|\underline{d}^{j,i}\| = 1$; $j \in S(i)$

$F_j \;\hat{=}\;$ Betrag der kraft in Stab j, $[F] = 1N$

$\underline{L}^i \in \mathbb{R}^2 \;\hat{=}\;$ Lagerkraft auf Gelenk i



$S(1) = \{1, 2\}$
$S(2) = \{2, 3, 5\}$
$S(3) = \{1, 4, 3\}$
$S(4) = \{4, 5\}$

Beachte: $\underline{d}^{j,i} = -\underline{d}^{j,n}, n \neq i$

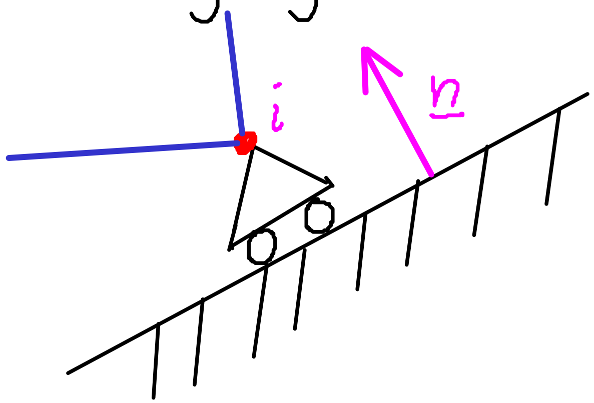
Prinzip : Kräftegleichgewicht an Gelenken

$$\sum_{j \in S(i)} F_j \, \underline{d}^{j,i} + \underline{L}_i + \underline{G}_i = \underline{0} \quad , \; i = 1, \dots, k \qquad (3.8.2.A)$$

Unkekannte

äussere Kraft auf Gelenk i
(übt Druck aus auf das Gelenk)

Nebenbedingung für Auflager :



$\underline{n} \in \mathbb{R}^2$ senkrecht zur Wand,
$\|\underline{n}\| = 1$

$$\Rightarrow \quad \underline{L}^i - \ell_i \underline{n} = 0 \qquad (3.8.2.B)$$

weitere Unbekannte

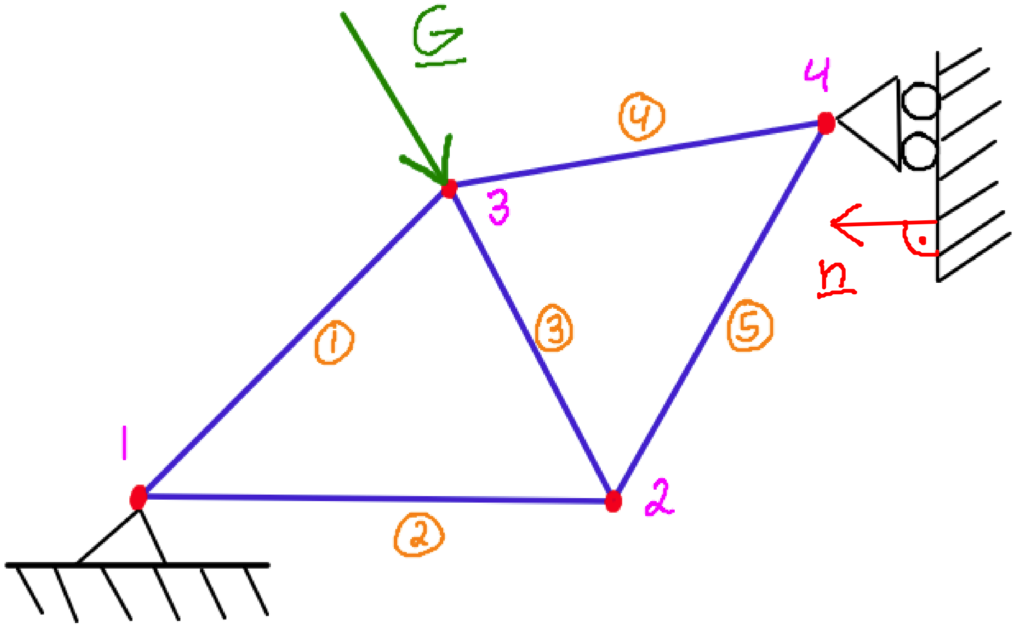
(3.8.2.A) & (3.8.2.B) $\triangleq$ Lineares Gleichungssystem

Unbekannte:

s Stabkräfte $F_1, \dots, F_s \in \mathbb{R}$

r Lagerkräfte $\underline{L}^{i_1}, \dots, \underline{L}^{i_r} \in \mathbb{R}^2$

q Auflagerkräfte $\ell_{n_1}, \dots, \ell_{n_q} \in \mathbb{R}$



Bsp: Aus (3.8.2.A)

$$F_1 \underline{d}^{1,1} + F_2 \underline{d}^{2,1} + \underline{L}^1 = \underline{0}$$

$$F_2 \underline{d}^{2,2} + F_3 \underline{d}^{3,2} + F_5 \underline{d}^{5,2} = \underline{0}$$

$$F_1 \underline{d}^{1,3} + F_3 \underline{d}^{3,3} + F_4 \underline{d}^{4,3} + \underline{G} = \underline{0}$$

$$F_4 \underline{d}^{4,4} + F_5 \underline{d}^{5,4} + \underline{L}^4 = \underline{0}$$

Aus (3.8.2.B)

$$\underline{L}^4 - \ell_4 \underline{n} = \underline{0}$$

$\Longleftrightarrow$ LGS: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$

$n = 2k + 2q$ ≙ Anzahl der Gleichungen

$m = s + 2r + q$ ≙ Anzahl der Unbekannten

Def 3.8.2.C : Das ideale Fachwerk heisst **statisch bestimmt** wenn die Koeffizientenmatrix des LGS aus (3.8.2.A) und (3.8.2.B) invertierbar ist.

Notwendig für "statisch bestimmt":

$$n = m \quad \Leftrightarrow \quad 2k = s + \underbrace{2r - q}_{\substack{\text{Gesamtzahl der Lagerkräfte} \\ (\to \text{Vorlesung "Mechanik"})}}$$

Bemerkung: Aus den Auflagergleichungen (3.8.2.B) kann naturlich $\underline{L}^i$ isoliert und in die anderen Gleichungen eingesetz werden (empfohlen).

Für das Beispiel ergibt sich damit das Gleichungssystem:

$$
\begin{array}{rrrrrrl}
F_1 \underline{d}^{1,1} + & F_2 \underline{d}^{2,1} & & & & + \underline{L}^1 & = \underline{0} \\
 & F_2 \underline{d}^{3,2} + & & & F_5 \underline{d}^{5,2} & & = \underline{0} \\
F_1 \underline{d}^{1,3} & + & F_3 \underline{d}^{3,3} + & F_4 \underline{d}^{4,3} & & & = -\underline{G} \\
 & & & F_4 \underline{d}^{4,4} + & F_5 \underline{d}^{5,4} & + l_4 \underline{n} & = \underline{0}
\end{array}
$$

Allgemein ergibt sich ein lineares Gleichungssystem mit der Struktur:

$$\left(\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_{\substack{s\\ \text{[Stabkräfte]}}} \middle| \underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{2(r-q)\\ \text{[feste Lager]}}} \middle| \underbrace{\qquad\qquad}_{\substack{q\\ \text{[Auflager]}}}\right) \begin{pmatrix} F_1 \\ \vdots \\ F_s \\ L^1_1 \\ L^1_2 \\ \vdots \\ L^{r-q}_1 \\ L^{r-q}_2 \\ l_1 \\ \vdots \\ l_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G^1_1 \\ G^1_2 \\ G^2_1 \\ G^2_2 \\ \vdots \\ G^k_1 \\ G^k_2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \text{Gelenk } 1 \\ \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \text{Gelenk } 2 \\ \\ \left.\begin{matrix} \\ \end{matrix}\right\} \text{Gelenk } k \end{array}$$