

Projekt: Fachwerksimulator in MATLAB

Prof. R. Hiptmair, SAM, D-MATH, ETH Zürich

Vorlesung “Lineare Algebra und Numerische Mathematik” (D-BAUG)

1 Problemspezifikation

In diesem Projekt sollen Sie ein MATLAB-Programm schreiben, das die Kräfte in einem statisch bestimmten planaren Fachwerk berechnet, wenn die Geometrie des Fachwerks, Art und Lage der Lager und die äusseren Kräfte gegeben sind. Statisch bestimmte Fachwerke wurden in Abschnitt 5.5.1 der Vorlesung behandelt.

Das Ergebnis des Projekts soll eine MATLAB-Funktion

```
1 function trussimulator(jointpos, links, supports, ...  
2                               supplanes, forces)
```

sein, die folgende Funktionsargumente erwartet:

- `jointpos` ist eine $2 \times k$ -Matrix, $k \in \mathbb{N}$ deren Spalten die Koordinaten der Gelenkpositionen enthalten.
- `links` ist eine $s \times 2$ -Integermatrix $\in \{1, \dots, k\}^{s,2}$, $s \in \mathbb{N}$, deren Zeilen Paare von Gelenkindices enthalten und dadurch die Lage der Stäbe beschreiben.
- `supports` ist ein Integervektor der Länge m , $m \in \mathbb{N}$, mit Einträgen aus $\{1, \dots, k\}$, der die Nummern der Gelenke enthält, die gelagert sind.
- `supplanes` ist eine $2 \times m$ -Matrix $\in \mathbb{R}^{2,m}$, die zu jedem Lager entsprechend der Aufzählung in `supports` einen Normalenvektor angibt, der für Auflager die Ebene beschreibt, in der das Lager beweglich ist. Ist die j . Spalte von `supplanes` gleich dem Nullvektor, dann bedeutet das, dass es sich beim j . Lager um ein festes Lager handelt.
- `forces` ist eine $2 \times k$ -Matrix, deren Spalten die Vektoren der externen Kräfte enthalten, die auf die einzelnen Gelenke wirken.

Die Funktion soll folgende Bildschirmausgaben produzieren:

- Eine Grafik, die die Gelenke und Stäbe des Fachwerks visualisiert, so wie in Abbildung 1 demonstriert. Die Beschriftung von Gelenken und Stäben mit ihren Nummern ist optional.
- Eine Liste der Stäbe mit den in Ihnen wirkenden Kräften

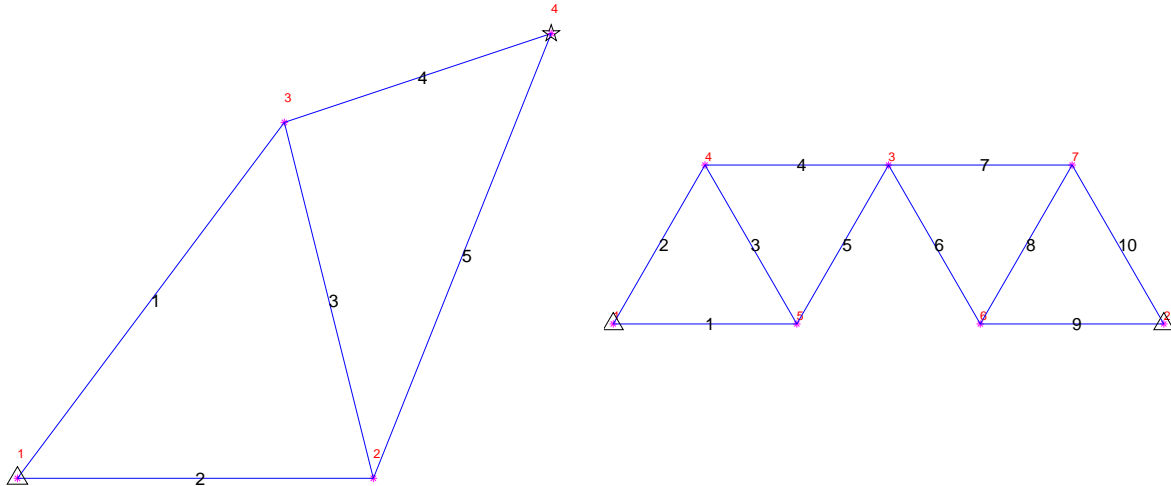


Abbildung 1: Beispiel für die Visualisierung von Fachwerken. Das linke Fachwerk entspricht dem Beispiel aus Abschnitt 5.5.1 der Vorlesung, das rechte dem Fachwerk aus Figure 11.6 aus dem Buch “Ingenieurmechanik I” von Sayir, Dual und Kaufmann (Vieweg/Teubner 2008). Gelenke sind durch * in der Farbe Magenta bezeichnet, Stäbe durch blaue Linien, Auflager durch schwarze Pentagramme und feste Lager durch schwarze Dreiecke.

- Eine Liste der Lagerkräfte

Der Aufruf des Fachwerksimulators ist demonstriert in Listing 1. Die Bildschirmausgabe sehen Sie in

Listing 1: Treiberfunktion für den Fachwerksimulator

```

1 function trussdriver
2 % Driver function for truss simulator
3 % First example: simple chevron truss with four joints and five
4 links
5 % define truss
6 jointpos = [0 1 0.75 1.5;0 0 1 1.25];
7 links = [1 3;1 2;2 3;3 4;2 4];
8 supports = [1 4];
9 supplanes = [0 1;0 0];
10 forces = [0 0 0.5 0;0 0 0.5 0];
11
12 % call simulator
13 disp('Simulation: simple truss from Section 5.5.1 of course');
14 trussimulator(jointpos,links,supports,supplanes,forces);
15
16 % Reset MATLAB's memory
17 clear all;
18
19 % static ideal truss model, see Sayir/Dual/Kaufmann
20     Ingenieurmechanik I",
21 % Vieweg/Teubner 2008, Fig 11.6

```

```

21 h = 0.5*sqrt(3);
22 jointpos = [ 0 0;3 0; 1.5 h; 0.5 h; 1 0; 2 0; 2.5 h]';
23 links = [1 5; 1 4; 4 5; 3 4; 3 5; 3 6;3 7; 6 7; 2 6; 2 7];
24 supports = [1 2];
25 suppplanes = [0 0;0 0]';
26 forces = [0 0;0 0;0 0;0 -1;0 0; 0 0;-sqrt(3) 0]';
27
28 % call simulator
29 disp('Truss from Figure 11.6 of book "Ingenieurmechanik I"');
30 trussimulator(jointpos,links,supports,suppplanes,forces);

```

Listing 2: Bildschirmusgabe von trussdriver

```

1 >> trussdriver
2 Simulation: simple truss from Section 3.8.2 of course
3 Force in link between joints [1,3] (direction
   (6.000000e-01,8.000000e-01)) = 0.625000
4 Force in link between joints [1,2] (direction (1,0)) =
   0.025000
5 Force in link between joints [2,3] (direction
   (-2.425356e-01,9.701425e-01)) = -0.039645
6 Force in link between joints [3,4] (direction
   (9.486833e-01,3.162278e-01)) = -0.121626
7 Force in link between joints [2,4] (direction
   (3.713907e-01,9.284767e-01)) = 0.041424
8 Force (Cartesian coordinates) on fixed support at (0,0) =
   (-0.400000,-0.500000)
9 Normal force on sliding support at
   (1.500000e+00,1.250000e+00) = -0.100000
10 Truss from Figure 11.6 of book "Ingenieurmechanik I"
11 Force in link between joints [1,5] (direction (1,0)) =
   -0.384900
12 Force in link between joints [1,4] (direction
   (5.000000e-01,8.660254e-01)) = -1.539601
13 Force in link between joints [4,5] (direction
   (5.000000e-01,-8.660254e-01)) = 0.384900
14 Force in link between joints [3,4] (direction (-1,0)) =
   -0.962250
15 Force in link between joints [3,5] (direction
   (-5.000000e-01,-8.660254e-01)) = -0.384900
16 Force in link between joints [3,6] (direction
   (5.000000e-01,-8.660254e-01)) = 0.384900
17 Force in link between joints [3,7] (direction (1,0)) =
   -1.347151
18 Force in link between joints [6,7] (direction
   (5.000000e-01,8.660254e-01)) = -0.384900
19 Force in link between joints [2,6] (direction (-1,0)) =
   0.384900

```

```

20 Force in link between joints [2,7] (direction
    (-5.000000e-01,8.660254e-01)) = 0.384900
21 Force (Cartesian coordinates) on fixed support at (0,0) =
    (1.154701,1.333333)
22 Force (Cartesian coordinates) on fixed support at (3,0) =
    (0.577350,-0.333333)

```

Von einem ETH-Ingenieur wird erwartet, dass er solche Implementierungsaufgaben problemlos meistert!

2 Teilprobleme

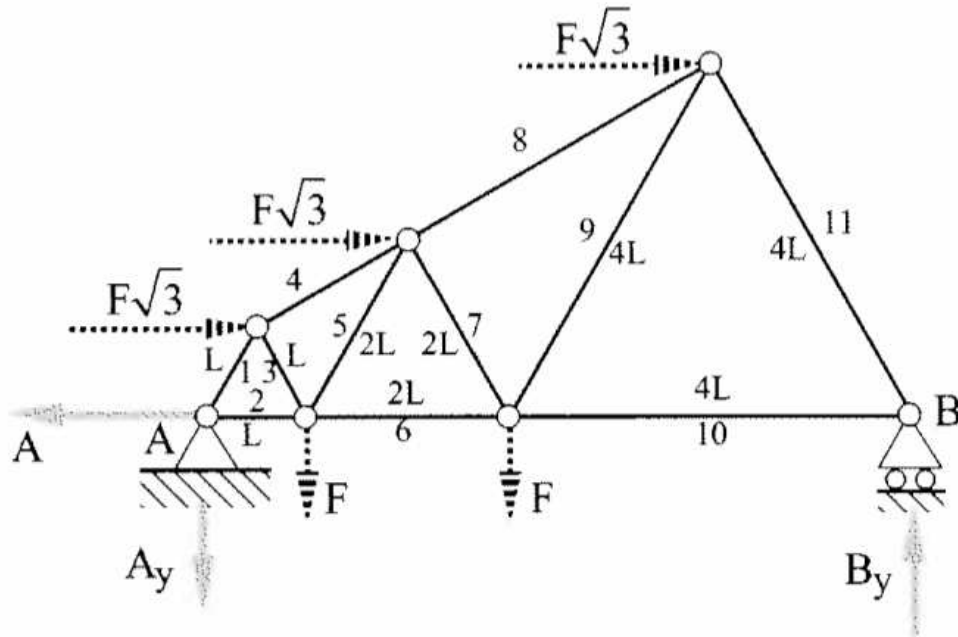


Abbildung 2: Ideales statisch bestimmtes Fachwerk aus Fig. 11.9 von [1]

1. Schreiben Sie ein MATLAB-Programm, das die Eingabematrizen und -vektoren für `trussimulator` für das Fachwerk aus Abbildung 2 initialisiert. Hierbei darf $F = 1\text{N}$ angenommen werden, ebenso wie $L = 1\text{m}$.
2. Mit welchen MATLAB-Anweisungen lässt sich aus dem Argument `jointpos` die Anzahl der Gelenke extrahieren?
3. Schreiben Sie einen kurzen MATLAB-Code, der aus den Argumenten von `trussimulator` die Anzahl r von festen Lagern und die Anzahl q von Auflagern berechnet.

Hinweis: In diesem Fall ist die Abfrage, ob ein Vektor gleich dem Nullvektor ist, problemlos, da von den entsprechenden Eingabedaten erwartet werden kann, dass sie keine Rundungsfehler aufweisen.

4. Welche MATLAB-Anweisungen sind nötig, um aus den Eingaben von `trussimulator` eine $2 \times s$ -Matrix `d` zu erzeugen, deren Spalten Einheitsvektoren (d.h. Vektoren der Euklidischen Länge 1) enthalten, die in Richtung der Stäbe zeigen.
5. Der `trussimulator` soll mit einer Fehlermeldung abbrechen, wenn das Fachwerk nicht statisch bestimmt sein kann. Welche MATLAB-Anweisungen realisieren dies?

Hinweis. Daten, die bereits in den vorherigen Teilaufgaben berechnet worden sind, können natürlich verwendet werden.

6. Das Fachwerkproblem kann zurückgeführt werden auf ein lineares Gleichungssystem $Ax = b$. Beschreiben Sie genau, welche Konventionen Sie anwenden, um Kräften die Spalten der Koeffizientenmatrix `A` zuzuordnen, und um die Kraftgleichgewichtsbedingungen mit den Zeilen der Koeffizientenmatrix `A` zu identifizieren. Was sind die Unbekannten x_i des linearen Gleichungssystems, repräsentiert durch den Spaltenvektor `x`?
7. Mit welchen MATLAB-Anweisungen können Sie den Rechte-Seite-Vektor `b` aufstellen?
8. Nun schreiben Sie bitte einen MATLAB-Code, der unter Verwendung der in den vorherigen Teilaufgaben berechneten Daten, insbesondere der Matrix `d`, die Koeffizientenmatrix `A` für das Fachwerkproblem im `trussimulator` aufstellt.
9. Implementieren Sie die Visualisierung des Fachwerks wie in Abbildung 1 (ohne Text) mit Hilfe des `plot`-Kommandos von MATLAB.
10. Berechnen Sie nun mit Ihrer Implementierung von `trussimulator` die Kräfte im Fachwerk aus Abbildung 2. Zur Kontrolle: die Kraft auf Lager A ist $(3\sqrt{3}N, \frac{1}{14}N)$, siehe [1, Abschnitt 11.3].

Literatur

- [1] M. SAYIR, J. DUAL, AND S. KAUFMANN, *Ingenieurmathematik*, Vieweg Studium, Vieweg+Teubner, 2nd ed., 2008.