# Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Prof. Ralf Hiptmair

Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich

Vorlesung für D-BAUG Herbstsemester 2014

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/linalgnum_BAUG
www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/

# VII. Diagonalisierung

## 7.1. Lineare Rekursionen

*Beispiel* VII.1.0.P (Altersstruktur einer Population).

Zustandsraum $\mathcal{V} := \mathbb{R}^n$: $n \in \mathbb{N}$ $\hat{=}$maximales Alter
$\mathbf{x} \in \mathcal{V} \succ (\mathbf{x})_i$ $\hat{=}$Anzahl Weibchen im $i$. Lebensjahr, $i \in \{1, \dots, n\}$

Modellparameter: $f_i \in \mathbb{R}^+$ : Durchschnittliche Anzahl von weiblichen Nachkommen eines Weibchens im $i$. Lebensjahr (fecundicity)
$m_i \in [0,1]$ : Todeswahrscheinlichkeit für ein Weibchen im $i$. Lebensjahr (mortality)

Annahme: grosse Population

Modell: Zeitliche Entwicklung: Jahr $k$ → Jahr $k+1$

$\underline{x}^{(k)} \hat{=}$ Altersverteilung im Jahr $k$

$$\underbrace{\begin{aligned} x_{j+1}^{(k+1)} &= (1-m_j)\cdot x_j^{(k)} && [\text{"Überleben"}] \quad j \in \{1,\dots,n-1\} \\ x_1^{(k+1)} &= \sum_{\ell=1}^{n} f_\ell\, x_\ell^{(k)} && [\text{Anz. Küken}] \end{aligned}}_{}$$

Regel $\underline{x}^{(k)} \to \underline{x}^{(k+1)}$ : Umschreiben als Matrix × Vektor

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} f_1 & f_2 & \cdots & & f_n \\ 1-m_1 & 0 & & & 0 \\ 0 & 1-m_2 & 0 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1-m_{n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{A \in \mathbb{R}^{n,n}} \underline{x}^{(k)}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{x}^{(k+1)} = A\,\underline{x}^{(k)}}$$

*Beispiel* VII.1.0.Q ((Vereinfachter) Page-Rank Algorithmus). → [2]

- „Modellinternet" mit $n$ Seiten, nummeriert $1,\dots,n$.
- $L_\ell \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl der Links auf Seite $\ell$, $\ell \in \{1,\dots,n\}$
- Clickverhalten eines Zufallssurfers, der sich aktuell auf Seite $\ell$ befindet:
  - Mit der Wahrscheinlichkeit ($d^*$ gegeben) )
  $$d_\ell := \begin{cases} 1 & \text{, wenn } L_\ell = 0\,, \\ d^* \in \,]0,1[ & \text{, wenn } L_\ell > 0\,, \end{cases}$$
  springt der Surfer gleichwahrscheinlich zu einer beliebigen der $n$ Webseiten.
  - Mit der Wahrscheinlichkeit $1-d_\ell$ folgt er gleichwahrscheinlich einem beliebigen der $L_\ell$ Links auf Seite $\ell$.m

Sprungwahrscheinlichkeit Seite $\ell \to$ Seite $j$ $= p_{j\ell}$

(i) Wenn $L_\ell = 0 \Rightarrow p_{j\ell} = \frac{1}{n}$

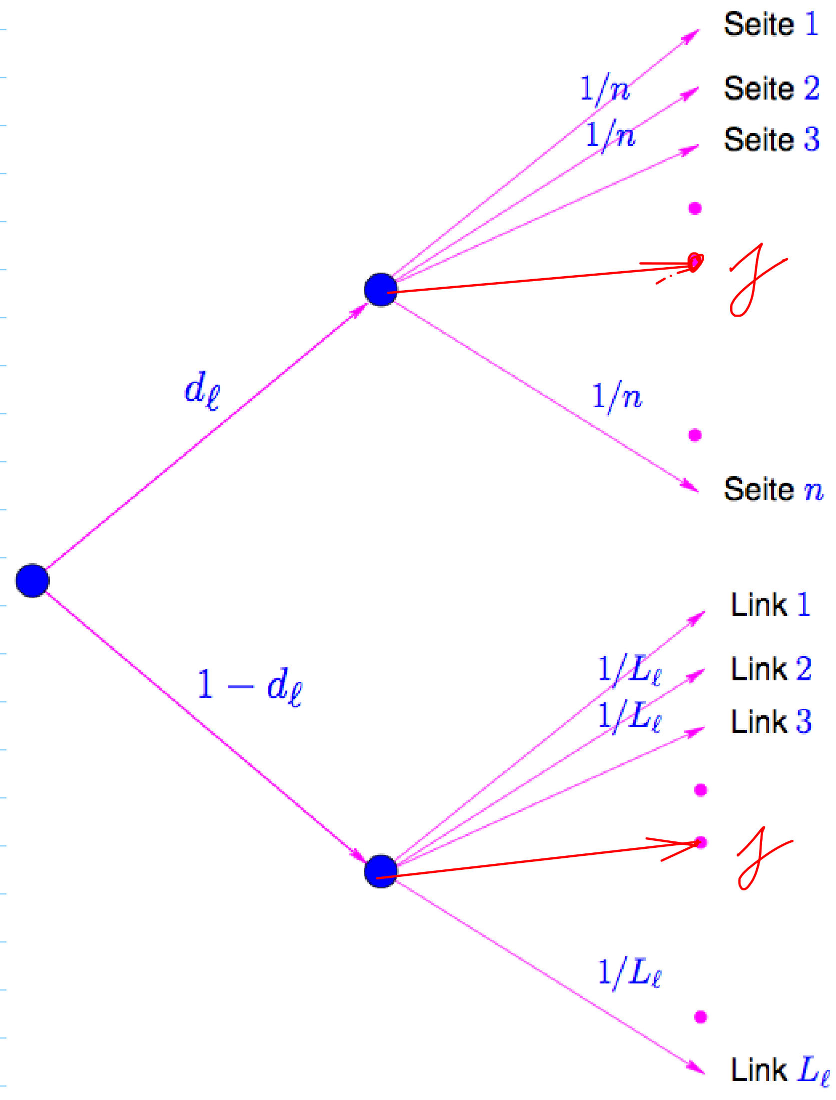
(ii) Wenn $L_\ell > 0 \Rightarrow p_{j\ell} = \begin{cases} d^* \cdot \frac{1}{n} & \text{, Wenn kein Link auf } j \\ (1-d^*)\frac{1}{L_\ell} + d^*\frac{1}{n} & \text{, Wenn Link } \ell \to j \end{cases}$

$x_j^{(k)} \mathrel{\hat{=}}$ Wahrscheinlichkeit, dass Zufallssurfer nach $k$. Click auf Seite $j$

$x_j^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^{n} p_{j\ell}\, x_\ell^{(k)}$ [Rechenregel für bedingte Wahrscheinlichkeiten]

$P \in \mathbb{R}^{n,n}$ : $(P)_{j,\ell} := p_{j\ell}$

$\Rightarrow \boxed{\underline{x}^{(k+1)} = P\,\underline{x}^{(k)}}$ . $(*)$




Wahrscheinlichkeitbaum für Zufallssurfer auf Seite $\ell$

Beobachtung : "$\underline{x}^{(k)}$ stabilisiert sich" für grosse $k$

$\underline{x}^{(\infty)} := \lim_{k\to\infty} \underline{x}^{(k)}$ existiert ?

$\to$ PageRank $\mathrel{\hat{=}}$ Sortieren nach Grösse der Einträge in $\underline{x}^{(\infty)}$

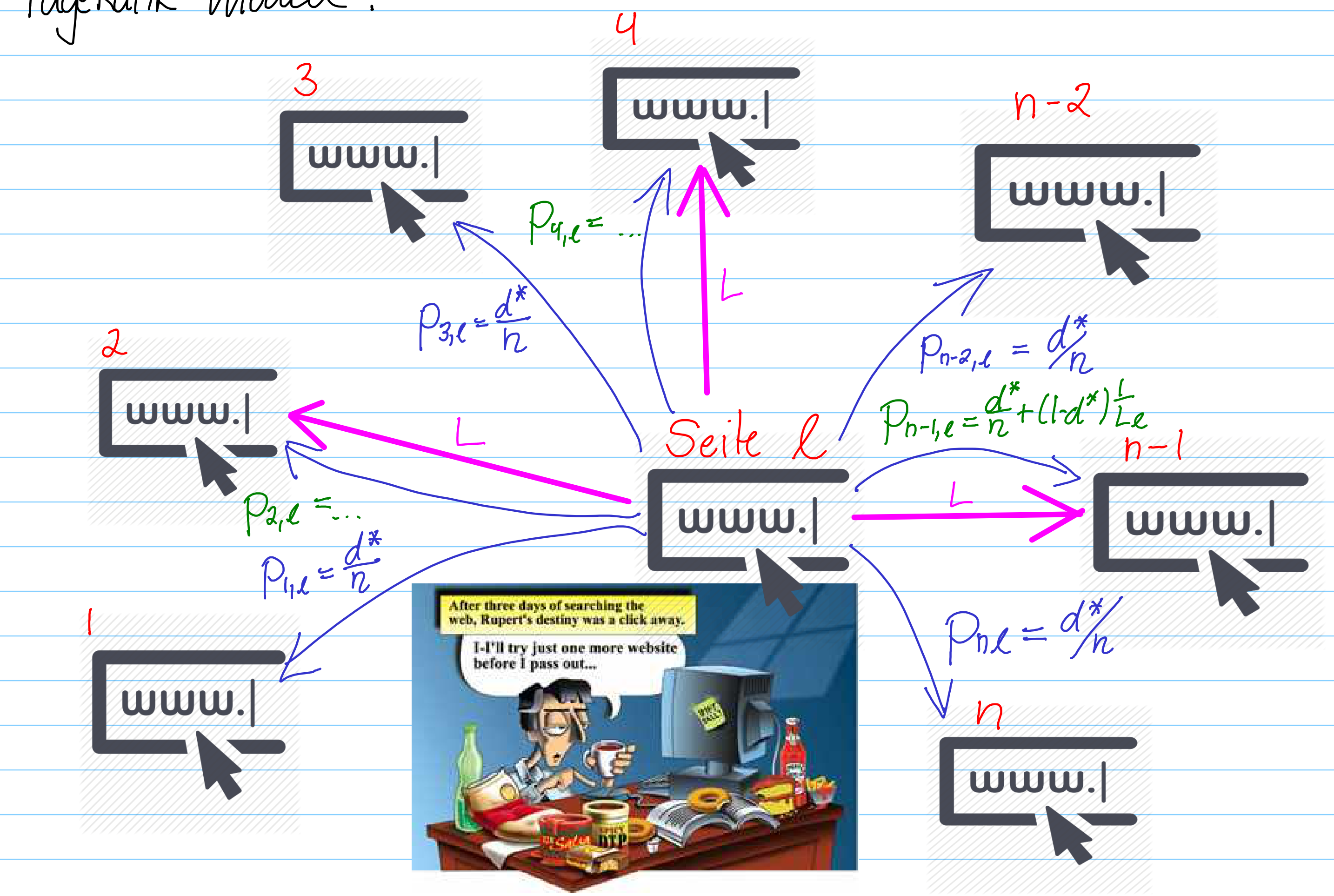
Spezielle Eigenschaft von $P$: $\sum_{i=1}^{n} (P)_{i\ell} = 1$

$$\sum_{\ell=1}^{n} x_\ell^{(k)} = 1 \;\Rightarrow\; \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k+1)} \overset{(*)}{=} \sum_{j=1}^{n}\sum_{\ell=1}^{n} (P)_{j\ell}\, x_\ell^{(k)} = \sum_{\ell=1}^{n} \Big(\underbrace{\sum_{j=1}^{n} (P)_{j,\ell}}_{1}\Big) x_\ell^{(k)} = 1$$

"Wahrscheinlichkeitsvektor"

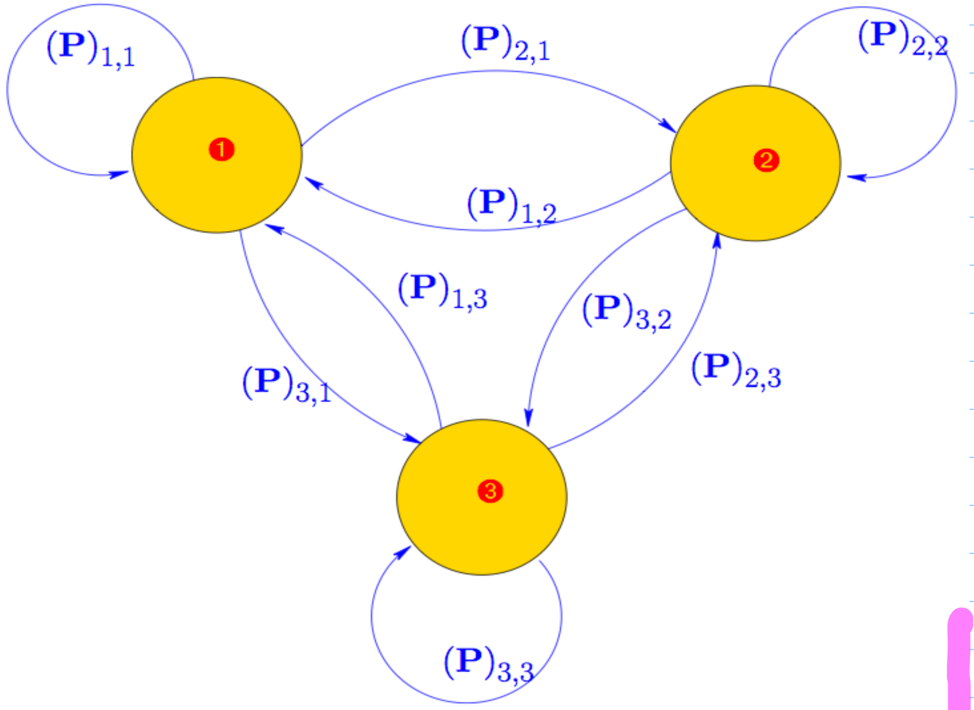
$\Rightarrow$ $\underline{x}^{(k+1)}$ ist auch "Wahrscheinlichkeitsvektor"

PageRank-Modell:




Abstraktion: Stationäre Markov-Kette

System mit $n$ Zuständen: ($\Leftrightarrow$ Surfer auf Seite $\ell$ ≙ Zustand $\ell$)




$P \in \mathbb{R}^{n,n}$

$(P)_{ij}$ ≙ Übergangswahrscheinlichkeit von Zustand $j \to$ Zustand $i$

$(P)_{ij} \in [0,1]$: gegeben.

Nebenbedingung

$$\sum_{i=1}^{n} (P)_{ij} = 1$$

$\Rightarrow$ $P$ ist stochastische Matrix

$\underline{x}^{(k)} \in \mathbb{R}^n$: $x_j^{(k)}$ ≙ Wahrscheinlichkeit, dass System im Zustand $j$ im $k$. Schritt

$$x_j^{(k+1)} = \sum_{\ell=1}^{n} (P)_{j\ell}\, x_\ell^{(k)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\underline{x}^{(k+1)} = P\,\underline{x}^{(k)}}$$

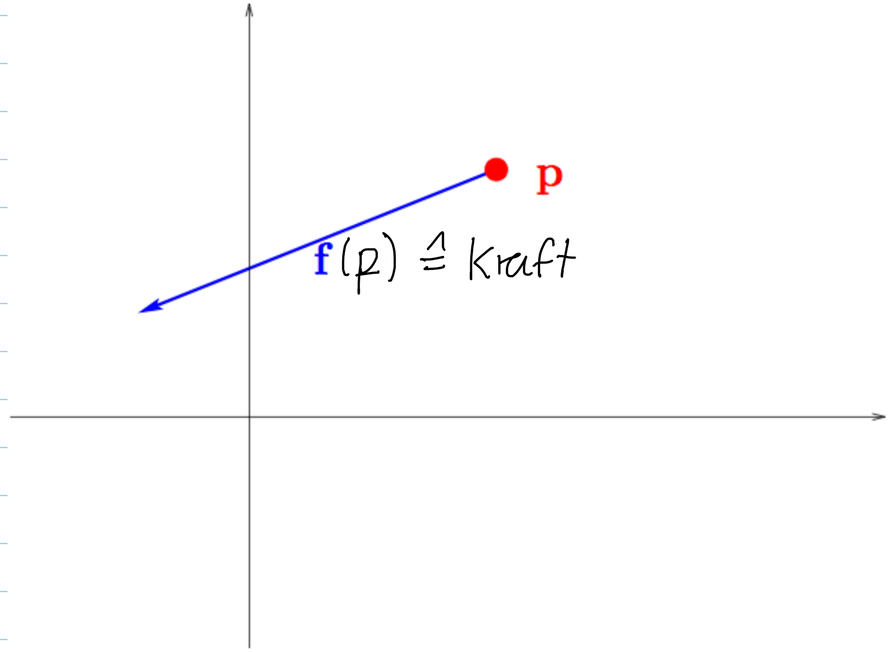
**Definition VII.1.0.A** (Lineare Rekursion).
*Für eine gegebene quadratische Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst eine der Vorschrift*

$$\mathbf{x}^{(k+1)} := \mathbf{A}\mathbf{x}^{(k)} , \quad k \in \mathbb{N}_0 ,$$

*genügende Folge* $(\mathbf{x}^{(0)}, \mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}, \dots) \subset \mathbb{R}^n$ *von Spaltenvektoren eine (homogene) lineare Rekursion mit Startvektor* $\mathbf{x}^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ *und Rekursionsmatrix (Propagationsmatrix)* $\mathbf{A}$.

*Beispiel* VII.1.0.R (Diskretes dynamisches System).
↳ "Stroboskop"

- $\mathbf{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \mathrel{\hat=}$ Kraftfeld: $\quad \mathbf{f} : \begin{cases} \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 & \mapsto \mathbf{f}(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^2 \\ \text{Position} & \mapsto \text{wirkende Kraft} \end{cases}$
- $\mathbf{p}^{(k)} \mathrel{\hat=}$ Position des Teilchens im $k$. Zeitschritt
- $\mathbf{v}^{(k)} \mathrel{\hat=}$ Geschwindigkeit des Teilchens im $k$. Zeitschritt




Reibungsfrei !

$\tau > 0$ : Zeitintervall / Zeitschritt $\qquad k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \mathbf{v}^{(k+1)} - \mathbf{v}^{(k)} = -\tau \cdot \tfrac{1}{2}\left(\overset{A}{\cancel{\mathbf{f}}}(\mathbf{p}^{(k+1)}) + \overset{A}{\cancel{\mathbf{f}}}(\mathbf{p}^{(k)})\right) , \\
&(ii) \quad \mathbf{p}^{(k+1)} - \mathbf{p}^{(k)} = \tau \cdot \tfrac{1}{2}\left(\mathbf{v}^{(k+1)} + \mathbf{v}^{(k)}\right) .
\end{aligned} \qquad \text{(VII.1.0.S)}$$

(ii) "Änderung (Position) ~ Zeitschritt · Geschwindigkeit"

(i) ["Newton"] "Änderung (Geschwindigkeit) ~ Zeitschritt · Kraft"

Spezialfall (lineares Kraftfeld) : $\quad f(\underline{x}) = -A\underline{x} \quad , \quad A \in \mathbb{R}^{2,2}$

Zustandsvektor : $\quad \underline{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \underline{v}^{(k)} \\ \underline{p}^{(k)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$[\text{VII.1.0.S}] \Rightarrow \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} = \underbrace{\tfrac{1}{2}\tau \left[\begin{array}{c|c} 0 & -A \\ \hline I & 0 \end{array}\right]}_{=: M \in \mathbb{R}^{4,4}} (\underline{x}^{(k)} + \underline{x}^{(k+1)})$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{x}^{(k+1)} - \underline{x}^{(k)} = M\,(\underline{x}^{(k+1)} + \underline{x}^{(k)})$$

$$\cdot(I-M)^{-1} \,|\quad (I - M)\, \underline{x}^{(k+1)} = (M + I)\, \underline{x}^{(k)}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{(I - M)^{-1} (I + M)}_{A} \underline{x}^{(k)}$$

↓ muss invertierbar sein !

# Skalare Mehrtermrekursionen:

Fibonacci-Folge: 1 1 2 3 5 8 13 ......

$$\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + \xi^{(k-1)} \quad , \quad \xi^{(0)} = \xi^{(1)} = 1$$

$$m = 2 \, , \quad \alpha_1 = \alpha_2 = 1$$

**Definition VII.1.0.T** (Lineare skalare Mehrtermrekursion).
*Für gegebenes* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ *heisst eine der Gleichung*

$$\xi^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \xi^{(k-j+1)} \, , \quad k \geqslant m-1 \, ,$$

*genügende Zahlenfolge* $(\xi^{(0)}, \xi^{(1)}, \xi^{(2)}, \dots)$ *eine* *m-Term-Rekursion* *mit Startwerten* $\xi^{(0)}, \dots, \xi^{(m-1)}$.

Trick: Umwandlung in lineare Rekursion

$$\underline{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \xi^{(k)} \\ \xi^{(k-1)} \\ \vdots \\ \xi^{(k-m+1)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad \text{Fibonacci} \quad \underline{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} \xi^{(k)} \\ \xi^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \cdots & \alpha_m \\ 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}}_{\in \mathbb{R}^{m,m}} \underline{x}^{(k)}$$

Fibonacci:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Frage: $\lim_{k \to \infty} \underline{x}^{(k)} = ?$ ("Stationärer Zustand")

## 7.2. Matrixdiagonalisierung

**Definition VII.2.0.A** (Diagonalisierbarkeit einer Matrix).
*Eine quadratische Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *heisst* *diagonalisierbar*, *wenn es eine* invertierbare *Matrix* $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *und Zahlen* $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ *so gibt, dass*

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \textit{mit} \quad \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) := \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} .$$

Diagonalisieren von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ in MATLAB:

(i) `[S,D] = eig(A)` : berechnet $\mathbf{S}$ und $\mathbf{D}$,

(ii) `lambda = eig(A)` : berechnet nur die $\lambda_i$.

Kubische asymptotische Komplexität: $O(n^3)$ ! *

(Billiger für *manche* dünnbesetzte, symmetrische Matrizen)

* Doppelt so grosse Matrix ⇒ 8x Rechenzeit

# 7.2.1 Geschlossene Darstellung von linearen Rekursionen

$$\underline{x}^{(k+1)} = A\,\underline{x}^{(k)}\,,\quad \underline{x}^{(0)} \text{ gegeben}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\underline{x}^{(k)} = A^k\,\underline{x}^{(0)}}$$

$A$ diagb. : $\quad A = S\,\underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)}_{=:\,D}\,S^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n}$

$$A^2 = SD(\cancel{S^{-1}S})DS^{-1} = SD^2S^{-1}$$
$$A^3 = SD(S^{-1}S)D(S^{-1}S)DS^{-1} = SD^3S^{-1}$$
$$\Rightarrow \quad A^k = SD^kS^{-1}$$

---

$$\underline{x}^{(0)} \in \mathrm{Span}\{(S)_{:,j}\,,\ j\in J^-\} =: \mathcal{E}^-$$

$$\underline{x}^{(0)} = \sum_{j\in J^-} c_j\,(S)_{:,j}$$

$$S^{-1}\underline{x}^{(0)} = \sum_{j\in J^-} c_j\,\underline{e}_j \quad \Rightarrow \quad S^{-1}\underline{x}^{(0)} = \begin{bmatrix} 0 \\ c_2 \\ 0 \\ \vdots \\ c_4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \quad \mathrm{diag}(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)\cdot S^{-1}\underline{x}^{(0)}$ bleibt beschränkt für $k\to\infty$

$\underline{x}^{(0)} \notin \mathcal{E}^- \Rightarrow (S^{-1}\underline{x}^{(0)})_\ell \neq 0$ für ein $\ell \in \{1,\dots,n\}$ für das $|\lambda_\ell| > 1$

**Satz VII.2.1.K** (Darstellungsformel für Glieder linearer Rekursionen).
*Eine lineare Rekursion* $(\mathbf{x}^{(0)},\mathbf{x}^{(1)},\mathbf{x}^{(2)},\dots)$ *im* $\mathbb{R}^n$ *(→ Definition VII.1.0.A) mit einer diagonalisierbaren Rekursionsmatrix* $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}$, $n\in\mathbb{N}$, *für die* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$, $\lambda_\ell\in\mathbb{R}$, *gemäss Definition VII.2.0.A,*

$$\mathbf{x}^{(k)} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)\mathbf{S}^{-1}\mathbf{x}^{(0)}\,,\quad k\in\mathbb{N}\,.$$

Grenzwert $k\to\infty$:

$$\lim_{k\to\infty}\lambda^k = \begin{cases} \infty & \text{, falls } |\lambda|>1 \\ \cancel{\times} & \text{, falls } \lambda = -1 \\ 1 & \text{, falls } \lambda = 1 \\ 0 & \text{, falls } |\lambda|<1 \end{cases}$$

Annahme $|\lambda_\ell| > 1$ und $(S^{-1}\underline{x}^{(0)})_\ell \neq 0$

$$\Rightarrow \quad \big(\underbrace{\mathrm{diag}(\lambda_1^k,\dots,\lambda_n^k)\,S^{-1}\underline{x}^{(0)}}_{=\,S^{-1}\underline{x}^{(k)}}\big)_\ell \longrightarrow \infty \text{ für } k\to\infty$$

Wenn $|\lambda_\ell| < 1\ \forall \ell \Rightarrow \underline{x}^{(k)} \longrightarrow 0$ für $k\to\infty$

**Satz VII.2.1.N** (Wachstums- und Abklingverhalten linearer Rekursionen).
*Sei* $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}$ *diagonalisierbar gemäss Definition VII.2.0.A:* $\mathbf{A} = \mathbf{S}\,\mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$, $\lambda_\ell\in\mathbb{R}$. *Wir definieren*

$$J^- := \{\ell\in\{1,\dots,n\}\colon |\lambda_\ell|\leq 1\}\,. \tag{7.2.1}$$

*und*

$$\mathcal{E}^- := \mathrm{Span}\{(\mathbf{S})_{:,\ell},\ \ell\in J^-\} \quad (=\{\mathbf{0}\}, \text{ falls } J^- = \emptyset)\,. \tag{7.2.2}$$

*Dann gilt für eine lineare Rekursion* $(\mathbf{x}^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_0}$ *mit Rekursionsmatrix* $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{x}^{(0)}\in\mathcal{E}^- \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}\left\|\mathbf{x}^{(k)}\right\| < \infty\,.$$

Bsp: Fibonacci-Folge $\xi^{(k+1)} = \xi^{(k)} + \xi^{(k-1)}$, $\xi^{(0)} = \xi^{(1)} = 1$

$\Updownarrow$

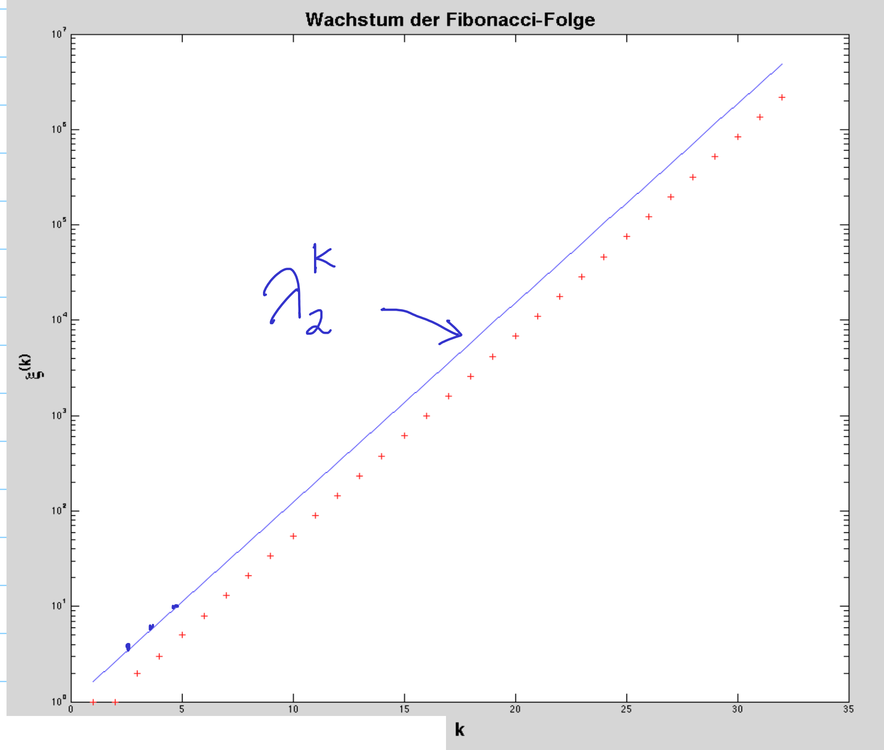
Mit $\underline{x}^{(k)} = \begin{bmatrix}\xi^{(k)} \\ \xi^{(k-1)}\end{bmatrix}$; $k \in \mathbb{N}$

Lineare Rekursion: $\underline{x}^{(k+1)} = \underbrace{\begin{bmatrix}1 & 1 \\ 1 & 0\end{bmatrix}}_{A} \underline{x}^{(k)}$, $\underline{x}^{(1)} = \begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}$

Beobachtung:
(MATLAB-Simulation)

$+ \ \hat{=} \ \xi^{(k)}$

$/ \ \hat{=} \ \lambda_{max}^{k}$




```
Fibonacci-Folge:
     1     1     2     3     5     8    13    21    34    55

Rekursionsmatrix fuer Fibonacci-Folge:
     1     1
     1     0

Diagonalisierung:

S =

    0.5257   -0.8507
   -0.8507   -0.5257


D =

   -0.6180         0
         0    1.6180
```

$[S, D] = \mathrm{eig}(A)$

$D = \begin{bmatrix}-0.6180 & 0 \\ 0 & 1.6180\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1 & \\ & \lambda_2\end{bmatrix}$

Lineare Rekursion: $\underline{x}^{(k+1)} = A\underline{x}^{(k)}$

$A$ diagonalisierbar: $A = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) S^{-1}$

$\underline{x}^{(k)} = A^k \underline{x}^{(0)} = S\,\mathrm{diag}(\lambda_1^k, \dots, \lambda_n^k) S^{-1} \underline{x}^{(0)}$

Wenn: $|\lambda_j| > |\lambda_\ell|$, $\ell \neq j$ $\quad (|\lambda_j| > 1)$

$\Rightarrow$ $k \gg 1$ gilt $|\lambda_j^k| \gg |\lambda_\ell^k|$

$\hookrightarrow$ dominiert Wachstum

$\Rightarrow$ i.a. gilt dann $\|\underline{x}^{(k)}\| \sim |\lambda_j|^k$

$\log \|\underline{x}^{(k)}\| \sim k \log |\lambda_j|$

## 7.2.2. Matrixfunktionen

Polynom: $p(x) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j x^j$, $d \in \mathbb{N}_0 \ \hat{=}$ Grad

mit Koeffizienten $\alpha_j \in \mathbb{R}$

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$: $p(A) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j A^j$

$A$ diagbar: $A = SDS^{-1}$, $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$p(A) = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j (SDS^{-1})^j = \sum_{j=0}^{d} \alpha_j SD^jS^{-1} = S\left(\sum_{j=0}^{d} \alpha_j D^j\right)S^{-1}$

$\uparrow$ Matrixpolynom

Da $D$ diagonal:

$$p(A) = S \begin{bmatrix} p(\lambda_1) & & \\ & \ddots & \\ & & p(\lambda_n) \end{bmatrix} S^{-1}$$

Zu Bsp.: VII.1.0.R "Diskretes dynamisches System"

$$\underline{x}^{(k+1)} = (I-M)^{-1}(I+M)\,\underline{x}^{(k)} = f(M)\,\underline{x}^{(k)}$$

$M$ diagonalisierbar: $M = SDS^{-1}$, $D$ diagonal

$$(I-M)^{-1}(I+M) = (SS^{-1} - SDS^{-1})^{-1}(SS^{-1} + SDS^{-1}) =$$

$$= [S(I-D)S^{-1}]^{-1}\, S(I+D)S^{-1}$$

$[(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}!]$ $$= S(I-D)^{-1}\cancel{S^{-1}S}(I+D)S^{-1}$$

$$= S[(I-D)^{-1}(I+D)]S^{-1}$$

$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$, $x \neq 1$ :

$$= S\left[\operatorname{diag}\left(\tfrac{1}{1-\lambda_1}, \dots, \tfrac{1}{1-\lambda_n}\right) \cdot \operatorname{diag}(1+\lambda_1, \dots, 1+\lambda_n)\right] S^{-1}$$

$$= S \operatorname{diag}\left(\frac{1+\lambda_1}{1-\lambda_1}, \dots, \frac{1+\lambda_n}{1-\lambda_n}\right) S^{-1}$$

$$= S \operatorname{diag}(f(\lambda_1), \dots, f(\lambda_n)) S^{-1}$$

! Nur möglich, wenn $\lambda_\ell \neq 1$

**Definition VII.2.2.J** (Allgemeine Matrixfunktionen).
*Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagonalisierbar, $\mathbf{A} = \mathbf{S}\operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)\mathbf{S}^{-1}$, $\lambda_\ell \in \mathbb{R}$.*
*Ist die Funktion $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert auf einer (offenen) Menge $D$ mit $\lambda_\ell \in D$ für alle $\ell \in \{1, \dots, n\}$, dann definiert*

$$\varphi(\mathbf{A}) := \mathbf{S} \cdot \begin{bmatrix} \varphi(\lambda_1) & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & \varphi(\lambda_2) & 0 & \cdots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & \varphi(\lambda_n) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{S}^{-1}. \qquad \text{(VII.2.2.H)}$$

*die Matrixfunktion $\varphi(\mathbf{A})$.*

z.B. $\exp(A)$, $\sin(A)$, $\log(A)$, $A \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\uparrow$ nur definiert, wenn $\lambda_\ell > 0$

# 7.4. Eigenwerte und Eigenvektoren

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagbar : $S^{-1}AS = D := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$
$(\; S = [\underline{s}^1, \dots, \underline{s}^n] \;)$

$\Leftrightarrow \quad \underbrace{AS}_{= [A\underline{s}^1, \dots, A\underline{s}^n]} = SD = [\lambda_1 \underline{s}^1, \dots, \lambda_n \underline{s}^n]$

↳ Bsp II.3.0.J

$\Leftrightarrow \quad A\underline{s}^j = \lambda_j \underline{s}^j, \quad j \in \{1, \dots, n\}$

$\Leftrightarrow \quad (A - \lambda_j I)\,\underline{s}^j = \underline{0}$

$\Leftrightarrow \quad 0 \neq \underline{s}^j \in \operatorname{Kern}(A - \lambda_j I)$

↳ Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_j$

**Definition VII.4.0.A** (Eigenwerte und Eigenvektoren).
*Sei* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

- *Eine Zahl* $\lambda \in \mathbb{R}$ *heisst Eigenwert (EW) der Matrix* $\mathbf{A}$, *wenn* $\operatorname{Kern}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \neq \{\mathbf{0}\}$.
- *Ein Spaltenvektor* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, *heisst Eigenvektor (EV) der Matrix* $\mathbf{A}$ *zum Eigenwert* $\lambda \in \mathbb{R}$, *wenn*

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{v} \in \operatorname{Kern}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) .$$

- *Ist* $\lambda \in \mathbb{R}$ *Eigenwert von* $\mathbf{A}$, *so heisst* $\operatorname{Kern}(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ *der Eigenraum (ER) zu* $\lambda$.

Menge der Eigenwerte : Spektrum $\sigma(A)$

$\Rightarrow \quad A = SDS^{-1}$ diagbar $\Rightarrow$ 1. Spalte von $S$ ist EV zum EW $\lambda_1$

Bem. : $\varphi : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\varphi(A) = S \operatorname{diag}(\underbrace{\varphi(\lambda_1), \dots, \varphi(\lambda_n)}_{\text{EW von } \varphi(A)}) S^{-1}$

$\Rightarrow \quad \boxed{\sigma(\varphi(A)) = \{\varphi(\lambda) : \lambda \in \sigma(A)\}}$

Bem. : $0 \notin \sigma(A) \Leftrightarrow \operatorname{Kern}(A) = \{\underline{0}\}$
$\Leftrightarrow A$ invertierbar

**Satz VII.4.0.B** (Kriterium für Diagonalisierbarkeit).
*Eine Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^n$ *ist genau dann diagonalisierbar im Sinn von Definition VII.2.0.A, wenn es eine Basis des* $\mathbb{R}^n$ *aus Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$ *gibt.*

↳ liefert Spalten von $S$ (invertierbar, da Basisvektoren l.u.!)

---

Nachweis: Orthogonale Projektionsmatrix $A$ erfüllt $A^2 = A$ :

$A = B(B^TB)^{-1}B^T, \quad B \in \mathbb{R}^{n,k}, \quad \operatorname{Rang}(B) = k \leq n$

$A^2 = B(\cancel{B^TB})^{-1}(\cancel{B^TB})(B^TB)^{-1}B = A$

Bsp.: $A = I - uv^T \quad , u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$

$\hookrightarrow$ Tensorprodukt

- $x \in \text{Span}\{v\}^{\perp} \Rightarrow v^T x = \langle v, x\rangle = 0$

ER zum EW 1 $\quad A x = x - u \underbrace{v^T x}_{=0} = 1 \cdot x$

$\Rightarrow x$ EV zum EW 1

- Annahme: $\langle u, v\rangle \neq 0 \Leftrightarrow u \notin \text{Span}\{v\}^{\perp}, u \neq v$

$\Rightarrow A u = u - u(v^T u) = (1 - \langle v, u\rangle) u$

$u$ ist EV von $A$ zum EW $1 - \langle v, u\rangle$

Diagonalisierbarkeit ?

$\{ \underbrace{b^1, \dots, b^{n-1}}_{\text{Basis von Span}\{v\}^{\perp}}, u \}$ l.u. $\rightarrow$ Basis aus EV

$\downarrow$ EV zum EW 1 $\qquad \downarrow$ EV zum EW $1 - \langle v, u\rangle$

$\sigma(A) = \{1, 1 - \langle v, u\rangle\}$

Bsp: $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ : $\boxed{A^2 = A}$

[ z.B: orthogonale Projektion $B(B^T B)^{-1} B^T$, $B \in \mathbb{R}^{n,k}$, Rang$(B) = k$ ]

- $x \in \text{Bild}(A) \setminus \{0\}$, $\exists\, w \in \mathbb{R}^n$ : $x = Aw$

$Ax = AAw = A^2 w = Aw = x$

$\Rightarrow$ $x$ ist EV zum EW 1

- $x \in \text{Kern}(A) \setminus \{0\} \Rightarrow x$ ist EV zum EW 0

- $x \in \text{Kern}(A) \cap \text{Bild}(A)$

$\underbrace{Ax = 0 \qquad x = Aw \text{ für ein } w \in \mathbb{R}^n}$

$0 = Ax = A(Aw) = A^2 w = Aw = x$

$\Rightarrow \text{Kern}(A) \cap \text{Bild}(A) = \{0\}$

$\dim(\underbrace{\text{Kern}(A) + \text{Bild}(A)}_{=\mathbb{R}^n}) = \dim(\text{Kern}(A)) + \dim(\text{Bild}(A)) - \cancel{\dim(\text{Kern}(A) \cap \text{Bild}(A))}$

$= \dim \text{Kern}(A) + \dim \text{Bild}(A) = n$

[ nach Dimensionssatz ]

$\mathcal{B} := \{ \underbrace{b^1, \dots, b^k}_{\text{Basis von Kern}(A)}, \underbrace{q^1, \dots, q^{n-k}}_{\text{Basis von Bild}(A)} \} \leftarrow \text{Span} = \mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}$ ist Basis aus Eigenvektoren von $A$:

- $b^\ell$ EV zum EW 0
- $q^\ell$ EV zum EW 1

$\Rightarrow \sigma(A) = \{0,1\}$

## Berechnung von EW ("auf Papier")

$\lambda$ EW von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Kern}(A - \lambda I) \neq \{0\}$

[III.3.0.P] $\Leftrightarrow$ $A - \lambda I$ nicht invertierbar

$\Leftrightarrow$ $\underbrace{\det(A - \lambda I)}_{\text{Funktion } \mathbb{R} \to \mathbb{R}} = 0$

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$

Polynom vom Grad $\le n$

$$\det(M) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \underbrace{m_{i_1,1} \cdot \cdots \cdot m_{i_n,n}}_{n\text{-faches Produkt}} \underbrace{\sigma(i_1,\dots,i_n)}_{\in \{-1,0,1\}}$$

$\Downarrow$

Für $M = A - \lambda I$: Polynome vom Grad $n$

**Definition VII.4.0.C** (Charakteristisches Polynom).
*Die Funktion*

$$\chi_{\mathbf{A}}(\lambda) := \det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det \begin{bmatrix} a_{1,1} - \lambda & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - \lambda & a_{2,3} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & & \cdots & a_{n,n} - \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

*heisst das charakteristische Polynom der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$.

$\hookrightarrow$ Polynom vom Grad $\le n$

**Beispiel ($n = 2$):**

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{bmatrix} = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{21} a_{12}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + \det(A) \qquad [\text{Grad } 2]$$

Nullstellen: $\lambda_{1/2} = \frac{1}{2}\left((a_{11} + a_{22}) \pm \sqrt{D}\right)$, $D = \underbrace{(a_{11} + a_{22})^2 - 4\det(A)}_{\text{Diskriminante},\ \ge 0}$

**Beispiel ($n = 3$):**

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{bmatrix} \begin{matrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$= (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)(a_{33} - \lambda) + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32}$$

$$- a_{31}(a_{22} - \lambda) a_{13} - a_{32} a_{23} (a_{11} - \lambda) - (a_{33} - \lambda) a_{21} a_{12}$$

$$= -\lambda^3 + (a_{11} + a_{22} + a_{33})\lambda^2 - (a_{11} a_{22} + a_{11} a_{33} + a_{22} a_{33} + a_{31} a_{13} + a_{32} a_{23} + a_{21} a_{12})\lambda + \det(A) \qquad [\text{Grad } 3]$$

Es gilt:

$$\boxed{\sigma(A) = \{ \lambda : \chi_A(\lambda) = 0 \}}$$

Spektrum

▷ $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ kann höchstens $n$ verschiedene Eigenwerte haben

(da ein Polynom vom Grad $\leq n$ höchstens $n$ Nullstellen haben kann)

Schritte zur Diagonalisierung "von Hand"

① Berechne $\chi_A(\lambda)$

② Nullstellen von $\chi_A(\lambda)$ [Tricks für $n \geq 3$]

③ Berechne $\text{Kern}(A - \lambda I)$, $\lambda \in \sigma(A)$ : ZSF

Resultate zu $\sigma(A)$, $\chi_A(\lambda)$:

$T \in \mathbb{R}^{n,n}$ invertierbar $\Rightarrow$ $\boxed{\chi_{T^{-1}AT}(\lambda) = \chi_A(\lambda)}$

$$\left[ \det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T) = \det(T^{-1}(A - \lambda I)T) = \right.$$

Determinantenmultiplikationssatz!

$$\left. = \cancel{\det(T^{-1})} \cdot \det(A - \lambda I) \cancel{\det(T)} \right]$$

**Satz VII.4.0.G** (Spektrum von Matrix und Transponierter).
*Für jede Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gilt*

$$\sigma(\mathbf{A}) = \sigma(\mathbf{A}^\top) .$$

da $\det(M) = \det(M^T)$

Anwendung auf stochastische Matrizen:

↳ $\sum_{i=1}^{n} (A)_{ij} = 1 \quad \forall j$

$$\Rightarrow \sum_{j=1}^{n} (A^T)_{ij} = 1$$

$$\Rightarrow A^T \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow 1 \in \sigma(A^T) = \sigma(A)$$

Für Markov-Ketten mit stochastischer Rekursionsmatrix $A$: $\underline{x}^{(\infty)} = \lim_{k \to \infty} \underline{x}^{(k)}$ erfüllt

$$A \underline{x}^{(\infty)} = \underline{x}^{(\infty)}$$

↳ EV zum EW $\underline{1}$

Konsequenz aus:

$$\det\left(\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \hline \mathbf{O} & \mathbf{C} \end{array}\right]\right) = \det(\mathbf{A}) \cdot \det(\mathbf{C}), \quad \begin{array}{l} \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{k,k}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,m}, \\ \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,m}, \mathbf{O} \mathrel{\hat{=}} \text{Nullmatrix}. \end{array} \qquad \text{(IV.5.3.L)}$$

$$M = \left[\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline O & C \end{array}\right]$$

$$\chi_M(\lambda) = \det\left[\begin{array}{c|c} A-\lambda I & B \\ \hline & C-\lambda I \end{array}\right]$$

$$= \det(A-\lambda I) \cdot \det(C-\lambda I)$$

$$= \underbrace{\chi_A(\lambda) \cdot \chi_C(\lambda)}_{\text{Produkt der charakteristischen Polynome}} \qquad (*)$$

z.B.: $k = m = 2 \Rightarrow M \in \mathbb{R}^{4,4}$, $\chi_M$ hat Grad 4, d.h. die Berechnung der Nullstellen ist i.a. unmöglich.

Aber hier lässt sich $\chi_M$ als Produkt von zwei Polynomen vom Grad $\leq 2$ schreiben, deren Nullstellen über die Diskriminantenformel berechnet werden können.

Aus $(*)$: $\quad \sigma(M) = \sigma(A) \cup \sigma(C)$

# 7.5. Diagonalisierbarkeit

VII.4.0.B : $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ diagonalisierbar $\Leftrightarrow$ $\exists$ Basis des $\mathbb{R}^n$ aus EV

Bsp. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ nicht diagonalisierbar

Diagonalisierung auch von reellen Matrizen geht über $\mathbb{C}$

Rechnen in $\mathbb{C}$ wie in $\mathbb{R}$

Im $\mathbb{C}^n$ und mit komplexen Matrizen kann man (fast immer) so rechnen wie im $\mathbb{R}^n$, wenn man nur die Addition und Multiplikation in $\mathbb{C}$ benutzt.

(Fast) alle Konzepte und Resultate über reelle Vektoren/Matrizen übertragen sich auch auf den komplexen Fall.

z.B. Für $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{m,n}$: $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$, $\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$.

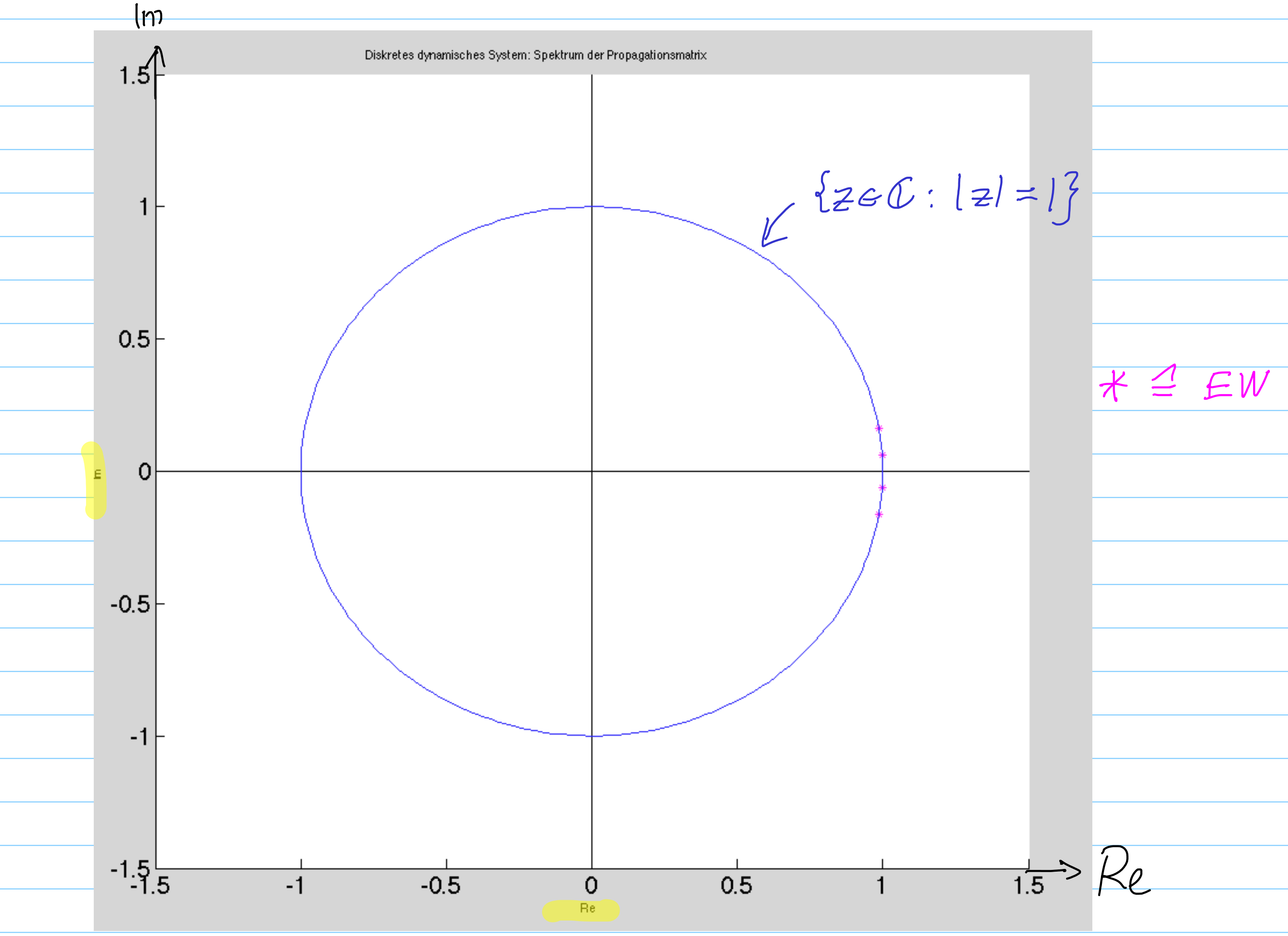
z.B. auch die Konzepte der Invertierbarkeit, Diagonalisierbarkeit, etc.

z.B. Satz über Verhalten linearer Rekursionen gilt auch für EW $\lambda_i \in \mathbb{C}$

$\underline{x}^{(k+1)} = A\underline{x}^{(k)}$, $\sigma(A) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \chi_A(\lambda) = 0\}$

$\forall \lambda \in \sigma(A) \subset \mathbb{C} : |\lambda| \leq 1 \Rightarrow \underline{x}^{(k)}$ beschränkt

Anwendung auf Bsp. VII.1.0.R "Partikelbewegung"



Was ist in $\mathbb{C}$ anders:

Komplexe Konjugation

$v, w \in \mathbb{C}^n$: $\langle v, w \rangle = \sum_{j=1}^{n} (v)_j \overline{(w)_j}$

Länge: $\|v\|^2 = \sum_{j=1}^{n} (v)_j \overline{(v)_j} = \sum_{j=1}^{n} |(v)_j|^2 \geq 0$

In $\mathbb{R}$: $\langle v, Aw \rangle = \langle A^T v, w \rangle$

In $\mathbb{C}$: Modifizierte Transposition (zusätzlich konjugieren)

$A \in \mathbb{C}^{m,n}$: $(A^H)_{k,l} = \overline{(A)}_{l,k}$

$\Rightarrow \langle v, Aw \rangle = \langle A^H v, w \rangle \quad \forall \; v \in \mathbb{C}^m, \; w \in \mathbb{C}^n$

**Definition VII.3.0.C** (Unitäre Matrix).
*Eine Matrix* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *heisst unitär, wenn* $\mathbf{U}^{-1} = \mathbf{U}^{\mathrm{H}}$.

$\hookrightarrow$ Verallgemeinerung der orth. Matrizen

Beispiel für konjugieren & transponieren:

$$\begin{bmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^H = \begin{bmatrix} -i & 1 \\ i & 1 \end{bmatrix}, \text{ da } \bar{i} = -i \,!$$

**Satz VII.5.1.A** (Lineare Unabhängigkeit von Eigenvektoren).
*Für eine Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *seien* $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, *Eigenvektoren zu paarweise verschiedenen Eigenwerten. Dann ist* $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}$ *linear unabhängig.*

B $(k=2)$:

$A v^1 = \lambda_1 v^1$
$A v^2 = \lambda_2 v^2$ $\quad \lambda_1 \neq \lambda_2, \; \lambda_1 \neq 0$

$c_1 v^1 + c_2 v^2 = 0 \quad (\mathrm{I}), \; c_1, c_2 \in \mathbb{C}$

z.z. $c_1 = c_2 = 0$

$\hookrightarrow A \cdot (\mathrm{I}) \Rightarrow \quad c_1 A v^1 + c_2 A v^2 = 0$

$c_1 \lambda_1 v^1 + c_2 \lambda_2 v^2 = 0 \quad (\mathrm{II})$

$(\mathrm{II}) - \lambda_1 \cdot (\mathrm{I}) \Rightarrow \quad \underbrace{(\lambda_2 - \lambda_1)}_{\neq 0} c_2 v^2 = 0 \quad \Rightarrow c_2 = 0$

$v^1, v^2$ EV $\Rightarrow v^2 \neq 0$ $\quad \square$

**Satz VII.5.1.B** (Kriterien für Diagonalisierbarkeit II).
*Eine quadratische Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *mit Eigenwerten* $\sigma(\mathbf{A}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\} \subset \mathbb{C}$, $1 \leqslant k \leqslant n$ *ist diagonalisierbar, wenn*

*(i) sie* $n$ *verschiedene Eigenwerte hat, oder*

*(ii)* $\sum_{l=1}^{k} \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A} - \lambda_l \mathbf{I}) = n$.

**Satz VII.5.2.F** (Diagonalisierbarkeit von normalen Matrizen).
*Gilt für* $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n,n}$, *dass* $\mathbf{A}\mathbf{A}^H = \mathbf{A}^H\mathbf{A}$, *dann gibt es eine* unitäre *Matrix* $\mathbf{U} \in \mathbb{C}^{n,n}$ *so, dass*

$$\mathbf{U}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{U} = \mathbf{D} := \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n,n}.$$

*Die* $\lambda_k \in \mathbb{C}$ *sind die Eigenwerte von* $\mathbf{A}$, *die Spalten von* $\mathbf{U}$ *die zugehörige* orthonormale *Menge von Eigenvektoren.*

$U$ unitär $\Rightarrow$ $U^{-1} = U^H$ $\Rightarrow$ $U$ spielt nun Rolle von $S$

$\Updownarrow$ $\qquad$ $\hookrightarrow$ Spalten sind EV von $A$

$U^H U = I$

$U = [u^1, \dots, u^n]$ : $\quad \langle u^j, u^k \rangle = \begin{cases} 1 & , j = k \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$

Wichtige Klassen normaler Matrizen (d.h. $A^H A = A A^H$)

- $A = A^H$ ($A \in \mathbb{R}^{n,n}$ : $A = A^T$ : symmetrische Matrizen)

In $\mathbb{C}$ : $\quad \langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle} \quad \forall v, w \in \mathbb{C}^n$

$\hookrightarrow \underbrace{\langle Av, v \rangle}_{\in \mathbb{C}} = \langle v, A^H v \rangle = \langle v, Av \rangle = \overline{\langle Av, v \rangle}$

$\Rightarrow \langle Av, v \rangle \in \mathbb{R}$

$\lambda \in \sigma(A)$, EV $v \neq 0$ : $\quad Av = \lambda v$

$\underbrace{\langle Av, v \rangle}_{\in \mathbb{R}} = \langle \lambda v, v \rangle = \lambda \underbrace{\langle v, v \rangle}_{\in \mathbb{R}}$

$\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$

$A = A^H \quad \Rightarrow \quad \sigma(A) \subset \mathbb{R}$

$\rightarrow$ Spezialversion falls $A \in \mathbb{R}^{n,n}$, $A = A^T$

Dann genügt Rechnen in $\mathbb{R}$ :

**Satz VII.5.2.G** (Relle Diagonalisierbarkeit von symmetrischen Matrizen, Hauptachsentransformation).
*Zu jeder* symmetrischen Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gibt es eine* orthogonale *Matrix* $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *so, dass*

$$\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q} = \mathbf{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

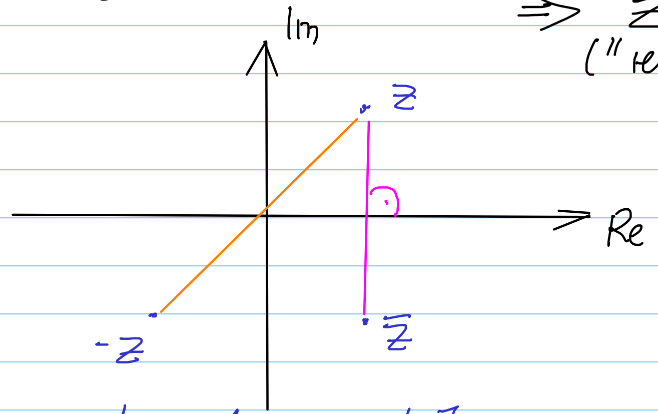
*Die Spalten von* $\mathbf{Q}$ *bilden eine* Orthonormalbasis *des* $\mathbb{R}^n$ *aus Eigenvektoren von* $\mathbf{A}$.

- $A^H = -A$ ("schiefsymmetrisch")

$\lambda \in \sigma(A)$, EV $v \neq 0$ : $\quad Av = \lambda v$

$\underbrace{\langle Av, v \rangle}_{=: z \in \mathbb{C}} = \langle v, A^H v \rangle = \langle v, -Av \rangle = \underbrace{-\overline{\langle Av, v \rangle}}_{-\bar{z}}$

$\Rightarrow z \in i\mathbb{R}$ ("rein imaginär")




$\longrightarrow$ [gleiches Argument] : $\quad \sigma(A) \subset i\mathbb{R}$

- $A^H = A^{-1}$ (unitäre Matrizen)

$$\|A\underline{x}\|^2 = \langle A\underline{x}, A\underline{x}\rangle = \langle \underline{x}, \underbrace{A^H A}_{=I}\underline{x}\rangle = \|x\|^2 \quad (*)$$

$\lambda \in \sigma(A)$, $\underline{v}$ EV: $A\underline{v} = \lambda\underline{v}$, $\underline{v} \neq 0$

$$(*) \Rightarrow 1 \cdot \|\cancel{\underline{v}}\| = \|A\underline{v}\| = \|\lambda\underline{v}\| = |\lambda|\,\|\cancel{\underline{v}}\|$$

$$\Rightarrow \quad |\lambda| = 1$$