Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Prof. Ralf Hiptmair

Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich

Vorlesung für D-BAUG Herbstsemester 2014

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/linalgnum_BAUG
www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/

Kapitel III. Unterräume und Basen

✎ Notation: $\mathcal{V} := \mathbb{R}^{m,n} \mathrel{\hat=}$ Menge von $m \times n$-Matrizen, $m, n \in \mathbb{N}$ (in jedem Kontext sind m, n fest, aber oft nicht eigens spezifiziert)

Spezialfälle: Spaltenvektoren ($n = 1$), Zeilenvektoren ($m = 1$)

↳ "einfache" Option

Verfügbar in $\mathcal{V}$: Addition & Skalarmultiplikation

Sprachgebrauch: Elemente von $\mathcal{V}$ werden als "Vektoren" bezeichnet, auch wenn es sich vielleicht um Matrizen handelt.

→ Linearkombinationen

3.1. Erzeugnisse / Span und Unterräume

Definition III.1.0.A (Span/Erzeugnis).
Für gegebene Vektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k \in \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, heisst die Menge

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots \mathbf{v}^k\}) := \left\{ \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}^j,\ \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \right\} \text{"} = \left\{ [\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k] \cdot \mathbf{a},\ \mathbf{a} \in \mathbb{R}^k \right\} \text{"}$$

aller möglicher Linearkombinationen (→ Definition II.2.0.A) von $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$ der Span oder das Erzeugnis von $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k$.

Konvention: $\mathrm{Span}\, \emptyset = \{\underline{0}\}$

$k = 1$: $\mathrm{Span}\{\underline{v}\} = \{\alpha \underline{v},\ \alpha \in \mathbb{R}\}$

Veranschaulichung von Span in 3D

$k = 1 \Rightarrow$ Gerade durch 0

$k = 2 \Rightarrow$ Ebene durch 0

Immer: $\underline{0} \in \mathrm{Span}\{\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^k\}$

$\underline{u} \in \mathrm{Span}\{..\} \Rightarrow -\underline{u} \in \mathrm{Span}\{\dots\}$

Definition III.1.0.C (Unterraum).
Eine (Teil)menge von Vektoren $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ heisst Unterraum (UR), wenn gilt

- $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{U} \Rightarrow \mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathcal{U}$,
- $\mathbf{v} \in \mathcal{U} \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathcal{U}$ *für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$. $\Rightarrow \underline{0} \in \mathcal{U}$

Korollar III.1.0.D (Schnitt von Unterräumen).
Sind $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ Unterräume von $\mathcal{V}$, dann ist auch $\mathcal{U} \cap \mathcal{W}$ ein Unterraum.

B (teilweise) : $\underbrace{z_1, z_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}}$: z.z. : $z_1 + z_2 \in \mathcal{U} \cap \mathcal{W}$

$\Rightarrow \underbrace{z_1, z_2 \in \mathcal{U}}$ und $\underbrace{z_1, z_2 \in \mathcal{W}}$

UR : $z_1 + z_2 \in \mathcal{U}$ $\quad z_1 + z_2 \in \mathcal{W}$

□

"Mengenkalkül"

Addition eines Vektors zu einer Menge $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$!

$\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, $\mathcal{M} \subset \mathcal{V}$: $\mathbf{v} + \mathcal{M} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} : \mathbf{x} = \mathbf{v} + \mathbf{m}$ für ein $\mathbf{m} \in \mathcal{M}\} \subset \mathcal{V}$

Addition zweier Mengen $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$!

$\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$: : $\mathcal{U} + \mathcal{W} := \{\mathbf{x} \in \mathcal{V} : \mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{w}$ für irgendwelche $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$, $\mathbf{w} \in \mathcal{W}\} \subset \mathcal{V}$

Korollar III.1.0.F (Summe von Unterräumen).
Sind $\mathcal{U}, \mathcal{W} \subset \mathcal{V}$ Unterräume von $\mathcal{V}$, dann ist auch $\mathcal{U} + \mathcal{W}$ ein Unterraum.

B (teilweise) : $\underbrace{z_1, z_2 \in \mathcal{U} + \mathcal{W}}$: z.z. : $z_1 + z_2 \in \mathcal{U} + \mathcal{W}$

$\Rightarrow \left.\begin{array}{l} \exists\, u_1, w_1 : z_1 = u_1 + w_1 \\ \exists\, u_2, w_2 : z_2 = u_2 + w_2 \end{array}\right\} \Rightarrow z_1 + z_2 = \underbrace{u_1 + u_2}_{\in \mathcal{U}} + \underbrace{w_1 + w_2}_{\in \mathcal{W}}$

Verwende Unterraumeigenschaft:

□

Satz III.1.0.G (Erzeugnisse sind Unterräume).
Für eine Teilmenge $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ sind äquivalent:

(i) Es gibt $k \in \mathbb{N}$ und Vektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k \in \mathcal{V}$, so dass $\mathcal{U} = \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\})$.

(ii) $\mathcal{U}$ ist ein Unterraum von $\mathcal{V}$.

B (i) $\Rightarrow$ (ii) [teilweise]

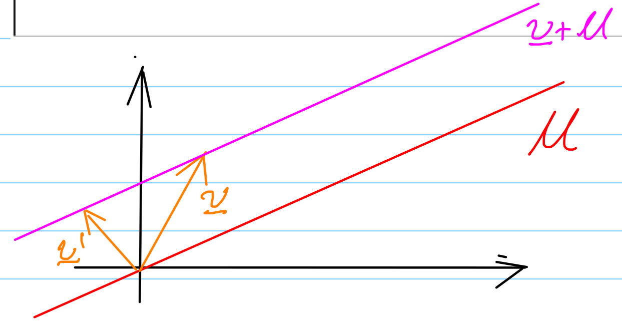
$\underbrace{u, w \in \mathrm{Span}\{v^1, \dots, v^k\}}$: z.z. : $u + w \in \mathrm{Span}\{\dots\}$

$\left.\begin{array}{l} \exists\, \alpha_\ell : u = \sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell v^\ell \\ \exists\, \beta_\ell : w = \sum_{\ell=1}^{k} \beta_\ell v^\ell \end{array}\right\} \quad u + w = \sum_{\ell=1}^{k} (\alpha_\ell + \beta_\ell) v^\ell$

□

Definition III.1.0.H (Erzeugendensystem). (ES)
Gilt für einen Unterraum $\mathcal{U}$ von $\mathcal{V}$, dass $\mathcal{U} = \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\})$ für Vektoren $\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k \in \mathcal{V}$, so heisst die Menge $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}$ ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$.

Definition III.1.0.J (Affiner Teilraum).
Eine (Teil)menge von Vektoren $\mathcal{A} \subset \mathcal{V}$ heisst affiner Teilraum von $\mathcal{V}$, wenn es einen Unterraum $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ von $\mathcal{V}$ und einen Vektor $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ so gibt, dass $\mathcal{A} = \mathbf{v} + \mathcal{U}$.



$\leftarrow \mathcal{A} \;\hat{=}$ parallelverschobener Unterraum

Satz III.1.0.K (Nichtleere Lösungsmengen von LGS sind affine Teilräume).
Die Lösungsmenge eines lineare Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *ist entweder leer oder eine affiner Teilraum von* $\mathbb{R}^n$.

→ Anwendung der Resultate aus Kap. I: I.4.5.B

Satz I.4.5.B (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).
Sei $\mathbf{Zx} = \mathbf{y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gemäss* Definition I.4.3.A, $r := \mathrm{Rang}(\mathbf{Z})$ (→ Definition I.4.4.H), $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die geordnete* ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) *Indexmenge der Pivotspalten*, $\{j_1, \dots, j_{n-r}\} := \{1, \dots, n\} \backslash \{i_1, \dots, i_r\}$ (*leer, wenn* $r = n$).

(i) *Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, wenn* $y_j \neq 0$ *für ein* $j > r$.

(ii) *Andernfalls ist die Lösungsmenge* $\mathcal{L}$ *von* $\mathrm{LGS}(\mathbf{Z}; \mathbf{y})$ *gegeben durch*

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} (\mathbf{x})_{i_k} = y_k - \sum_{\ell=1}^{n-r} \alpha_\ell \cdot (\mathbf{Z})_{k, j_\ell},\ k \in \{1, \dots, r\}, \\ (\mathbf{x})_{j_\ell} = \alpha_\ell,\ \ell \in \{1, \dots, n-r\} \end{array},\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

Spezialfall:

ZSF der Koeffizientenmatrix A ⇒

$r = \mathrm{Rang}(A)$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{1,r+1} & \dots & z_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{2,r+1} & \dots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & z_{r-1,r+1} & \dots & z_{r-1,n} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & z_{r,r+1} & \dots & z_{r,n} \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Annahme: $y_{r+1} = \dots = y_n = 0$ für rechte Seite y der ZSF

Vgl. Bem. II.2.0.F

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\underline{A};\underline{b})) = \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\underline{Z},\underline{y})) =$$

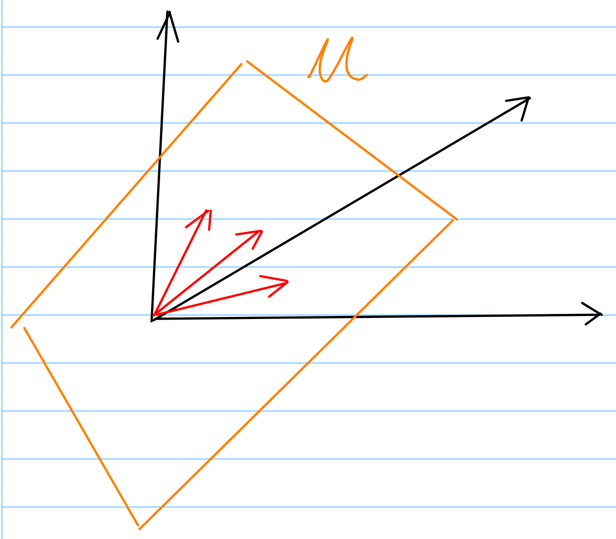
$$= \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{y})_{1:r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} z_{1,r+1} & z_{1,r+2} & \dots & \dots & z_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ z_{r,r+1} & z_{r,r+2} & \dots & \dots & z_{r,n} \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{c},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\}$$

Verschiebungsvektor

c ≙ Parametervektor

$$= \begin{bmatrix} (y)_{1:r} \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{Span}\left\{ \begin{bmatrix} z_{1,r+1} \\ \vdots \\ z_{r,r+1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} z_{1,n} \\ \vdots \\ z_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

3.2. Lineare Unabhängigkeit, Basis und Dimension



Vektoren eines ES überflüssig* ?

* $\mathrm{Span}\{v^1, .., v^k\} = \mathrm{Span}\{v^1,..,v^k\}\setminus\{v^j\}$

Definition III.2.0.B (Lineare (Un)abhängigkeit).
Eine endliche Menge von Vektoren $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, *heisst linear unabhängig (l.u.), falls die Vektoren sich nur trivial zu Null linear kombinieren lassen:*

$$\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V} \ \text{ l.u. } :\Leftrightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mathbf{v}^j = \mathbf{0} \ \Rightarrow \ \alpha_j = 0 \ \forall j \in \{1, \dots, k\} \right)$$

Diese Folgerung ist der Kern der Definition

Andernfalls heisst $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}$ *linear abhängig (l.a.).*

Lemma III.2.0.C. *Ist* $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, *linear abhängig, dann gibt es* $j \in \{1, \dots, k\}$ *so, dass*

$$\mathbf{v}^j \in \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}\setminus\{\mathbf{v}^j\}) \ \Leftrightarrow \ \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}\setminus\{\mathbf{v}^j\}) .$$

B: $\{v^1, .., v^k\}$ l.a. $\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} \alpha_j v^j = 0$ mit $\alpha_\ell \neq 0$

$\Rightarrow \quad v^\ell = \frac{1}{\alpha_\ell} \sum_{j\neq \ell} \alpha_j v^j \in \mathrm{Span}\{v^1 .., v^k\}\setminus\{v^\ell\}$ □

Lemma III.2.0.D. *Ist* $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, linear unabhängig *so gilt* für alle $j \in \{1, \dots, k\}$ (A)

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}\setminus\{\mathbf{v}^j\}) \neq \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}) . \quad (B)$$

Widerspruchsbeweis:

Z.z.: Aussage (A) $\Rightarrow$ Aussage (B)

(A) und Gegenteil von (B) $\Rightarrow$ ↯ unmöglich

Annahme: l.u. und $\exists j \in \{1, .., k\}$:

$\mathrm{Span}\{v^1, .., v^k\}\setminus\{v^j\} = \mathrm{Span}\{v^1, .., v^k\}$

$\Rightarrow \quad v^j \in \mathrm{Span}\{v^1, ..., v^k\}\setminus\{v^j\}$

$\exists \alpha_\ell \in \mathbb{R}: \ v^j = \sum_{\ell \neq j} \alpha_\ell v^\ell \Leftrightarrow 1 \cdot v^j - \sum_{\ell\neq j} \alpha_\ell v^\ell = 0$

↯ zur l.u. □

Lemma III.2.0.E. *Ist* $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$, *linear unabhängig und*

$$\mathbf{w} \in \mathcal{V} \quad \text{mit} \quad \mathbf{w} \notin \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}) ,$$

dann ist auch die Menge $\{\mathbf{w}, \mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}$ *linear unabhängig.*

Lemma III.2.0.F (Transformation linear (un)abhängiger Mengen in $\mathbb{R}^n$).
Für jede invertierbare Matrix $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gilt*

$$\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{R}^n \ \text{ l.u. } \Longleftrightarrow \ \{\mathbf{M}\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{M}\mathbf{v}^k\} \subset \mathbb{R}^n \ \text{ l.u. .}$$

Definition III.2.0.G (Basis).
Ein linear unabhängiges Erzeugendensystem eines Unterraums $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ heisst eine Basis von $\mathcal{U}$, d.h. kein Vektor des ES ist überflüssig.

Basis $\hat{=}$ minimales ES

Korollar III.2.0.H (Existenz von Basen).
Jeder nichttriviale ($\neq \{0\}$) Unterraum von $\mathcal{V}$ besitzt eine Basis.

"Bauen" einer Basis von $\mathcal{U}$: Algorithmus

$\mathcal{B} = \emptyset$
while (Span $\mathcal{B} \neq \mathcal{U}$)
Wähle $\underline{w} \in \mathcal{U} \setminus$ Span $\mathcal{B}$
$\mathcal{B} \leftarrow \mathcal{B} \cup \{\underline{w}\}$

III.2.0.E $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ l.u.

Abbruch (?)* $\Rightarrow$ $\mathcal{B}$ Basis von $\mathcal{U}$

Ja, wegen $\dim \mathcal{V} < \infty$
Lemma III.2.0.M

Satz III.2.0.J (Gleichmächtigkeit von Basen).
Alle Basen eines Unterraums $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ besitzen die gleiche Anzahl von Elementen.

Widerspruchsbeweis:

Annahme $\{\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^n\}$, $\{\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^{n-1}\}$ Basen von $\mathcal{U}$

$$\exists\, s_{k,\ell} \in \mathbb{R}: \quad \underline{v}^\ell = \sum_{k=1}^{n-1} s_{k,\ell}\, \underline{w}^k, \quad \ell \in \{1, \dots, n\}$$

$$S = (s_{k,\ell}) \in \mathbb{R}^{n-1,n}$$

$$1.4.5.G: \ \exists\, \underline{c} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\underline{0}\}: \ S\underline{c} = \underline{0}$$

$$\sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \underline{v}^\ell = \sum_{\ell=1}^{n} c_\ell \sum_{k=1}^{n-1} s_{k,\ell}\underline{w}^k = \sum_{k=1}^{n-1} \underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n} s_{k,\ell} c_\ell\right)}_{(S\underline{c})_k = 0} \underline{w}^k = \underline{0}$$

$\lightning$ l.u. $\{\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^n\}$

$\square$

Definition III.2.0.K (Dimension).
Die Anzahl der Elemente einer (beliebigen) Basis eines Unterraums wird als dessen Dimension bezeichnet.

✎ Notation: $\dim \mathcal{U}$ $\hat{=}$ Dimension des Unterraums $\mathcal{U}$

$$\Rightarrow \dim \mathbb{R}^n = n$$

$$\text{Basis} \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$\dim \mathbb{R}^{m,n} = mn$$

$$\text{Basis} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & & & \\ & & & \\ 0 & & & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & & 0 \end{bmatrix}, \dots\dots, \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 \\ 0 & \dots\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Lemma III.2.0.M (Lineare Abhängigkeit von mehr als $\dim$ Vektoren).
Sei $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *ein Unterraum und* $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{U}$, $k \in \mathbb{N}$.

Ist $k > \dim\mathcal{U}$, *dann ist* $\{\mathbf{v}^1,\dots,\mathbf{v}^k\}$ *linear abhängig*.

Nachweis: $\{\underline{v}^1,\dots,\underline{v}^k\}$ l.u.

Ansatz: $\sum_{\ell=1}^{k} \alpha_\ell \underline{v}^\ell = \underline{0}$ (*)

Spezialfall: $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$: (*) $\Leftrightarrow$ LGS $V\underline{\alpha} = 0$

$V = [\underline{v}^1,\dots,\underline{v}^k] \in \mathbb{R}^{n,k}$

z.z.: $\alpha_\ell = 0 \quad \forall \ell \in \{1,\dots,k\}$

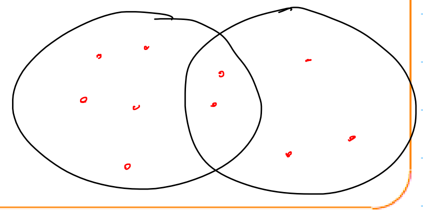
Im Spezialfall: $\underline{\alpha} = 0$ ist einzige Lösung des LGS

Satz III.2.0.N (Dimensionssatz für Unterräume).
Für beliebige Unterräume $\mathcal{W},\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ *gilt*

$$\dim(\mathcal{W}+\mathcal{U}) = \dim\mathcal{W} + \dim\mathcal{U} - \dim(\mathcal{W}\cap\mathcal{U}) .$$

Satz III.2.0.P (Mächtigkeiten von Vereinigungs- und Schnittmengen).
Für beliebige endliche Teilmengen $\mathcal{M},\mathcal{L}$ *einer Menge gilt*

$$\sharp(\mathcal{M}\cup\mathcal{L}) = \sharp\mathcal{M} + \sharp\mathcal{L} - \sharp(\mathcal{M}\cap\mathcal{L}) .$$



✎ Notation: $\sharp\mathcal{M}$ $\hat{=}$ Anzahl der Elemente (Mächtigkeit) einer endlichen Menge $\mathcal{M}$

Wiederholung: Lineare (Un)abhängigkeit

$\{\underline{u},\underline{v},\underline{w}\} \subset \mathcal{V}$ l.u. : $\{\underline{u}+\underline{v}, \underline{v}+\underline{w}, \underline{w}+\underline{u}\}$ l.u. ?

$c_1(\underline{u}+\underline{v}) + c_2(\underline{v}+\underline{w}) + c_3(\underline{w}+\underline{u}) = \underline{0}$ (*)

z.z.: $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} = \underline{0}$ folgt aus (*)

$(c_1+c_3)\underline{u} + (c_2+c_1)\underline{v} + (c_2+c_3)\underline{w} = \underline{0}$

$\Rightarrow c_1+c_3 = c_2+c_1 = c_2+c_3 = 0$

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\underline{c} = \underline{0} \xrightarrow{\text{G.E.}} \text{ZSF} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\underline{c} = \underline{0} \Rightarrow \underline{c} = 0$

$\xrightarrow{\text{G.E.}} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Z.S.F mit Rang(Z) = 2

$\exists\, \underline{c} \neq 0$

3.3. Bild und Kern von Matrizen

Definition III.3.0.B (Bild und Kern einer Matrix).
Für eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m,n \in \mathbb{N}$, *ist ihr Kern oder Nullraum definiert durch*

$$\mathrm{Kern}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}\} = \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{0})) \subset \mathbb{R}^n$$

während ihr Bild oder Spaltenraum gegeben ist durch

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) := \{\mathbf{A}\mathbf{c},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^n\} = \mathrm{Span}(\{(\mathbf{A})_{:,1},\dots,(\mathbf{A})_{:,n}\}) \subset \mathbb{R}^m$$

Korollar III.3.0.D.
Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m,n \in \mathbb{N}$, *ist* $\mathrm{Kern}(\mathbf{A})$ *ein Unterraum von* $\mathbb{R}^n$, *und* $\mathrm{Bild}(\mathbf{A})$ *ein Unterraum von* $\mathbb{R}^m$.

Satz III.3.0.F (Darstellungssatz für den Kern einer Matrix).
Sei $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ *die Zeilenstufenform der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gemäss* $\boxed{\text{Definition I.4.3.A}}$, $r := \operatorname{Rang}(\mathbf{Z})$ (→ $\boxed{\text{Definition I.4.4.H}}$).

(i) Falls $r = n$, *dann ist* $\operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$.

(ii) Falls $r < n$, *dann ist*

$$\operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = \operatorname{Span}(\{\mathbf{z}^1, \dots \mathbf{z}^{n-r}\})$$

$$\text{mit} \quad (\mathbf{z}^\ell)_j = \begin{cases} (\mathbf{Z})_{k,j_\ell} & \text{, für } j = i_k,\ k \in \{1, \dots, r\}, \\ -1 & \text{, für } j = j_\ell, \\ 0 & \text{, für } j \notin \{i_1, \dots, i_r, j_\ell\} \end{cases}, \quad \ell \in \{1, \dots, n-r\},$$

wobei $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die geordnete* ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) *Indexmenge der Pivotspalten,* $\{j_1, \dots, j_{n-r}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$.

Anwendung des folgenden Satzes auf $\underline{A}x = \underline{0}$ $[\Rightarrow y = \underline{0}]$

Satz I.4.5.B (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).
Sei $\mathbf{Zx} = \mathbf{y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gemäss* $\boxed{\text{Definition I.4.3.A}}$, $r := \operatorname{Rang}(\mathbf{Z})$ (→ $\boxed{\text{Definition I.4.4.H}}$), $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die geordnete* ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) *Indexmenge der Pivotspalten,* $\{j_1, \dots, j_{n-r}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$ *(leer, wenn* $r = n$*).*

~~*(i) Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, wenn* $y_j \neq 0$ *für ein* $j > r$.~~ irrelevant

(ii) Andernfalls ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ *von* $\operatorname{LGS}(\mathbf{Z}; \mathbf{y})$ *gegeben durch*

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} (\mathbf{x})_{i_k} = y_k - \sum_{\ell=1}^{n-r} \alpha_\ell \cdot (\mathbf{Z})_{k,j_\ell},\ k \in \{1, \dots, r\}, \\ (\mathbf{x})_{j_\ell} = \alpha_\ell,\ \ell \in \{1, \dots, n-r\} \end{array}, \ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

$r = n \Rightarrow$ (keine Parameter) $\mathcal{L} = \{\underline{0}\}$

Beispiel:

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 1 & z_{1,2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad r = 2, \quad n = 3$$

$i_1 = 1$, $i_2 = 3$

$\Rightarrow n - r = 1$ $\quad j_1 = 2$

$$\operatorname{Kern}(\underline{A}) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} z_{1,2} \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\} = \mathcal{L}(\operatorname{LGS}(\underline{A}, \underline{0}))$$

wenn $\underline{Z} \hat{=}$ ZSF von $\underline{A}$

Allgemeiner: (→ siehe II.2.0.F)

ZSF von $\underline{A}$:
↳ speziell

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{1,r+1} & \dots & z_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{2,r+1} & \dots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & z_{r-1,r+1} & \dots & z_{r-1,n} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & z_{r,r+1} & \dots & z_{r,n} \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}, \quad \operatorname{Rang}(\mathbf{Z}) = r \leqslant \min\{m, n\}$$

Pivotspalten $\quad j_1 = r+1 \ \dots \ j_{n-r} = n$

$$\mathcal{L}(\operatorname{LGS}(\mathbf{Z}; \mathbf{0})) = \left\{ \begin{bmatrix} z_{1,r+1} & z_{1,r+2} & \dots & \dots & z_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ z_{r,r+1} & z_{r,r+2} & \dots & \dots & z_{r,n} \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{c}, \ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\}$$

↑ ↑

Diese Spalten spannen den Kern von $\underline{A}$ auf

Whd: $\ker(A) \subset \mathbb{R}^m$ ist Unterraum

(i) $\underline{x}, \underline{y} \in \ker(A) \Rightarrow A\underline{x} = A\underline{y} = \underline{0}$ nach Def. ker

$A(\underline{x}+\underline{y}) = A\underline{x} + A\underline{y} = \underline{0}+\underline{0} = \underline{0} \Rightarrow \underline{x}+\underline{y} \in \ker(A)$

(ii) $\underline{x} \in \ker(A) \Rightarrow A\underline{x} = \underline{0}$

$A(\alpha\underline{x}) = \alpha A\underline{x} = \alpha \cdot \underline{0} = \underline{0} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \alpha\underline{x} \in \ker(A)$

Whd: $\ker\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = ?$ A

ZSF: $Z = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \ker(Z) = \ker(A) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

$\operatorname{Rang}(Z) = 2$, $j_1 = 3$, $i_1 = 1$, $i_2 = 2$ $= \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$

Basis von Bild(A) ?

$\operatorname{Bild}(A) = \operatorname{Span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

Satz III.3.0.K (Transformationen von Erzeugendensystemen).
Gegeben sei eine beliebige Menge $\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\operatorname{Span}(\{\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^k\}) = \operatorname{Span}(\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^k\}),$$

wenn

(i) $\mathbf{w}^\ell = \begin{cases} \mathbf{v}^\ell & \text{für } \ell \neq j, \\ \mathbf{v}^j + \beta\mathbf{v}^i & \text{für } \ell = j. \end{cases}$ *für beliebige* $i, j \in \{1, \ldots, l\}$, $i \neq j$, *und* $\beta \in \mathbb{R}$.

(ii) $\mathbf{w}^\ell = \begin{cases} \mathbf{v}^\ell & \text{für } \ell \neq j, \\ \alpha\mathbf{v}^j & \text{für } \ell = j. \end{cases}$ *für beliebige* $j \in \{1, \ldots, k\}$ *und* $\alpha \neq 0$.

(i): $\{\underline{v}^1, \ldots, \underline{v}^k\} \longrightarrow \{\underline{v}^1, \ldots, \underline{v}^j + \beta\underline{v}^i, \ldots, \underline{v}^k\}$

(ii): $\{\underline{v}^1, \ldots, \underline{v}^k\} \longrightarrow \{\underline{v}^1, \ldots, \alpha\underline{v}^j, \ldots, \underline{v}^k\}$

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$: Basis für Bild(A) ?

$\underline{b} \in \operatorname{Bild}(A) \Rightarrow \exists\, \underline{x} \in \mathbb{R}^n : A\underline{x} = \underline{b} \Rightarrow \mathcal{L}(\operatorname{LGS}(A,\underline{b})) \neq \emptyset$

(Erinnerung: Matrix × Vektor $\Leftrightarrow$ Linearkombination)

Satz I.4.5.B (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).
Sei $\mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gemäss Definition I.4.3.A,* $r := \operatorname{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→ Definition I.4.4.H),* $\{i_1, \ldots, i_r\} \subset \{1, \ldots, n\}$ *die geordnete* $(i_1 < i_2 < \cdots < i_r)$ *Indexmenge der Pivotspalten,* $\{j_1, \ldots, j_{n-r}\} := \{1, \ldots, n\} \setminus \{i_1, \ldots, i_r\}$ *(leer, wenn* $r = n$*).*

irrelevant

~~*(i) Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, wenn* $y_j \neq 0$ *für ein* $j > r$.~~

(ii) Andernfalls ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ *von* $\operatorname{LGS}(\mathbf{Z}; \mathbf{y})$ *gegeben durch*

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} (\mathbf{x})_{i_k} = y_k - \sum_{\ell=1}^{n-r} \alpha_\ell \cdot (\mathbf{Z})_{k,j_\ell}, \; k \in \{1, \ldots, r\}, \\ (\mathbf{x})_{j_\ell} = \alpha_\ell, \; \ell \in \{1, \ldots, n-r\} \end{array}, \; \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

Wähle spezielles $x \in \mathcal{L}$: Wähle Parameter

$\alpha_1 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$

$\Rightarrow \quad (x)_{i_k} = y_k \, , \quad (x)_{j_\ell} = 0$

$\downarrow$ x-Komponenten zu Nichtpivotspalten $= 0$!

$A\underline{x} = \underline{b} \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{r} (x)_{i_k} (A)_{:,i_k} = \underline{b}$

Satz III.3.0.G (Darstellungssatz für das Bild einer Matrix).
Sei $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *die Zeilenstufenform der Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gemäss Definition I.4.3.A,* $r := \mathrm{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→ Definition I.4.4.H), und* $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die geordnete* ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) *Indexmenge der Pivotspalten von* $\mathbf{A}$. *Dann gilt*

$$\mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Span}\left(\underbrace{\left\{(\mathbf{A})_{:,i_1} \dots, (\mathbf{A})_{:,i_r}\right\}}_{\text{Basis von Bild}(A)}\right) .$$

Whd: $A \in \mathbb{R}^{m,n}$

Basis von $\mathrm{Kern}(A) \Leftrightarrow$ Nicht-Pivotspalten der ZSF von A
[Satz III.3.0.F "Darstellungssatz"]

$\triangleright \quad \dim \mathrm{Kern}(A) = n - r \, , \quad r := \mathrm{Rang}(A)$

Basis von $\mathrm{Bild}(A)$ = Pivotspalten von A

$\triangleright \quad \dim \mathrm{Bild}(A) = r$

Korollar III.3.0.H (Dimensionssatz für Matrizen).
Für jede Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gilt*

(i) $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) = \mathrm{Rang}(\mathbf{A})$,

(ii) $\dim \mathrm{Bild}(\mathbf{A}) + \dim \mathrm{Kern}(\mathbf{A}) = n$.

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$: Zeilenraum von $A = \mathrm{Span}\{(A)_{1,:}, \dots, (A)_{m,:}\} \subset \mathbb{R}^{1,n}$

Satz III.3.0.K (Transformationen von Erzeugendensystemen).
Gegeben sei eine beliebige Menge $\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\} \subset \mathcal{V}$, $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\mathrm{Span}(\{\mathbf{w}^1, \dots, \mathbf{w}^k\}) = \mathrm{Span}(\{\mathbf{v}^1, \dots, \mathbf{v}^k\}) ,$$

wenn

(i) $\mathbf{w}^\ell = \begin{cases} \mathbf{v}^\ell & \text{für } \ell \neq j , \\ \mathbf{v}^j + \beta \mathbf{v}^i & \text{für } \ell = j . \end{cases}$ *für beliebige* $i, j \in \{1, \dots, l\}$, $i \neq j$, *und* $\beta \in \mathbb{R}$.
$\Leftrightarrow$ Zeilenkombination

(ii) $\mathbf{w}^\ell = \begin{cases} \mathbf{v}^\ell & \text{für } \ell \neq j , \\ \alpha \mathbf{v}^j & \text{für } \ell = j . \end{cases}$ *für beliebige* $j \in \{1, \dots, k\}$ *und* $\alpha \neq 0$.
$\Leftrightarrow$ Zeilenskalieren

$$A \xrightarrow{\text{Zeilenumformungen}} Z \quad (\text{ZSF von } A)$$

$\downarrow$ lassen Zeilenraum unverändert

$\mathrm{Zeilenraum}(A) = \mathrm{Zeilenraum}(Z)$

ZSF: $\quad Z = \begin{bmatrix} 1 & * & 0 & * & 0 & * & 0 \\ & & 1 & * & 0 & * & \vdots \\ & & & & 1 & * & 0 \\ & & & & & & 1 \\ & & 0 & & & & \end{bmatrix}$ $\updownarrow r$ $\Big\}$ linear unabhängig
$\downarrow$
Basis Zeilenraum

$r := \mathrm{Rang}(A)$

"Von der Seite betrachtet":

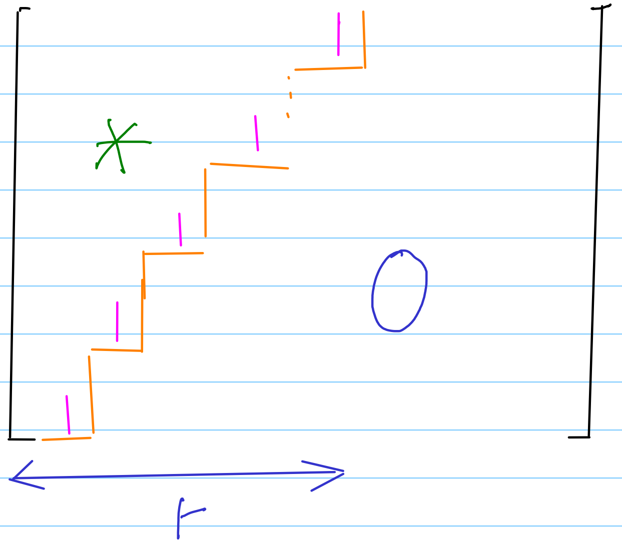
$\alpha_1 \cdot [\ | \quad * \quad] \; +$

$\alpha_2 \cdot [0 \cdots 0 \ | \quad * \quad] \; +$

$\alpha_3 \cdot [0 \cdots 0 \ | \quad * \quad] \; +$

$\vdots$

$\alpha_r \, [0 \cdots \cdots \ | \, * \,] = [0, \ldots, 0]$



$$\rhd \quad \underbrace{\dim \operatorname{Span}\{(A)_{1,:}, \ldots, (A)_{m,:}\}}_{= \dim \operatorname{Bild}(A^T)} = r$$

Satz III.3.0.M (Zeilenrang einer Matrix).
Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *gilt*

$$\dim \operatorname{Bild}(\mathbf{A}^\top) = \dim \operatorname{Span}(\{(\mathbf{A})_{1,:}, \ldots, (\mathbf{A})_{m,:}\}) = \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) .$$

Anwendung: Test auf Invertierbarkeit

dim (Zeilenraum) = Rang → Invertierbar

Satz III.3.0.P (Kriterien für Invertierbarkeit, vgl. $\boxed{\text{Satz II.5.0.E}}$).
Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sind äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ *ist invertierbar,*

(ii) $\mathbf{A}$ *hat vollen (maximalen) Rang:* $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = n$,

(iii) $\operatorname{Kern}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{0}\}$, [aus Dimensionssatz]

(iv) $\operatorname{Kern}(\mathbf{A}^\top) = \{\mathbf{0}\}$, [⇒ Zeilenrang = n & Satz III.3.0.M]

(v) $\operatorname{Bild}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^n$.

Bsp: Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ mit Spaltensummen = 0

z.B. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

$$\sum_{i=1}^{n} (A)_{i,j} = 0 \quad j \in \{1, \ldots, n\}$$

$$\Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} (A)_{i,:} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \text{Zeilen l.a.}$$

$$\Rightarrow \quad \underset{\text{Zeilenrang}}{\underset{\parallel}{\operatorname{Rang}(A)}} < n \quad \Rightarrow \quad A \text{ nicht invertierbar}$$

Anwendung: Strikt diagonaldominante Matrizen (SDD)

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$: $\quad |(A)_{i,i}| > \sum_{\substack{j \neq i \\ j=1}}^{n} |(A)_{i,j}| \quad , i \in \{1, \ldots, n\}$

("$\geq$" bei Matrizen für hydraulische Netzwerke)

z.z. A invertierbar $\Leftrightarrow$ $\operatorname{Kern}(A) = \{\underline{0}\}$

Z.z.: $A\underline{z} = 0 \Rightarrow \underline{z} = \underline{0}$, $\underline{z} \in \mathbb{R}^n$

Trick: $\ell \in \{1,\dots,n\}$ so, dass $|z_\ell| \geq |z_j| \;\; \forall j \in \{1,\dots,n\}$

$$(A\underline{z})_\ell = \underbrace{(A)_{\ell,\ell}}_{\neq 0} z_\ell + \sum_{j\neq \ell} (A)_{\ell,j} z_j = 0$$

$$\Rightarrow \quad z_\ell = -\frac{1}{(A)_{\ell,\ell}} \sum_{j\neq\ell} (A)_{\ell,j} z_j$$

$|\cdot|$

$\Rightarrow$ $\left(|\sum_i x_i| \leq \sum_i |x_i|\right)$ Analysis

$$|z_\ell| \leq \frac{1}{|(A)_{\ell,\ell}|} \sum_{j\neq\ell} |(A)_{\ell,j}|\,|z_j|$$

$|z_\ell| \geq |z_j|$

$$\leq \underbrace{\left(\frac{1}{|(A)_{\ell,\ell}|} \sum_{j\neq\ell} |(A)_{\ell,j}|\right)}_{< 1} \cdot |z_\ell|$$

SDD $\Rightarrow$

$\Rightarrow \quad |z_\ell| \leq \gamma |z_\ell|$ für ein $0 \leq \gamma < 1$

$\Rightarrow \quad |z_\ell| = 0 \Rightarrow |z_j| = 0 \;\; \forall j \in \{1,\dots,n\}$

$\Rightarrow \quad \underline{z} = 0$

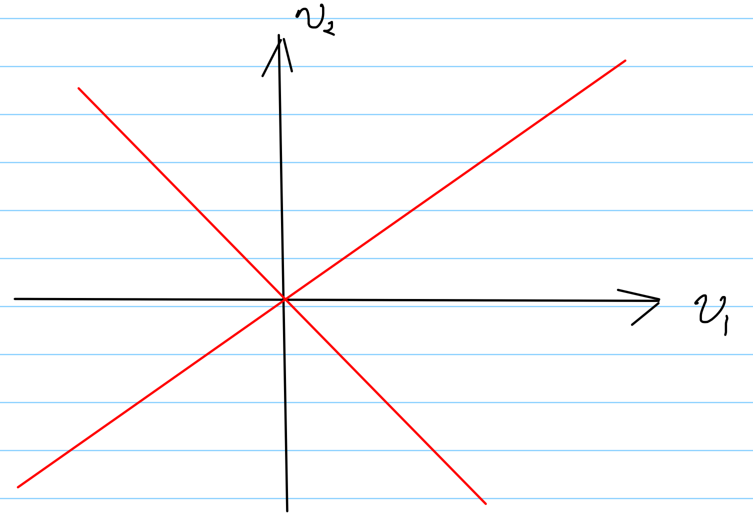
$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{ist SDD}$$

$\Rightarrow$ A invertierbar!

Serie 7, 1(g)

$\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^3 : v_1^2 - v_2^2 = 0 \}$ ist kein UR*

vgl. $\{ \underline{v} \in \mathbb{R}^2 : v_1^2 - v_2^2 = (v_1 - v_2)(v_1 + v_2) = 0 \}$



* besteht aus zwei Ebenen!

[Projektion auf v_1-v_2-Ebene]

Nachtrag zu Kern & Bild:

$A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$: $\mathcal{L}(LGS(A;b))$ ist affiner Raum

Satz III.1.0.K (Nichtleere Lösungsmengen von LGS sind affine Teilräume).
Die Lösungsmenge eines lineare Gleichungssystems $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *ist entweder leer oder eine affiner Teilraum von* $\mathbb{R}^n$.

Korollar III.3.0.J (Darstellungssatz für die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).
Zu einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *einem Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *gebe es* $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ *so, dass* $\mathbf{Ay} = \mathbf{b}$. *Dann gilt*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) = \mathbf{y} + \mathrm{Kern}(\mathbf{A})\,. \quad [\text{ein A.R.}]$$

eine beliebige Lösung

B: ① $\underline{x} \in \underline{y} + \mathrm{Kern}(A) \Rightarrow \exists\, \underline{z} \in \mathrm{Kern}(A) : \underline{x} = \underline{y} + \underline{z}$

$A\underline{x} = A\underline{y} + A\underline{z} = \underline{b} + \underline{0} = \underline{b}$

② $\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{L}(LGS(A;b)) \Rightarrow$

$$\begin{array}{rl} & A\underline{x} = \underline{b} \\ - & A\underline{y} = \underline{b} \\ \hline \end{array}$$

$A(\underline{x} - \underline{y}) = \underline{0} \Rightarrow \underline{x} - \underline{y} \in \mathrm{Kern}(A)$

$\underline{x} \in \underline{y} + \mathrm{Kern}(A)$

$\square$

3.4. Koeffizientenvektoren / Koordinaten und Basiswechsel

Korollar III.4.0.B (Eindeutigkeit der Basisdarstellung).
Sei $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \dots, \mathbf{b}^k\}$, $k \in \dim \mathcal{U}$, *eine Basis des Unterraums* $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.
Dann gibt es zu jedem $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ *eindeutige Koeffizienten* $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ *so, dass*

$$\mathbf{u} = \sum_{j=1}^{k} c_j \mathbf{b}^j\,. \tag{III.4.0.C}$$

Eindeutig? $\underline{u} = \sum_{j=1}^{k} c_j \underline{b}^j = \sum_{j=1}^{k} c_j' \underline{b}^j$, Z.z.: $c_j = c_j'$

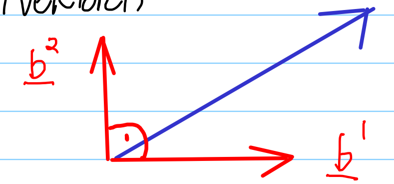
$\Rightarrow \sum_{j=1}^{k} (c_j - c_j')\underline{b}^j = \underline{0} \underset{\mathcal{B}\text{ l.u.}}{\Longrightarrow} c_j - c_j' = 0 \quad \forall j$ $\square$

Basiseigenschaft

Definition III.4.0.D (Koordinaten/Koeffizienten).
Die eindeutigen Zahlen $c_1, \dots, c_k \in \mathbb{R}$ *aus* $\boxed{\text{Korollar III.4.0.B}}$ *heissen die Koordinaten oder Koeffizienten des Vektors* $\mathbf{u}$ *bezüglich der Basis* $\mathcal{B}$.
Der Spaltenvektor $\mathbf{c} := \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^k$ *heisst der Koordinatenvektor oder Koeffizientenvektor von* $\mathbf{u}$ *bzgl.* $\mathcal{B}$ *und* $\boxed{\text{(III.4.0.C)}}$ *seine Basisdarstellung.*

$\underline{u} \in \mathcal{U} \xleftrightarrow{\mathcal{B}}$ Spaltenvektor $\underline{c}$

Kraftvektoren



$\underline{f} \leftrightarrow \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix}$

$\underline{f} = f_1 \underline{b}^1 + f_2 \underline{b}^2$

Basiskräfte

$\mathcal{B} = \{b^1, .., b^k\}$ "alte Basis" $\longleftrightarrow$ $\underline{c} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_k \end{bmatrix}$

$\mathcal{U} \in \mathcal{U}$ $\quad \tilde{\mathcal{B}} = \{\tilde{b}^1, .., \tilde{b}^k\}$ "neue Basis" $\longleftrightarrow$ $\underline{\tilde{c}} = \begin{bmatrix} \tilde{c}_1 \\ \vdots \\ \tilde{c}_k \end{bmatrix}$

Aus III.4.0.B ("Basisdarstellung")

$\exists\, s_{ij} \in \mathbb{R} : i,j \in \{1, ..., k\} : \quad \underline{\tilde{b}}^j = \sum_{i=1}^{k} s_{ij} \underline{b}^i \quad$ (III.4.E)

$\mathcal{U} \in \mathcal{U}$: $\quad \mathcal{U} = \sum_{j=1}^{k} c_j \underline{b}^j = \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \underline{\tilde{b}}^j$

$= \sum_{j=1}^{k} \tilde{c}_j \left(\sum_{i=1}^{k} s_{ij} \underline{b}^i \right)$

$= \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{k} s_{ji} \tilde{c}_i \right) \underline{b}^j$

$\Rightarrow \quad c_j = \sum_{i=1}^{k} s_{ji} \tilde{c}_i \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\underline{c} = S \underline{\tilde{c}}}$

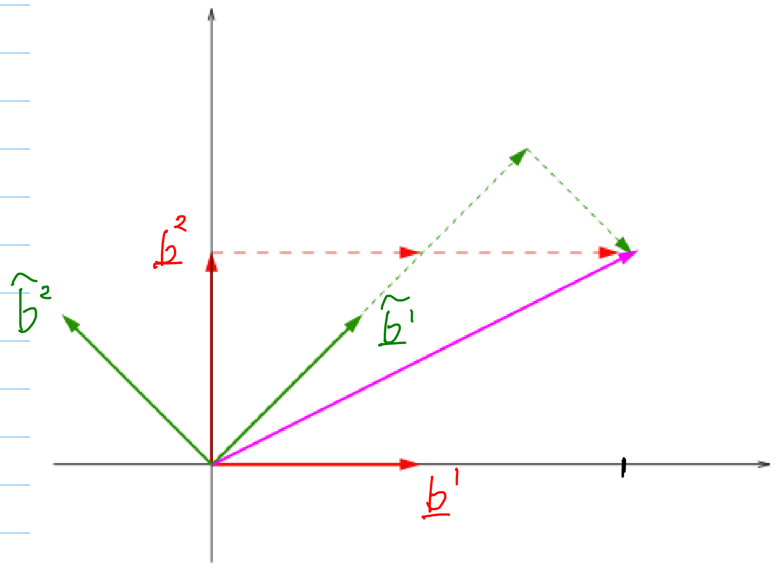
mit $S = (s_{ji})_{j,i=1}^{k} \in \mathbb{R}^{k,k}$ [Basiswechselmatrix]

Umrechnung der Koeffizienten: $\underline{c} = S \underline{\tilde{c}} \Leftrightarrow \underline{\tilde{c}} = S^{-1} \underline{c}$

$$S = \begin{array}{c} \text{j. Spalte} \\ \begin{bmatrix} s_{11} & & s_{1k} \\ & & \\ s_{k1} & & s_{kk} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\hookrightarrow$ Koordinatenvektor von $\tilde{b}^j$ bzgl. $\mathcal{B}$

Bsp (2D):



$\mathcal{U} = 2 \cdot \underline{b}^1 + \underline{b}^2$

$\mathcal{U} \sim \underline{c} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\tilde{b}}^1 \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\underline{\tilde{b}}^2 \sim \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Koordinaten bzgl. $\mathcal{B} = \{\underline{b}^1, \underline{b}^2\}$

$\Rightarrow \quad S = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\mathcal{U} = \tilde{c}_1 \underline{\tilde{b}}^1 + \tilde{c}_2 \underline{\tilde{b}}^2 \quad : \quad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 = ?$

durch Lösen des LGS: $\boxed{S \underline{\tilde{c}} = \underline{c}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \quad \underline{\tilde{c}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$

Satz III.4.0.F (Basiswechselmatrix).

Seien $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} := \{\tilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \tilde{\mathbf{b}}^n\}$ Basen des n-dimensionalen Unterraums $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$.

Dann ist die Basiswechselmatrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$, definiert durch

$$\tilde{\mathbf{b}}^j = \sum_{i=1}^{n} (\mathbf{S})_{i,j} \mathbf{b}^i \,, \qquad \text{(III.4.0.E)}$$

invertierbar.

$\mathcal{B}$: $\quad S\underline{z} = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} s_{ij} z_j = 0 \quad \forall i$

$$\Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} s_{ij} z_j \right) \underline{b}^i = \underline{0}$$

$$\Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} s_{ij} \underline{b}^i \right) z_j = \underline{0}$$

(III.4.E) $\quad \Rightarrow \quad \sum_{j=1}^{n} z_j \underline{\tilde{b}}^j = \underline{0}$

$\tilde{\mathcal{B}}$ Basis $\quad \Rightarrow \quad z_j = 0$

$\operatorname{Kern}(\underline{S}) = \{\underline{0}\} \Rightarrow S$ inv.bar

"Kriterien für Invertierbarkeit"
III.3.0.P

$\square$

Zusammenfassung:

Satz III.4.0.H (Basiswechsel).
Seien $\mathcal{B} := \{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ und $\tilde{\mathcal{B}} := \{\tilde{\mathbf{b}}^1, \ldots, \tilde{\mathbf{b}}^n\}$ zwei Basen des n-dimensionalen Unterraums $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ mit zugehöriger Basiswechselmatrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$.
Dann besteht zwischen den Koordinatenvektoren $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ und $\tilde{\mathbf{c}} \in \mathbb{R}^n$ eines Vektors $\mathbf{u} \in \mathcal{U}$ bzgl. $\mathcal{B}$ bzw. $\tilde{\mathcal{B}}$ die Beziehung

$$\tilde{\mathbf{c}} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{c}\,.$$

(Koordinaten in der „neuen Basis" $\tilde{\mathcal{B}}$ erhält man aus den Koordinaten bzgl. der „alten Basis" durch Lösen eines linearen Gleichungssystems mit der Koeffizientenmatrix $\mathbf{S}$.)