Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Prof. Ralf Hiptmair

Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich

Vorlesung für D-BAUG Herbstsemester 2014

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/linalgnum_BAUG
www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/

II. Rechnen mit Vektoren und Matrizen

2.1. Vektorechnung im $\mathbb{R}^n$

Definition II.1.0.B (Grundoperationen der Vektorarithmetik).
Vektoraddition: Für beliebige Spaltenvektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *definieren wir ihre Summe* $\mathbf{v} + \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ komponentenweise *durch*

$$(\mathbf{v}+\mathbf{w})_i := (\mathbf{v})_i + (\mathbf{w})_i\,, \quad i \in \{1,\dots,n\}\,.$$

Skalarmultiplikation: Für einen beliebigen Spaltenvektor $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definieren wir das Produkt* $\alpha \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ komponentenweise *wie folgt:*

$$(\underline{v}\cdot\alpha)_i = (\alpha \cdot \mathbf{v})_i := \alpha \cdot (\mathbf{v})_i\,, \quad i \in \{1,\dots,n\}\,.$$

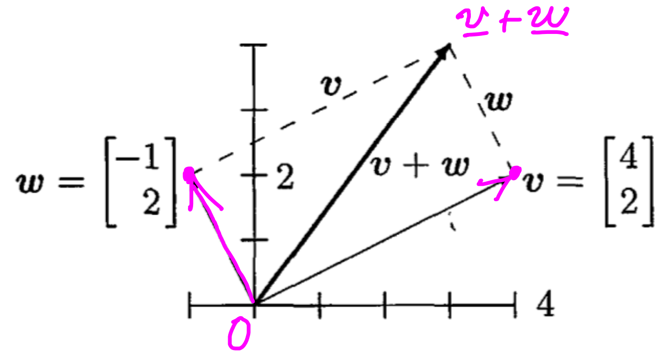
$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 + w_1 \\ v_2 + w_2 \\ \vdots \\ w_n + v_n \end{bmatrix} \,, \quad \alpha \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha v_1 \\ \alpha v_2 \\ \vdots \\ \alpha v_n \end{bmatrix}$$

Satz II.1.0.D (Rechenregeln für die Vektoroperationen).
Für alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$, $n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

Vektoraddition kommutativ:	$\mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}\,,$	(VR1)
Vektoraddition assoziativ:	$\mathbf{u} + (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = (\mathbf{u} + \mathbf{v}) + \mathbf{w}\,,$	(VR2)
Vektoraddition, neutrales Element:	$\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}\,,$	(VR3)
Skalarmultiplikation assoziativ:	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{v})\,,$	(VR4)
Skalarmultiplikation, neutrales Element:	$1 \cdot \mathbf{v} = \mathbf{v}\,,$	(VR5)
Distributivgesetze:	$\alpha \cdot (\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \alpha \cdot \mathbf{v} + \alpha \cdot \mathbf{w}\,,$	(VR6)
	$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{v} = \alpha \cdot \mathbf{v} + \beta \cdot \mathbf{v}\,.$	(VR7)

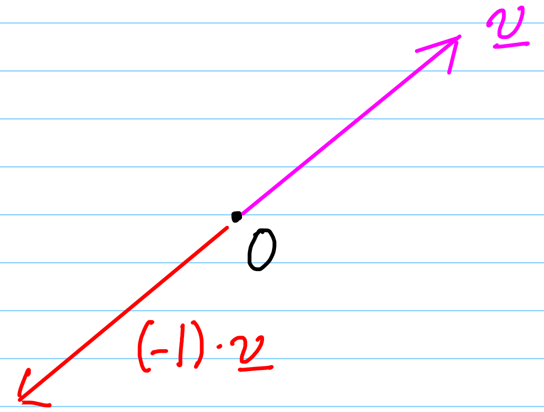
$$\underline{v} - \underline{w} := \underline{v} + (-1)\cdot\underline{w}$$

Visualisierung:



Vektoraddition
$\Updownarrow$
Parallelogrammkonstruktion

$$\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$$

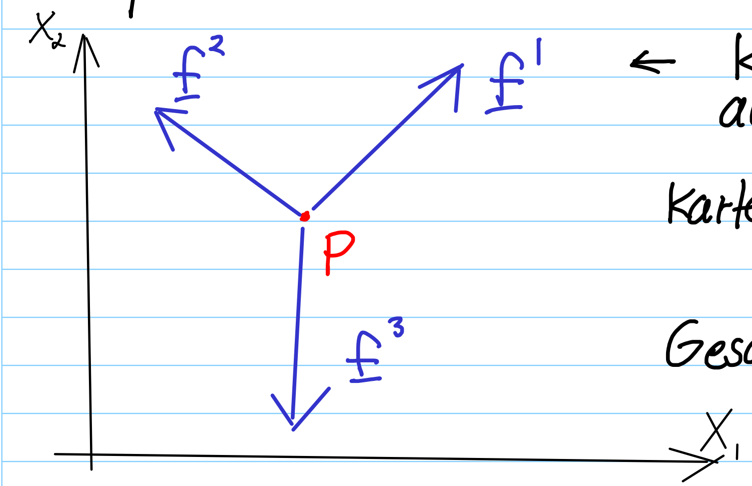


Skalarmultiplikation mit $\alpha \in \mathbb{R}$

$\Updownarrow$

Zentrische Streckung mit Zentrum 0, Faktor α

Bsp: Kraftvektoren (in 2D)



← Kräfte $\underline{f}^j$ greifen in einem Punkt an

Kartesische Komponenten $\underline{f}^j = \begin{pmatrix} f_1^j \\ f_2^j \end{pmatrix}$

Gesamtkraft: $\underline{f}^{tot} = \sum_{j=1}^{n} \underline{f}^j$

Kraftvektor $\underline{f}$ $\Rightarrow$ $(-1)\cdot\underline{f}$ $\hat{=}$ Gegenkraft

2.2. Linearkombinationen und Matrix-Vektor-Produkt

Erinnerung: Schreibweise für LGS: $\underline{A}\cdot\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$

"Matrixnotation": $\mathbf{A}\cdot\mathbf{x} = \mathbf{b}$

$$\Updownarrow$$

LGS:
$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

Vektorgleichung:
$$x_1\cdot\begin{bmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ \vdots \\ a_{m,1} \end{bmatrix} \underset{\text{V.A.}}{+} x_2\cdot\begin{bmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ \vdots \\ a_{m,2} \end{bmatrix} + \cdots + x_n\cdot\begin{bmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ \vdots \\ a_{m,n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

Vektorgleichung kompakt: $x_1(\mathbf{A})_{:,1} + x_2(\mathbf{A})_{:,2} + \cdots + x_n(\mathbf{A})_{:,n} = \mathbf{b}$.

Definition II.2.0.A (Linearkombination von (Spalten)vektoren). (LK)
Gegeben sei eine Menge von $n \in \mathbb{N}$ (Spalten)vektoren $\{\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n\} \subset \mathbb{R}^m$, $m \in \mathbb{N}$. Für reelle Zahlen $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ heisst

$$\sum_{j=1}^{n} c_j\mathbf{a}^j = c_1\mathbf{a}^1 + \cdots + c_n\mathbf{a}^n \qquad \text{(II.2.0.B)}$$

eine Linearkombination der Vektoren $\mathbf{a}^1, \dots, \mathbf{a}^n$ mit (reellen) Koeffizienten c_j, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Kompakte Notation für LK

Definition II.2.0.D (Matrix-Vektor-Multiplikation). (MVP)
Für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *und* $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n}$, $m, n \in \mathbb{N}$ *ist das Matrix-Vektor-Produkt* $\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \in \mathbb{R}^{m}$ *definiert durch*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{v})_i := \sum_{j=1}^{n} (\mathbf{A})_{i,j} v_j \,, \quad i \in \{1, \ldots, m\} \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{A} \cdot \mathbf{v} = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{v_j (\mathbf{A})_{:,j}}_{\text{Skalarmultiplikation}} \,.$$

Skalarmultiplikation

Vektoraddition

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \ldots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \ldots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \ldots + a_{1,n}x_n \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \ldots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + \ldots + a_{m,n}x_n \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}}$$

Matrix · Vektor $\longrightarrow$ Vektor

MVP nur definiert, wenn Länge (Vektor) = Anz. (Spalten Matrix)!

i-te Zeile $\rightarrow$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} * \\ * \\ * \\ * \\ * \end{bmatrix}}_{\mathbf{Ax}} \leftarrow (\mathbf{Ax})_i$$

hängt nur von i. Zeile von A ab

LK durch MVP

$a^j \in \mathbb{R}^m$: $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} c_j \mathbf{a}^j = [\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n] \cdot \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} .$

$m \times n$-Matrix, erzeugt durch Nebeneinanderschreiben der Spaltenvektoren $\mathbf{a}^j \in \mathbb{R}^m$

II.2.E: "Matrixbaukasten":

Nebeneinanderschreiben: $\underline{M} \in \mathbb{R}^{m,p}$, $\underline{N} \in \mathbb{R}^{m,q}$: $[\underline{M}, \underline{N}] \in \mathbb{R}^{m,p+q}$

"Übereinanderschreiben": $\underline{M} \in \mathbb{R}^{k,n}$, $\underline{N} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$ $\begin{bmatrix} \underline{M} \\ \underline{N} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k+\ell,n}$

Beides, z.B. $\left[\begin{array}{c|c} \underline{M} & \underline{N} \\ \hline \underline{P} & \underline{Q} \end{array}\right]$

II.2.F: Lösungen von LGS und LK

Satz I.4.5.B (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).
Sei $\mathbf{Zx} = \mathbf{y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gemäss* Definition I.4.3.A, $r := \operatorname{Rang}(\mathbf{Z})$ *(→* Definition I.4.4.H*)*, $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die geordnete* ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) *Indexmenge der Pivotspalten*, $\{j_1, \dots, j_{n-r}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$ *(leer, wenn* $r = n$*).*

(i) Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, wenn $y_j \neq 0$ *für ein* $j > r$.

(ii) Andernfalls ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ *von* $\mathrm{LGS}(\mathbf{Z}; \mathbf{y})$ *gegeben durch*

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} (\mathbf{x})_{i_k} = y_k - \sum_{\ell=1}^{n-r} \alpha_\ell \cdot (\mathbf{Z})_{k, j_\ell},\ k \in \{1, \dots, r\}, \\ (\mathbf{x})_{j_\ell} = \alpha_\ell,\ \ell \in \{1, \dots, n-r\} \end{array},\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

$i_k = k$, $j_\ell = r+\ell$

Bsp: Spezialfall
(zu Erreichen durch Umnummerieren der x_j)

$r := \operatorname{Rang}(Z)$

$$\begin{array}{c} \mathbf{Z} = \left[\begin{array}{cccccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{1,r+1} & \dots & z_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{2,r+1} & \dots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & z_{r-1,r+1} & \dots & z_{r-1,n} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & z_{r,r+1} & \dots & z_{r,n} \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{m,n} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow\ i_1 = 1 & \uparrow\ i_r = r & \uparrow\ j_1 = r+1 & \uparrow\ j_{n-r} = n \end{array} \end{array}$$

Annahme: $(y)_{r+1:m} = 0$

$\downarrow$

Fall (i) ausgeschlossen: $\mathcal{L} \neq \emptyset$

$$\mathcal{L} = \left\{ x = \begin{bmatrix} y_1 - \alpha_1 z_{1,r+1} - \dots - \alpha_{n-r} z_{1,n} \\ \vdots \\ y_r - \alpha_1 z_{r,r+1} - \dots - \alpha_{n-r} z_{r,n} \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \ddots \\ \alpha_{n-r} \end{bmatrix},\ \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$$

Nun: Umschreiben mit Vektorarithmetik

$$\mathcal{L} = \left\{ x = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \alpha_1 z_{1,r+1} \\ \vdots \\ \alpha_1 z_{r,r+1} \\ -\alpha_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \dots - \begin{bmatrix} \alpha_{n-r} z_{1,n} \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} z_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_{n-r} \end{bmatrix},\ \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \underline{x} \in \mathbb{R}^n : \underline{x} = \begin{bmatrix} (\underline{y})_{1:r} \\ \underline{0} \end{bmatrix} - \alpha_1 \begin{bmatrix} z_{1,r+1} \\ \vdots \\ z_{r,r+1} \\ -1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \dots - \alpha_{n-r} \begin{bmatrix} z_{1,n} \\ \vdots \\ z_{r,n} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \alpha_j \in \mathbb{R} \right\}$$

Setze $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = \dots = \alpha_{n-r} = 0$ im Satz

$$\xrightarrow{(\mathbf{y})_{r+1:m}=0} \quad \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{Z};\mathbf{y})) = \left\{ \begin{bmatrix} (\mathbf{y})_{1:r} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} z_{1,r+1} & z_{1,r+2} & \dots & \dots & z_{1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ z_{r,r+1} & z_{r,r+2} & \dots & \dots & z_{r,n} \\ -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 \end{bmatrix} \mathbf{c},\ \mathbf{c} \in \mathbb{R}^{n-r} \right\}$$

$$\underline{c} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{n-r} \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} (\underline{y})_{1:r} \\ \underline{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} (\underline{Z})_{1:r,r+1:n} \\ -\underline{I}_{n-r} \end{bmatrix} \underline{c} \right\}$$

$\underline{I}_m \mathrel{\hat{=}} m \times m$ - **Einheitsmatrix** : $(\underline{I})_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}, \ i,j \in \{1,\dots,m\}$

2.3. Matrixprodukt

$\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n \in \mathbb{R}^m$: $\quad \underline{v} = \sum_{j=1}^{n} c_j \underline{a}^j$: Linearkombination mit Koeffizienten c_j

$\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^k \in \mathbb{R}^m$: $\quad \underline{a}^j = \sum_{\ell=1}^{k} s_{\ell,j} \underline{b}^\ell, \ s_{\ell,j} \in \mathbb{R}$

$j \in \{1,\dots,n\}, \ \ell \in \{1,\dots,k\}$

"geschachtelte LK"

$$\underline{v} = \sum_{j=1}^{n} c_j \left(\sum_{\ell=1}^{k} s_{\ell,j} \underline{b}^\ell \right) = \sum_{\ell=1}^{k} \underbrace{\left(\sum_{j=1}^{n} s_{\ell,j} c_j \right)}_{= (\underline{S}\,\underline{c})_\ell} \underline{b}^\ell$$

$$\underline{c} := \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{B} = [\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^k], \quad \underline{S} = \begin{bmatrix} s_{1,1} & \dots & s_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ s_{k,1} & \dots & s_{k,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{k,n}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{v} = \overbrace{\underline{B}(\underline{S}\,\underline{c})}^{\text{MVPs!}} = \ ?\ \underline{c} \ : \ ? = \underline{B} \cdot \underline{S}$$

$$(\underline{v})_i = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\ell=1}^{k} s_{\ell,j} \cdot (\underline{B})_{i,\ell} \right) c_j = \underline{A}\,\underline{c}$$

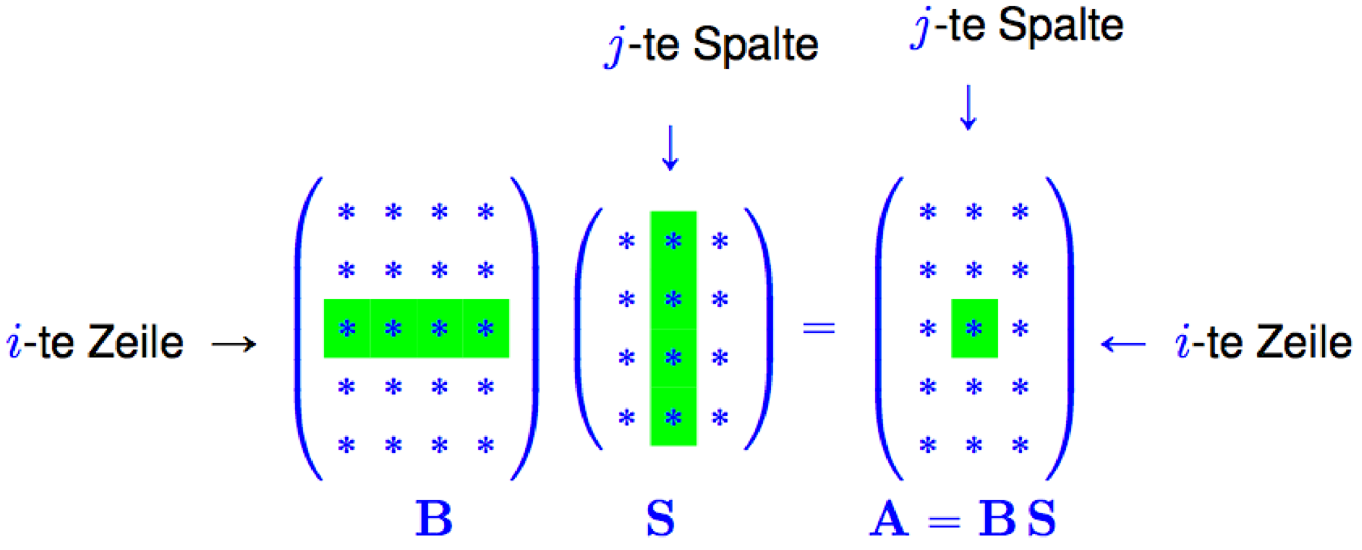
Definition II.3.0.B (Matrixprodukt). (MP)
Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ *sei* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k,n}$. *Das* *Matrixprodukt* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *is elementweise definiert durch*

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})_{i,j} := \sum_{\ell=1}^{k} (\mathbf{B})_{i,\ell} (\mathbf{S})_{\ell,j}, \quad i \in \{1,\dots,m\}, j \in \{1,\dots,n\}.$$

$\boldsymbol{!}$ $B \cdot S$ nur dann definiert, falls

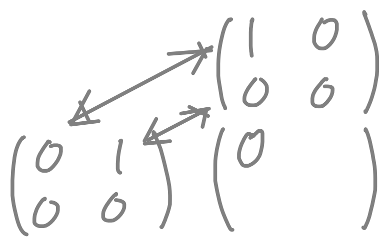
Anz (Spalten von B) = Anz. (Zeilen von S)

Anz (Zeilen BS) = Anz. (Zeilen B)
Anz (Spalten BS) = Anz (Spalten S)

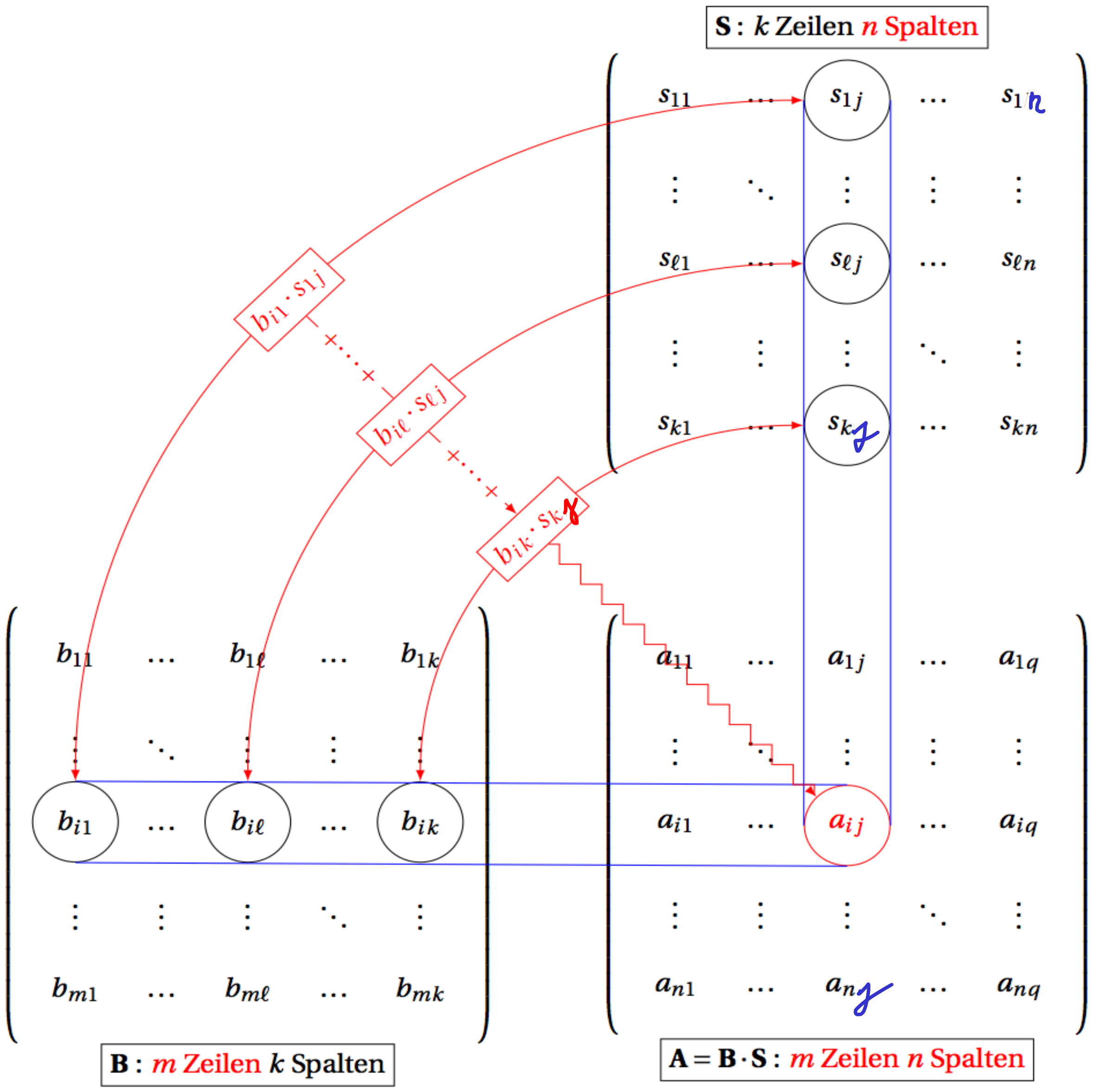


Beispiel: $m = 2, n = 4, k = 3$

$$\mathbf{B} := \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{S} := \begin{bmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$



$$\begin{array}{cc} & \mathbf{S} \\ & \begin{pmatrix} 7 & -1 & 1 & 0 \\ -8 & -2 & 0 & -1 \\ 9 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 18 & -14 & 1 & -2 \\ 42 & -32 & 4 & -5 \end{pmatrix} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} = \mathbf{B\,S} \end{array}$$



Beachte: $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,k}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$

$\underline{A}\,\underline{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ $\qquad$ $\underline{B}\,\underline{A} \in \mathbb{R}^{k,k}$

$\boldsymbol{!}$ Sogar, wenn $k = n$: i.a. $\underline{B}\,\underline{A} \neq \underline{A}\,\underline{B}$

Bsp:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\neq$

Matrixprodukt nicht kommutativ auch für quadratische Matrizen

Bsp: II.3.D : $\underline{A} \cdot \underline{B}$ mit $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{n,1} = \mathbb{R}^n$

$\rightarrow$ $\underline{A} \cdot \underline{B} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{A} \cdot \underline{B} = \underline{A} \cdot \underline{b}$ wenn $\underline{B} = [\underline{b}]$

MP ist echte Verallgemeinerung von MVP

Bem: II.3.F : $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$

$$\underline{A} \cdot \underline{B} = [\underline{A}(\underline{B})_{:,1}, \ldots, \underline{A}(\underline{B})_{:,n}]$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{B})_{:,j} = \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k} (\underline{A})_{:,\ell} \cdot (\underline{B})_{\ell,j}}_{\text{LK von Spalten von } \underline{A}} = \underline{A}(\underline{B})_{:,j}$$

Analog: $(\underline{A} \cdot \underline{B})_{i,:} = (\underline{A})_{i,:} \cdot \underline{B} \in \mathbb{R}^{1,n}$: Zeilenvektor

Matrixprodukt

Beispiel II.3.0.G (Inneres Produkt von Zeilen- und Spaltenvektor).

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{1,k} \quad \leftrightarrow \quad$ Zeilenvektor $\mathbf{a}^\top = [a_1, \ldots, a_k]$
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,1} = \mathbb{R}^k \quad \leftrightarrow \quad$ Spaltenvektor $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix}$

Eine Zahl $\rightarrow$

$$\mathbf{a}^\top \cdot \mathbf{b} = [a_1, \ldots, a_k] \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \left[\sum_{\ell=1}^{k} a_\ell b_\ell\right] \in \mathbb{R}.$$

Beispiel II.3.0.H (Äusseres Produkt/Tensorprodukt von Spalten- und Zeilenvektor).

- $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,1} \leftrightarrow$ Spaltenvektor $\underline{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$
- $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{1,n} \quad \leftrightarrow \quad$ Zeilenvektor $\underline{b}^\top = [b_1, \ldots, b_n]$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\top = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \cdot [b_1, \ldots, b_n] = \begin{bmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & \ldots & \ldots & a_1b_n \\ a_2b_1 & a_2b_2 & \ldots & \ldots & a_2b_n \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ a_mb_1 & a_mb_2 & \ldots & \ldots & a_mb_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n},$$

$$\boxed{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}^\top)_{i,j} = (\mathbf{a})_i \cdot (\mathbf{b}^\top)_j}, \quad i \in \{1, \ldots, m\}, j \in \{1, \ldots, n\}.$$

Beispiel II.3.0.J (Multiplikation mit Diagonalmatrix).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n} , \qquad \mathbf{D} := \operatorname{diag}(d_1, \dots, d_m) \in \mathbb{R}^{m,m} , \quad \mathbf{T} := \operatorname{diag}(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n,n} .$$

Multiplikation mit Diagonalmatrix von links :

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} d_1 a_{1,1} & d_1 a_{1,2} & \dots & d_1 a_{1,n} \\ d_2 a_{2,1} & d_2 a_{2,2} & \dots & d_2 a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ d_m a_{m,1} & d_m a_{m,2} & \dots & d_m a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}: \quad \boxed{(\mathbf{D} \cdot \mathbf{A})_{i,j} = d_i (\mathbf{A})_{i,j}}$$

$\hat{=}$ Zeilenskalierungen

Multiplikatio mit Diagonalmatrix von rechts :

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \begin{bmatrix} t_1 a_{1,1} & t_2 a_{1,2} & \dots & t_n a_{1,n} \\ t_1 a_{2,1} & t_2 a_{2,2} & \dots & t_n a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_1 a_{m,1} & t_2 a_{m,2} & \dots & t_n a_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}: \quad \boxed{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{T})_{i,j} = t_j (\mathbf{A})_{i,j}}$$

$$(\underline{A} \cdot \underline{T})_{i,j} = \sum_{\ell=1}^{n} (\underline{A})_{i,\ell} (\underline{T})_{\ell,j} = (\underline{A})_{i,j} \cdot t_j$$

$(\underline{T})_{\ell,j} = 0$ für $\ell \neq j$

$\hat{=}$ Spaltenskalierungen

Wiederholung Matrixprodukt :

Linearkombination : $\underline{v} = \underline{A} \cdot \underline{c}$

geschachtelte Linearkombination : $\underline{v} = \underline{B} (\underline{S} \, \underline{c}) = (\underline{B} \cdot \underline{S}) \underline{c}$ $(*)$

Definition II.3.0.B (Matrixprodukt).
Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ *sei* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{k,n}$. *Das Matrixprodukt* $\mathbf{B} \cdot \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *is* elementweise *definiert durch*

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{S})_{i,j} := \sum_{\ell=1}^{k} (\mathbf{B})_{i,\ell} (\mathbf{S})_{\ell,j} , \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, \dots, n\} .$$

Beispiel II.3.0.K (Zeilenkombination durch Matrixmultiplikation). $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A}' := \underbrace{\begin{array}{r} \\ \\ \\ \\ i.\ \text{Zeile} \rightarrow \\ \\ \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & 0 & & \dots & & & & & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & & & & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \; \dots \; 0 \\ \vdots & & & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & & & & \dots & 1 \end{bmatrix}}_{\underline{K} \in \mathbb{R}^{m,m}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{=\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}}$$

j. Spalte

$$\underline{K} \, \underline{A} = [\underline{K} (\underline{A})_{:,1} , \; \dots\dots , \; \underline{K} (\underline{A})_{:,n}]$$

$$\underline{K}\begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} \\ v_i + \alpha v_j \\ v_{i+1} \\ \vdots \\ v_m \end{bmatrix} \quad \triangleright \quad \underline{A}' \text{ aus } \underline{A} \text{ durch ZUF}$$

Zeile $i \leftarrow$ Zeile $i + \alpha \cdot$ Zeile j

$$\underline{A} \xrightarrow{\text{Gausselimination}} \text{ZSF } \underline{Z}$$

$$\left(\underline{K}_L \cdot \ \cdots \ \underline{K}_3 \cdot \left(\underline{K}_2 \left(\underline{K}_1 \cdot \underline{A}\right)\right)\right) = \underline{Z}$$

Aus $(*)$

Satz II.3.0.L (Assoziativität der Matrixmultiplikation).
Für $m, n, k, \ell \in \mathbb{N}$ *und beliebige* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,\ell}$, $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{\ell,n}$ *gilt*

$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) \ .$$

Anwendung: $n \in \mathbb{N}$ gerade

$$\underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix}\right)}_{\in \mathbb{R}^{n,n}} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ \vdots \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right)}_{\in \mathbb{R} \ = n/2}$$

2.4. Matrixkalkül

Verallgemeinerung Vektoroperatoren

Definition II.4.0.B (Grundoperationen der Matrixarithmetik).
Matrixaddition: Für beliebige Matrizen gleicher Grössse $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *definieren wir ihre Summe* $\mathbf{A} + \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n}$ *elementweise durch*

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_{i,j} := (\mathbf{A})_{i,j} + (\mathbf{B})_{i,j} \ , \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \ j \in \{1, \ldots, m\} \ .$$

Skalarmultiplikation: Für eine beliebige Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha \in \mathbb{R}$ *definieren wir das Produkt* $\alpha \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A} \cdot \alpha \in \mathbb{R}^{m,n}$ *elementweise wie folgt:*

$$(\alpha \cdot \mathbf{A})_{i,j} = (\mathbf{A} \cdot \alpha)_{i,j} := \alpha \cdot (\mathbf{A})_{i,j} \ , \quad i \in \{1, \ldots, n\}, \ j \in \{1, \ldots, m\} \ .$$

Satz II.4.0.D (Rechenregeln für die Matrixoperationen).
Für alle $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *gilt*

Matrixaddition kommutativ:	$\mathbf{B} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \mathbf{B}$,	(M1)
Matrixaddition assoziativ:	$\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$,	(M2)
Matrixaddition, neutrales Element:	$\mathbf{B} + \mathbf{O}_{m,n} = \mathbf{B}$,	(M3)
Skalarmultiplikation assoziativ:	$(\alpha \cdot \beta) \cdot \mathbf{B} = \alpha \cdot (\beta \cdot \mathbf{B})$,	(M4)
Skalarmultiplikation, neutrales Element:	$1 \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B}$,	(M5)
Distributivgesetze:	$\alpha \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \alpha \cdot \mathbf{B} + \alpha \cdot \mathbf{C}$,	(M6)
	$(\alpha + \beta) \cdot \mathbf{B} = \alpha \cdot \mathbf{B} + \beta \cdot \mathbf{B}$.	(M7)

$\underline{O} \ \hat{=}$ Nullmatrix

Satz II.4.0.F (Distributivgesetze für Matrixmultiplikation).
Für alle $m, n, k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}+\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \quad \forall \mathbf{A},\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{m,k},\ \mathbf{C}\in\mathbb{R}^{k,n}\,.$$
$$\mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}+\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} \quad \forall \mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m,k},\ \mathbf{B},\mathbf{C}\in\mathbb{R}^{k,n}\,.$$

Korollar II.4.0.G (Verträglichkeit von Matrixmultiplikation und Skalarmultiplikation).
Für alle $m, n, k \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{k,n}$ *und* $\alpha\in\mathbb{R}$ *gilt*

$$\alpha\cdot(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}) = (\alpha\cdot\mathbf{A})\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot(\alpha\cdot\mathbf{B})\,.$$

Bem: $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{m,n}$

$\hookrightarrow$ ≙ ist Spezialfall von

$\cdot \hookrightarrow$ MVP $\hookrightarrow$ MP

$+ \hookrightarrow$ Vektoraddition $\hookrightarrow$ Matrixaddition

2.5 Inverse Matrix

Division für (quadratische) Matrizen

In $\mathbb{R}$: $\beta/\alpha = \beta\cdot 1/\alpha \quad (\alpha\neq 0)$

$\uparrow$ definiert durch $1/\alpha\cdot\alpha = \alpha\cdot 1/\alpha = 1$

(1 ≙ neutrales Element von '$\cdot$')

$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}^{n,n}$ $(n>1)$
1	I_n
$\alpha\neq 0$	? [Invertierbarkeit]
$\alpha^{-1}=1/\alpha$	?

Definition II.5.0.A (Invertierbare/reguläre Matrix).
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{n,n}$, $n\in\mathbb{N}$, *heisst invertierbar oder regulär, wenn es eine Matrix* $\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n,n}$ *so gibt, dass*

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{I}_n \quad \text{oder} \quad \mathbf{X}\mathbf{A} = \mathbf{I}_n\,,$$

wobei $\mathbf{I}_n$ *die* $n\times n$*-Einheitsmatrix bezeichnet.*

Beispiel II.5.0.B (Inverse einer 2×2-Matrix).

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}: \quad \underbrace{\frac{1}{a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}}\cdot\begin{bmatrix} a_{2,2} & -a_{1,2} \\ -a_{2,1} & a_{1,1}\end{bmatrix}}_{=:\mathbf{X}}\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}}_{=\mathbf{A}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{bmatrix}}_{=\mathbf{I}_2}\,. \qquad \text{(II.5.0.B)}$$

Notwendig: $a_{1,1}a_{2,2}-a_{1,2}a_{2,1}\neq 0$!

◇

Beobachtung: Auch $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{I}_2$!

Satz II.5.0.C (Inverse einer Matrix).
Zu jeder invertierbaren Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ *gibt es eine eindeutig bestimmte Matrix* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n,n}$*, die Inverse von* $\mathbf{A}$*, so, dass*

$$\mathbf{AX} = \mathbf{XA} = \mathbf{I}_n \,.$$

✎ Notation: $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}^{n,n} \,\hat{=}\,$ eindeutige Inverse von $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$

B: (i) Eindeutigkeit: $\underline{X}, \underline{Y} \in \mathbb{R}^{n,n}$: $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{A} \cdot \underline{Y} = \underline{I}$

$\forall\, \underline{b} \in \mathbb{R}^n$: $\{\underline{X}\underline{b}\} \underset{=}{\in} \underbrace{\mathcal{L}(LGS(\underline{A}; \underline{b}))}$; $\underset{\underline{Y}\underline{b}}{}$ $\Rightarrow \neq \emptyset$ $\Big\} \underset{1.4.5.E}{\Longrightarrow}$ Rang$(\underline{A}) = n$

$\Rightarrow$ Lsg. von $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ eindeutig $\Rightarrow \underline{X}\underline{b} = \underline{Y}\underline{b} \overset{\forall \underline{b}}{\Rightarrow} \underline{X} = \underline{Y}$

(ii) z.z.: $\underline{A} \cdot \underline{X} = \underline{I} \Longrightarrow \underline{X} \cdot \underline{A} = \underline{I}$

$$\underline{A}\,(\underbrace{\underline{X} + \underline{X} \cdot \underline{A} - \underline{I}}_{=\underline{X}}) = \underbrace{\underline{A}\underline{X}}_{=\underline{I}} + \underbrace{\underline{A}\underline{X}}_{=\underline{I}}\underline{A} - \underline{A} = \underline{I}$$

$\overset{(i)}{\Longrightarrow}$

$$\cancel{\underline{X}} + \underline{X} \cdot \underline{A} - \underline{I} = \cancel{\underline{X}} \Longrightarrow \underline{X} \cdot \underline{A} = \underline{I}$$

□

Satz II.5.0.E (Kriterien für Invertierbarkeit einer Matrix).
Für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$*, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ *hat vollen (maximalen) Rang:* $\mathrm{Rang}(\mathbf{A}) = n$,

(ii) das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ *besitzt für jedes* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *eine eindeutige Lösung,*

(iii) das lineare Gleichungssystem $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$ *hat nur die* triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$,

(iv) $\mathbf{A}$ *ist invertierbar.*

Beweis für (i) $\Rightarrow$ (iv):

LGS: $\underline{A}\underline{x}^j = \underline{e}_j$ (Einheitsvektor)

$\hookrightarrow$ I.4.5.E: $\underline{x}^j$ eindeutig

$\underline{X} = [\underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n] \in \mathbb{R}^{n,n} \Rightarrow \underline{X} = \underline{A}^{-1}$

$\underline{A} \cdot \underline{X} = [\underline{A}\underline{x}^1, \ldots, \underline{A}\underline{x}^n] = [\underline{e}_1, \ldots, \underline{e}_n] = \underline{I}$ □

$\hookrightarrow$ Algorithmus zur Berechnung $\underline{A}^{-1}$

Bsp: $\left[\begin{array}{cc|cc} \overbrace{a \quad b}^{\underline{A}} & & 1 & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$, $a \neq 0$

$\xi := ad - bc \neq 0$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ c & d & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & \xi/a & -c/a & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & b/a & 1/a & 0 \\ 0 & 1 & -c/\xi & a/\xi \end{array}\right]$$

$$\rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \overbrace{1/a + b/a \cdot c/\xi}^{d/\xi} & -b/\xi \\ 0 & 1 & -c/\xi & a/\xi \end{array}\right]$$

$\underbrace{\qquad\qquad}_{\underline{A}^{-1}}$

Satz II.5.0.F (Invertierbarkeit von Produktmatrizen).
Für quadratische Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathbf{A}$ ***und*** $\mathbf{B}$ *sind invertierbar,*

(ii) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ *ist invertierbar,*

(iii) $\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ *ist invertierbar.*

Treffen die Aussagen zu, dann gilt ferner

$$(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1} \quad \textit{und} \quad (\mathbf{BA})^{-1} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}^{-1} . \tag{II.5.0.G}$$

$B: (i) \Rightarrow (ii) : \quad (A \cdot B)(B^{-1}A^{-1}) = A\,\underbrace{(B \cdot B^{-1})}_{= I}\,A^{-1} = AA^{-1}$ □

Satz II.5.0.J (Transformation von LGS mit invertierbaren Matrizen).
Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $m, n \in \mathbb{N}$, *und* $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{m,m}$ *eine invertierbare quadratische Matrix. Dann gilt die Gleichheit der Lösungsmengen:*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{A}; \mathbf{b})) = \mathcal{L}(\mathrm{LGS}(\mathbf{MA}; \mathbf{Mb})) \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m .$$

$$Ax = b \quad \underset{\cdot M}{\overset{\cdot M^{-1}}{\rightleftarrows}} \quad MAx = Mb$$

Bem: Quadratische Dreiecksmatrizen mit Diagonalelementen $\neq 0$ sind invertierbar (aus I.4.4.K)

2.6. Transponierte Matrix

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \longrightarrow \text{Zeilenvektor } v^T$$

Definition II.6.0.A (Transponierte Matrix).
Zu einer gegebene Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $mn, \in \mathbb{N}$, *heisst* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,m}$ *mit*

$$(\mathbf{B})_{i,j} = (\mathbf{A})_{j,i} , \quad i \in \{1, \dots, n\}, \; j \in \{1, \dots, m\} .$$

die Transponierte von $\mathbf{A}$

✎ Notation: $\mathbf{A}^\top \hat{=}$ Transponierte von $\mathbf{A}$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{2,1} & \dots & a_{n,1} \\ a_{1,2} & a_{2,2} & \dots & a_{n,2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1,m} & a_{2,m} & \dots & a_{n,m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,m}$$

Satz II.6.0.C (Rechenregeln für die Tranponierten).
Für $m, n, k \in \mathbb{N}$ *gilt*

$$\left(\mathbf{A}^\top\right)^\top = \mathbf{A} \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} , \tag{T1}$$
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})^\top = \mathbf{A}^\top + \mathbf{B}^\top \qquad \forall \mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m,n} , \tag{T2}$$
$$(\alpha\mathbf{A})^\top = \alpha\mathbf{A}^\top \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}, \forall \alpha \in \mathbb{R} , \tag{T3}$$
$$(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \cdot \mathbf{A}^\top \qquad \forall \mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}, \forall \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n} . \tag{T4}$$

Korollar II.6.0.F (Inverse der Transponierten).
Die Transponierte jeder invertierbaren Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist wiederum invertierbar und es gilt

$$\left(\mathbf{A}^\top\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top . \tag{T5}$$

✎ Notation: Inverse der Transponierten: $\left(\mathbf{A}^{-1}\right)^\top = \mathbf{A}^{-\top}$

$$\left[\quad A^\top \cdot (A^{-1})^\top = (A^{-1} A)^\top = I^\top = I \quad\right]$$

Definition II.6.0.J (Symmetrische und schiefsymmetrische Matrizen).
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ heisst symmetrisch, falls $\mathbf{A}^\top = \mathbf{A}$.
Eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ heisst schiefsymmetrisch, falls $\mathbf{A}^\top = -\mathbf{A}$.

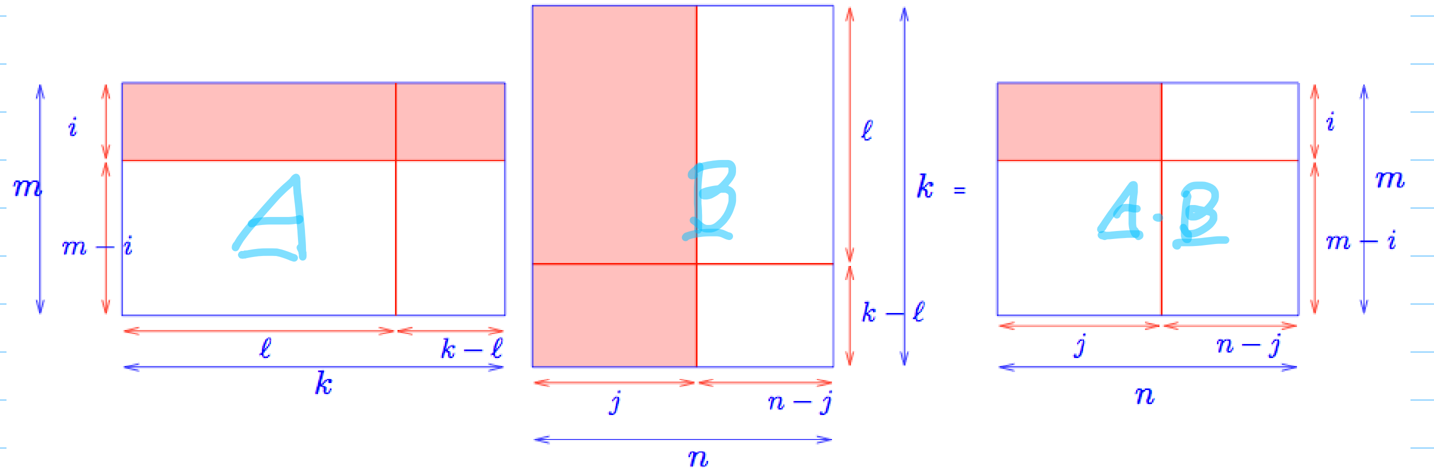
↳ z.B. $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

2.7. Blockmatrixoperationen

$$\mathbf{A} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,\ell} & a_{1,\ell+1} & \cdots & a_{1,k} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,\ell} & a_{2,\ell+1} & \cdots & a_{2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \cdots & a_{i,\ell} & a_{i,\ell+1} & \cdots & a_{i,k} \\ \hline a_{i+1,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+1,\ell} & a_{i+1,\ell+1} & \cdots & a_{i+1,k} \\ a_{i+2,1} & a_{i+1,2} & \cdots & a_{i+2,\ell} & a_{i+2,\ell+1} & \cdots & a_{i+2,k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,\ell} & a_{m,\ell+1} & \cdots & a_{m,k} \end{array}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{\ell}{\longleftrightarrow} & \overset{n-\ell}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} & (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} \\ \hline (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} & (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow i \\ \updownarrow m-i \end{array}$$

↑ "Matrixbaukasten"

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccc|ccc} b_{1,1} & b_{1,2} & \cdots & b_{1,j} & b_{1,j+1} & \cdots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \cdots & b_{2,j} & b_{2,j+1} & \cdots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{\ell,1} & b_{\ell,2} & \cdots & b_{\ell,j} & b_{\ell,j+1} & \cdots & b_{\ell,n} \\ \hline b_{\ell+1,1} & b_{\ell+1,2} & \cdots & b_{\ell+1,j} & b_{\ell+1,j+1} & \cdots & b_{\ell+1,n} \\ b_{\ell+2,1} & b_{\ell+1,2} & \cdots & b_{\ell+2,j} & b_{\ell+2,j+1} & \cdots & b_{\ell+2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{k,1} & b_{k,2} & \cdots & b_{k,j} & b_{k,j+1} & \cdots & b_{k,n} \end{array}\right] = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{j}{\longleftrightarrow} & \overset{n-j}{\longleftrightarrow} \end{array} \\ \left[\begin{array}{c|c} (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} & (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} \\ \hline (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} \end{array}\right] \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow \ell \\ \updownarrow k-\ell \end{array}$$



$$\left[\begin{array}{c|c}(\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} & (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\\ \hline (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} & (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\end{array}\right]\cdot\left[\begin{array}{c|c}(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} & (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n}\\ \hline (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}\end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{c|c}(\mathbf{A})_{1:i,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j}+(\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n}+(\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}\\ \hline (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j}+(\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} & (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n}+(\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}\end{array}\right]$$

Kompakte Notation:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_{1,1} &:= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} &&\in \mathbb{R}^{i,\ell},\\ \mathbf{A}_{1,2} &:= (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k} &&\in \mathbb{R}^{i,k-\ell},\\ \mathbf{A}_{2,1} &:= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} &&\in \mathbb{R}^{m-i,k},\\ \mathbf{A}_{2,2} &:= (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k} &&\in \mathbb{R}^{m-i,k-\ell},\end{aligned} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{A} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2}\\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2}\end{array}\right]$$

$$\begin{aligned}\mathbf{B}_{1,1} &:= (\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} &&\in \mathbb{R}^{\ell,j},\\ \mathbf{B}_{1,2} &:= (\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} &&\in \mathbb{R}^{\ell,n-j},\\ \mathbf{B}_{2,1} &:= (\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j} &&\in \mathbb{R}^{k-\ell,j},\\ \mathbf{B}_{2,2} &:= (\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n} &&\in \mathbb{R}^{k-\ell,n-j},\end{aligned} \quad \blacktriangleright \quad \mathbf{B} = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2}\\ \hline \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2}\end{array}\right]$$

Satz II.7.0.B (Blockmatrixmultiplikation).
Es seien $m, k, n, i, \ell, j \in \mathbb{N}$ mit $i \leqslant m$, $\ell \leqslant k$, $j \leqslant n$. Dann gilt für beliebige Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{1:i,1:j} &= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j},\\ (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{1:i,j+1:n} &= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n},\\ (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{i+1:m,1:j} &= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,1:j} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,1:j},\\ (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})_{i+1:m,j+1:n} &= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell}\cdot(\mathbf{B})_{1:\ell,j+1:n} + (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:k}\cdot(\mathbf{B})_{\ell+1:k,j+1:n}.\end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2}\\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c|c}\mathbf{B}_{1,1} & \mathbf{B}_{1,2}\\ \hline \mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{B}_{2,2}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c}\mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,1}+\mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{1,1}\mathbf{B}_{1,2}+\mathbf{A}_{1,2}\mathbf{B}_{2,2}\\ \hline \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,1}+\mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{B}_{1,2}+\mathbf{A}_{2,2}\mathbf{B}_{2,2}\end{array}\right]$$

$$\updownarrow$$

$$\begin{bmatrix}a_{1,1} & a_{1,2}\\ a_{2,1} & a_{2,2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}b_{1,1} & b_{1,2}\\ b_{2,1} & b_{2,2}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a_{1,1}b_{1,1}+a_{1,2}b_{2,1} & a_{1,1}b_{1,2}+a_{1,2}b_{2,2}\\ a_{2,1}b_{1,1}+a_{2,2}b_{2,1} & a_{2,1}b_{1,2}+a_{2,2}b_{2,2}\end{bmatrix}$$

▷ Rechne mit blockzerlegten Matrizen wie mit Matrizen mit Elementen $\in \mathbb{R}$

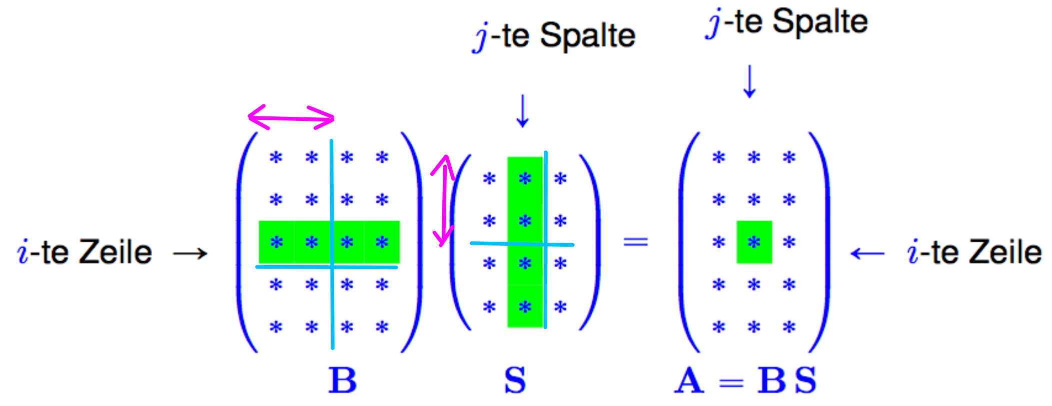
! Ausnahme: Matrixprodukt kommutiert nicht!

Zur Clickerfrage:

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,k}$, $\underline{B} \in \mathbb{R}^{k,n}$: $\quad \underline{A}\cdot\underline{B} = \begin{bmatrix}(\underline{A})_{1,:}\,\underline{B}\\ \vdots\\ (\underline{A})_{m,:}\,\underline{B}\end{bmatrix}$

vgl. Bsp. II.3.F

Wiederholung Matrixprodukt:



Beispiel II.7.0.D (Multiplikation von Pfeilmatrizen). $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mathbf{A} := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_n \\ \hline d_1 & \dots & \dots & d_n & \alpha \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}, \quad \mathbf{B} := \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & q_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & q_n \\ \hline p_1 & \dots & \dots & p_n & \beta \end{array}\right] \in \mathbb{R}^{n+1,n+1}$$

I_n, A_{12}, A_{21}, A_{22}

$$\begin{bmatrix} I & \underline{c} \\ \underline{d}^T & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & \underline{q} \\ \underline{p}^T & \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \underline{c}\,\underline{p}^T & \underline{q} + \underline{c}\beta \\ \underline{d}^T + \alpha \underline{p}^T & \underline{d}^T\underline{q} + \alpha\beta \end{bmatrix}$$

$\underline{c}\,\underline{p}^T \in \mathbb{R}^{n,n}$! $\quad \underline{d}^T\underline{q} \in \mathbb{R}$!

Anwendung: Lösung von LGS mit Blockelimination

Blockpartitionierung des LGS $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^M$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{1,1} &:= (\mathbf{A})_{1:i,1:\ell} && \in \mathbb{R}^{i,\ell}, \quad i = \ell \\ \mathbf{A}_{1,2} &:= (\mathbf{A})_{1:i,\ell+1:n} && \in \mathbb{R}^{i,n-\ell}, \\ \mathbf{A}_{2,1} &:= (\mathbf{A})_{i+1:m,1:\ell} && \in \mathbb{R}^{m-i,k}, \\ \mathbf{A}_{2,2} &:= (\mathbf{A})_{i+1:m,\ell+1:n} && \in \mathbb{R}^{m-i,n-\ell} \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \mathbf{b}_1 &:= (\mathbf{b})_{1:i}, \\ \mathbf{b}_2 &:= (\mathbf{b})_{i+1:m} \end{aligned} \quad , \quad \begin{aligned} \mathbf{x}_1 &:= (\mathbf{b})_{1:\ell}, \\ \mathbf{x}_2 &:= (\mathbf{b})_{\ell+1:n}. \end{aligned}$$

$A_{1,1}$ invertierbar

$$\left[\begin{array}{c|c} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \hline \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} \mathbf{x}_1 \\ \hline \mathbf{x}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathbf{b}_1 \\ \hline \mathbf{b}_2 \end{array}\right].$$

1. Blockzeile: $\quad A_{11}\underline{x}_1 + A_{12}\underline{x}_2 = \underline{b}_1$

$\Rightarrow \quad \underline{x}_1 = A_{11}^{-1}(\underline{b}_1 - A_{12}\underline{x}_2)$

Einsetzen in 2. Blockzeile:

$$A_{21}[A_{11}^{-1}(\underline{b}_1 - A_{12}\underline{x}_2)] + A_{22}\underline{x}_2 = \underline{b}_2$$

$$\Updownarrow$$

$$\underbrace{(-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} + A_{22})}\underline{x}_2 = \underline{b}_2 - A_{21}A_{11}^{-1}\underline{b}_1$$

Schurkomplement $S := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \in \mathbb{R}^{m-i,n-i}$

Beispiel II.7.0.H (Blockelimination bei Pfeilmatrizen).

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & c_n \\ \hline d_1 & \dots & \dots & d_n & \alpha \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \\ \hline x_{n+1} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \\ \hline b_{n+1} \end{array}\right]$$

A_{11}, $\underline{x}_1$, $\underline{b}_1$

$$\begin{bmatrix} I & \underline{c} \\ \underline{d}^T & \alpha \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \underline{x}_1 \\ x_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{b}_1 \\ b_{n+1} \end{bmatrix}$$

Schurkomplement LGS: $\underbrace{(\alpha - \underline{d}^T\underline{c})}_{\neq 0 \;\Rightarrow\; \text{LGS lösbar}} x_{n+1} = b_{n+1} - \underline{d}^T\underline{b}_1$

Berechnung der Blockinversen durch Blockzeilenumformung

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & \underline{c} & I & 0 \\ \underline{d}^T & \alpha & 0 & 1 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} I & \underline{c} & I & 0 \\ 0 & \alpha - \underline{d}^T\underline{c} & -\underline{d}^T & 1 \end{array}\right]$$

$\gamma := \alpha - \underline{d}^T\underline{c}$

$\gamma \neq 0$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} I & \underline{c} & I & 0 \\ 0 & 1 & -\underline{d}^T/\gamma & 1/\gamma \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{cc|cc} I & 0 & I + \frac{1}{\gamma}\underline{c}\,\underline{d}^T & -\underline{c}/\gamma \\ 0 & 1 & -\underline{d}^T/\gamma & 1/\gamma \end{array}\right]$$

$$\begin{bmatrix} I & \underline{c} \\ \underline{d}^T & \alpha \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I + 1/\gamma\, \underline{c}\,\underline{d}^T & -\underline{c}/\gamma \\ -\underline{d}^T/\gamma & 1/\gamma \end{bmatrix}, \quad \gamma := \alpha - \underline{d}^T \underline{c} \neq 0$$