# Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Prof. Ralf Hiptmair

Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich

Vorlesung für D-BAUG Herbstsemester 2014

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/linalgnum_BAUG
www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/

# I. Lineare Gleichungssysteme (LGS)

## I.1. Lineare Gleichungen (LGS)

### I.1.1. Definition

**Definition I.1.1.A** (Lineare Gleichung).
*Gegeben seien eine natürliche Zahl* $n \in \mathbb{N}$, *reelle Zahlen* $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ *und* $b \in \mathbb{R}$.
*Dann heisst*

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j := a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b \qquad \text{(I.1.1.B)}$$

*eine lineare Gleichung in den Unbekannten* $x_j$, $j = 1, \dots, n$ *mit Koeffizienten* $a_j$, $j = 1, \dots, n$ *und rechter Seite* $b$.

Notation: $LG(a_1, \dots, a_n; b)$

Bsp $(n=2)$: $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 4 \iff LG(1,1;4)$

Bsp $(n=2)$: $0x_1 + 1 \cdot x_2 = 1 \iff LG(0,1;1)$

### I.1.2. Lösung linearer Gleichungen

**Definition I.1.2.C** (Lösung(smenge) einer linearen GLeichung).
*Eine endliche Folge* $x_1, \dots, x_n$ *von reellen Zahlen heisst Lösung der linearen Gleichung* $LG(a_1, \dots, a_n; b)$, *wenn sie* (I.1.1.B) *erfüllt (nach "Einsetzen").*
*Für die Menge der Lösungen einer linearen Gleichung* $LG(a_1, \dots, a_n; b)$ *schreiben wir* $\mathcal{L}(LG(a_1, \dots, a_n; b))$.

Vektornotation: Lösungskomponenten $x_j$ übereinanderschreiben

✎ Notation: fette Kleinbuchstaben für Spaltenvektoren, z.B.

$$\underline{x} = \mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \leftarrow \text{1. Komponente}$$

Menge aller Spalten-vektoren der Länge $n$ $\triangleq \mathbb{R}^n$

$\triangleright \quad \mathcal{L}(LG(a_1, \dots, a_n; b)) \subset \mathbb{R}^n$

Bsp: $n=1$: $3x_1 = 5 \Rightarrow \mathcal{L} = \{[5/3]\}$

Bsp: $n=2$: $6x_1 - 2x_2 = 8$

Elimination: $x_1 = 4/3 + 1/3\, x_2 \Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 4/3 + 1/3\,\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$

freie Variable → ersetze durch Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$

$x_2 = 3x_1 - 4 \Rightarrow \mathcal{L}' = \left\{ \begin{bmatrix} \beta \\ 3\beta - 4 \end{bmatrix}, \beta \in \mathbb{R} \right\}$

$x_1$ freie Variable $\to$ Parameter $\beta \in \mathbb{R}$

Es gilt: $\mathcal{L} = \mathcal{L}'$

Allgemein: $n = 2$, $a_1 x_1 + a_2 x_2 = b$, $a_1 \neq 0$

Elimination: $x_1 = b/a_1 - a_2/a_1 \, x_2$, „$x_2$ frei" $\to \gamma \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} b/a_1 - a_2/a_1 \, \gamma \\ \gamma \end{bmatrix}, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$

Bsp: $n = 2$, $LG(0,0;b)$, $b \in \mathbb{R}$

„$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = b$"

$$\mathcal{L} = \begin{cases} \emptyset, & \text{für } b \neq 0 \\ \mathbb{R}^2, & \text{für } b = 0 \end{cases}$$

$\mathcal{L} = \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\} = \mathbb{R}^2$

**Satz I.1.2.D** (Beschreibung der Lösungsmenge linearer Gleichungen).
*Für eine gegebene lineare Gleichung* $\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)$, $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, *gilt:*

1. *Gibt es ein* $a_j$, $j = 1, \ldots, n$, *mit* $a_j \neq 0$ *dann ist die Lösungsmenge*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)) = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{j-1} \\ \frac{b}{a_j} - \frac{a_1}{a_j}\alpha_1 - \frac{a_2}{a_j}\alpha_2 - \cdots - \frac{a_n}{a_j}\alpha_n \\ \alpha_{j+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \begin{array}{l} \alpha_1 \in \mathbb{R}, \\ \vdots, \\ \alpha_{j-1} \in \mathbb{R}, \\ \alpha_{j+1} \in \mathbb{R}, \\ \vdots, \\ \alpha_n \in \mathbb{R} \end{array} \right\}$$

2. *Gilt für alle* $j \in \{1, \ldots, n\}$, *dass* $a_j = 0$, *dann besitzt* $\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)$ *die Lösungsmenge*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)) = \begin{cases} \emptyset & \text{, falls } b \neq 0\,, \\ \mathbb{R}^n & \text{, falls } b = 0\,. \end{cases}$$

Zu 1. Elimination von $x_j$ möglich, da $a_j \neq 0$:

$a_j \neq 0 \Rightarrow x_j = \frac{1}{a_j}\left(b - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} a_k x_k\right)$

freie Variable $\to$ Parameter $\alpha_k$

**Korollar I.1.2.F** (Invarianzeigenschaft der Lösungsmenge einer linearen Gleichung).
*Für beliebiges* $n \in \mathbb{N}$, *beliebige* $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_1, \ldots, a_n; b)) = \mathcal{L}(\mathrm{LG}(\lambda a_1, \ldots, \lambda a_n; \lambda b)) \qquad (*)$$

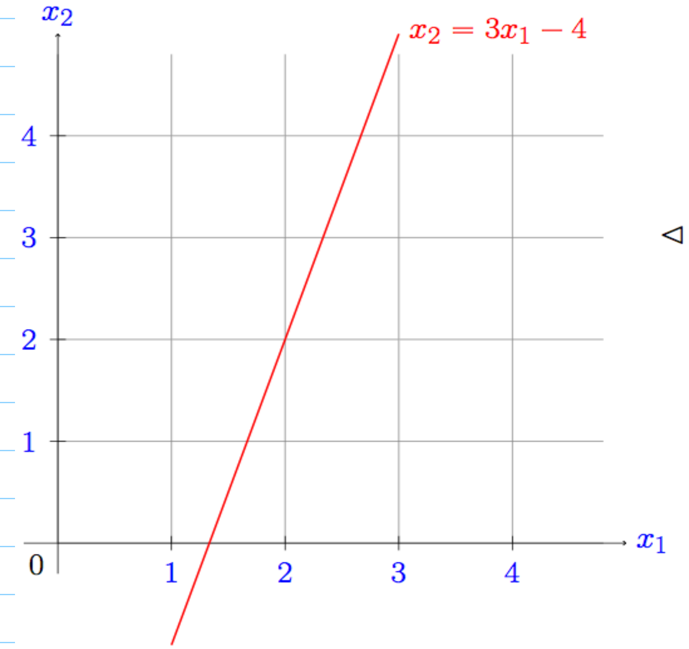
*für alle* $\lambda \in \mathbb{R} \backslash \{0\}$

$(*)$ $\begin{cases} a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = b \\ \lambda a_1 x_1 + \ldots + \lambda a_n x_n = \lambda b \end{cases}$ haben die gleichen Lösungen

[Alternativ durch Einsetzen in Lösungsformel: „Kürzen von $\lambda \neq 0$"]

## I.1.3. Visualisierung von Lösungsmengen linearer Gleichungen

$n=2$ : $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \sim$ Punkt im Kartesischen Koordinationsystem

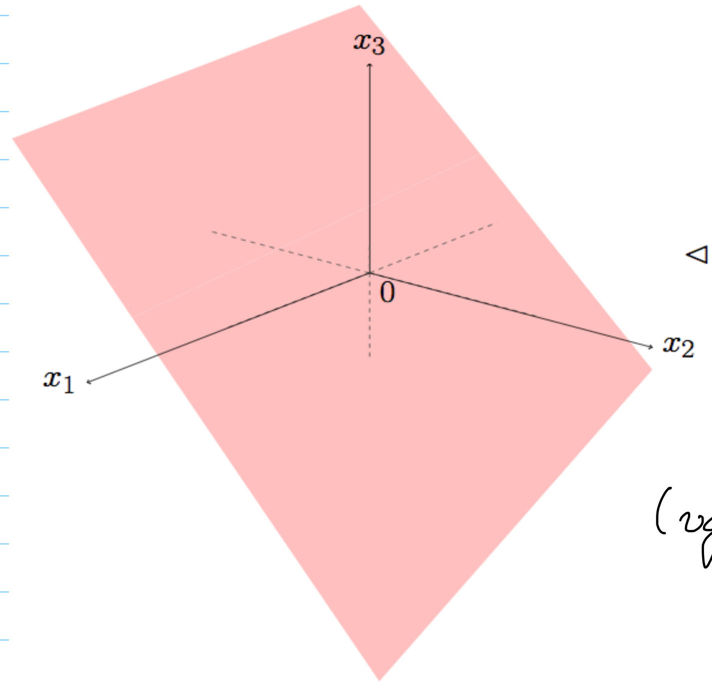



◁ Lösungsmemge der Gleichung

$$3x_1 - x_2 = 4$$

im Kartesischem Koordinatensystem.

= eine Gerade




◁ Lösungsmenge der linearen Gleichung

$$x_1 + 4x_2 + 4x_3 = 0$$

im 3D Kartesischen Koordinatensystem

= eine Ebene

(vgl. Schule → Ebenengleichung)

Falls $a_j \neq 0$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$, dann

$\mathcal{L}(LG(a_1, \ldots, a_n; b)) \sim$ Hyperebene im n-dim. Raum

## I.2. LGS: Einführung

**Definition I.2.1.A** (Lineares Gleichungssystem).
*Gegeben seien* $m, n \in \mathbb{N}$, $m \cdot n$ *reelle Zahlen* $a_{i,j}$, $i \in \{1, \ldots, m\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$, *und* $m$ *reelle Zahlen* $b_i$, $i \in \{1, \ldots, m\}$.
*Dann heissen die* $m$ *linearen Gleichungen*

$$\begin{array}{ccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array} \qquad \text{(I.2.1.B)}$$

*ein lineares Gleichungssystem (LGS) von* $m$ *Gleichungen in den* $n$ *Unbekannten* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *mit den Koeffizienten* $a_{i,j}$ *und rechter Seite* $b_1, \ldots, b_m$.
*Die lineare Gleichung* $\mathrm{LG}(a_{i,1}, \ldots, a_{i,n}; b_i)$ *heisst die* $i$*-te Zeile des linearen Gleichungssystems,* $i \in \{1, \ldots, m\}$.

Bsp: $n = m = 2$ :

$$\begin{array}{l} 1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 = 4 \\ 6x_1 - 2x_2 = 8 \end{array} \rightarrow \begin{array}{lll} a_{11} = 1 & a_{12} = 1 & b_1 = 4 \\ a_{21} = 6 & a_{22} = -2 & b_2 = 8 \end{array}$$

Bsp: $m = 1$ : "LGS = LG"

Bsp: $n = 1$ : $\begin{array}{l} a_{11}x_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 = b_m \end{array}$

**Definition I.2.1.D** (Lösung(smenge) eines linearen Gleichungssystems).
*Eine endliche Folge $x_1, \dots, x_n$ von $n$ reellen Zahlen heisst Lösung eines linearen Gleichungssystems wie definiert in Definition I.2.1.A, wenn sie alle linearen Gleichungen in Gleichung I.2.1.B erfüllt.*

Lösungsmenge eines $\underbrace{m}_{\text{Anzahl Gleichungen}} \times \underbrace{n}_{\text{Anzahl Unbekannte}}$ - LGS $\hat{=}$ Menge von Spaltenvektoren $\subset \mathbb{R}^n$

**Korollar I.2.1.F** (Characterisierung der Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).
*Die Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems wie in Definition I.2.1.A ist*

$$\underbrace{\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{1,1}, \dots, a_{1,n}; b_1))}_{\subset \mathbb{R}^n} \cap \underbrace{\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{2,1}, \dots, a_{2,n}; b_2))}_{\subset \mathbb{R}^n} \cap \cdots \cap \underbrace{\mathcal{L}(\mathrm{LG}(a_{m,1}, \dots, a_{m,n}; b_m))}_{\subset \mathbb{R}^n} .$$

## I.2.2. Matrixnotation für LGS

Grösse der Matrix

**Definition I.2.2.F** (Matrix).
*Für gegebene natürliche Zahlen $m, n \in \mathbb{N}$ verstehen wir unter einer $m \times n$-Matrix ein rechteckiges Schema von $m \cdot n$ reellen Zahlen, angeordnet in $m$ Zeilen und $n$ Spalten.*
*Die $m \cdot n$ Zahlen einer Matrix werden Elemente oder Einträge der Matrix genannt und durch zwei Indices referenziert.*

✎ Notation: grosse Buchstaben im Fettdruck für Matrizen:

$$\underline{A} = \mathbf{A} := \underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{n \text{ Spalten}} \left.\vphantom{\begin{bmatrix} a \\ a \\ \vdots \\ a \end{bmatrix}}\right\} m \text{ Zeilen}$$

✎ Notation: Eintrag der Matrix $\mathbf{A}$ in Zeile $i$ und Spalte $j$: $(\mathbf{A})_{\underset{\text{Zeilenindex}}{i},\underset{\text{Spaltenindex}}{j}}$, also

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{1,1} & (\mathbf{A})_{1,2} & \dots & (\mathbf{A})_{1,n} \\ (\mathbf{A})_{2,1} & (\mathbf{A})_{2,2} & \dots & (\mathbf{A})_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ (\mathbf{A})_{m,1} & (\mathbf{A})_{m,2} & \dots & (\mathbf{A})_{m,n} \end{bmatrix}$$

Notation: Menge der $m \times n$ - Matrizen $\mathbb{R}^{m,n}$

✎ Notation: Nullmatrix

$$\underline{0} = \mathbf{O} = \mathbf{O}_{m,n} := \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

## Sonderfall

**Definition I.2.2.H** (Spalten- und Zeilenvektoren).
*Seien* $m, n \in \mathbb{N}$. *Eine* $m \times 1$*-Matrix heisst Spaltenvektor der Länge* $m$ *und eine* $1 \times n$*-Matrix heisst Zeilenvektor der Länge* $n$.
*Im Fall von Spalten- und Zeilenvektoren bezeichnet man die Einträge auch als Komponenten.*

$$\text{“}\ \mathbb{R}^m = \mathbb{R}^{m,1}\ \text{”}$$

$$\mathbf{x} := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

Referenzierung der $i$. Komponente des Spaltenvektors $\mathbf{x}$ : $(\mathbf{x})_i,\ i \in \{1, \dots, m\}$.

$$\underline{a}^T := [\, a_1 \ a_2 \ \cdots\cdots \ a_n \,] \in \mathbb{R}^{1,n}$$

✎ Notation: fette Kleinbuchstaben mit hochgestelltem T für *Zeilenvektoren*

$$\mathbf{z}^\top := [z_1 \ z_2 \ \dots \ z_n] \ .$$

Referenzierung der $i$. Komponente des Zeilenvektors $\mathbf{z}$ : $(\mathbf{z}^\top)_i,\ i \in \{1, \dots, n\}$.

## Teilmatrizen

Für $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ :

$i$. Zeile: $(\mathbf{A})_{i,:} := [(\mathbf{A})_{i,1} \ (\mathbf{A})_{i,2} \ \dots \ (\mathbf{A})_{i,n}] \in \mathbb{R}^{1,n}$ (ein Zeilenvektor, Länge $n$ )

↳ “ : ” $\hat{=}$ alle möglichen Indizes

$j$. Spalte: $(\mathbf{A})_{:,j} := \begin{bmatrix} (\mathbf{A})_{1,j} \\ (\mathbf{A})_{2,j} \\ \vdots \\ (\mathbf{A})_{m,j} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^m$ (ein Spaltenvektor, Länge $m$ )

$$(\ i \in \{1, \dots, m\},\ \ j \in \{1, \dots, n\}\ )$$

$$\mathbf{A} := \begin{bmatrix}
(\mathbf{A})_{1,1} & (\mathbf{A})_{1,2} & \dots & (\mathbf{A})_{1,\ell} & \dots & (\mathbf{A})_{1,j} & \dots & (\mathbf{A})_{1,n} \\
(\mathbf{A})_{2,1} & (\mathbf{A})_{2,2} & \dots & (\mathbf{A})_{2,\ell} & \dots & (\mathbf{A})_{2,j} & \dots & (\mathbf{A})_{2,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\mathbf{A})_{k,1} & (\mathbf{A})_{k,2} & \dots & (\mathbf{A})_{k,\ell} & \dots & (\mathbf{A})_{k,j} & \dots & (\mathbf{A})_{k,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\mathbf{A})_{i,1} & (\mathbf{A})_{i,2} & \dots & (\mathbf{A})_{i,\ell} & \dots & (\mathbf{A})_{i,j} & \dots & (\mathbf{A})_{i,n} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(\mathbf{A})_{m,1} & (\mathbf{A})_{m,2} & \dots & (\mathbf{A})_{m,\ell} & \dots & (\mathbf{A})_{m,j} & \dots & (\mathbf{A})_{m,n}
\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m,n}$$

Für $k, i \in \{1, \dots, m\},\ k \leqslant i,\quad \ell, j \in \{1, \dots, n\},\ \ell \leqslant j$:

$$(\mathbf{A})_{k:i,\ell:j} := \begin{bmatrix}
(\mathbf{A})_{k,\ell} & (\mathbf{A})_{k,\ell+1} & \dots & (\mathbf{A})_{k,j} \\
(\mathbf{A})_{k+1,\ell} & (\mathbf{A})_{k+1,\ell+1} & \dots & (\mathbf{A})_{k+1,j} \\
\vdots & \vdots & & \vdots \\
(\mathbf{A})_{i,\ell} & (\mathbf{A})_{i,\ell+1} & \dots & (\mathbf{A})_{i,j}
\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{i-k+1,j-\ell+1} \quad \text{(Matrixblock)}$$

$k:i \ \hat{=}\ (k, k+1, \dots, i-1, i)$ : Bereich aufeinanderfolgender ganzer Zahlen

# Spezielle Matrizen :

**Definition I.2.2.J** (Diagonalmatrix).
*Eine $n \times n$-Matrix $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, heisst Diagonalmatrix, wenn $(\mathbf{D})_{i,j} = 0$ für alle $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $i \neq j$.*

eine quadratische Matrix

Terminologie: Die Zahlen $(\mathbf{D})_{i,i}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, heissen Diagonaleinträge.

✎ Notation: Für gegebene Zahlen $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$/gegebenen Spaltenvektor $\mathbf{d} \in \mathbb{R}^n$

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n) := \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n},$$

$$\operatorname{diag}(\mathbf{d}) := \begin{bmatrix} (\mathbf{d})_1 & 0 & \cdots & & \cdots & 0 \\ 0 & (\mathbf{d})_2 & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & (\mathbf{d})_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}.$$

Bem : Diagonalmatrizen = spezielle Klasse von strukturierten Matrizen

# Matrixnotation von LGS

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & \cdots & +a_{1,n}x_n & = & b_1 \\ a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & \cdots & +a_{2,n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1}x_1 & + & a_{m,2}x_2 & + & \cdots & +a_{m,n}x_n & = & b_m \end{array}$$

$$\Updownarrow$$

Rechte-Seite-Vektor

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}}_{m \times n \text{ Koeffizientenmatrix}} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}}_{\text{Vektor der Unbekannten}} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \longleftrightarrow \mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad \text{(I.2.2.L)}$$

'·' wird normalerweise weggelassen

Bsp : LGS mit diagonaler Koeffizientenmatrix

$$\operatorname{diag}(a_1, \ldots, a_n) \cdot \underline{x} = \underline{b}$$

$$\Updownarrow$$

entkoppelte "eindimensionale" lineare Gleichungen
$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 x_1 = b_1 \\ \vdots \\ a_n x_n = b_n \end{array} \right.$$

Wenn $a_i \neq 0$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$ : $\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} b_1/a_1 \\ \vdots \\ b_n/a_n \end{bmatrix} \right\}$

(eindeutige Lösung)

# 1.4. Gausselimination

## 1.4.1. Isolation & Elimination

## 1.4.2. Zeilenumformungen

**Definition I.4.2.A** (Zeilenumformungen eines LGS).
*Bezogen auf das lineare Gleichungssystem (I.2.1.B) schreiben wir*

$$\text{Zeile } j \;\leftarrow\; \text{Zeile } j + \beta \cdot \text{Zeile } i\,, \qquad \text{(I.4.2.C)}$$

*für ein* $\beta \in \mathbb{R}$, *wenn die* $j$. *Zeile,* $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$a_{j,1}x_1 + a_{j,2}x_2 + \cdots + a_{j,n}x_n = b_j\,,$$

ersetzt *wird durch eine "Summe aus der* $j$. *Zeile und dem* $\beta$*-fachen der* $i$. *Zeile",* $i \in \{1,\dots,m\}$:

$$(a_{j,1} + \beta a_{i,1})x_1 + (a_{j,2} + \beta a_{i,2})x_2 + \cdots + (a_{j,n} + \beta a_{i,n})x_n = b_j + \beta b_i\,.$$

*Wir schreiben für* $\alpha \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\dots,m\}$,

$$\text{Zeile } j \;\leftarrow\; \alpha \cdot \text{Zeile } j\,, \qquad \text{(I.4.2.E)}$$

*wenn die* $j$. *Zeile ersetzt wird durch das "*$\alpha$*-fache der* $j$. *Zeile" (Zeilenskalierung):*

$$\alpha a_{j,1}x_1 + \alpha a_{j,2}x_2 + \cdots + \alpha a_{j,n}x_n = \alpha b_j\,.$$

*Diese Transformationen eines linearen Gleichungssystems nennt man Zeilenumformungen.*

→ Zeilenumformungen analog für Matrizen

$i$. Zeile eines LGS ($i \in \{1,\dots,m\}$)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i\,, \qquad a_{k\ell} \neq 0$$

→ [Isolation] $\displaystyle x_\ell = \frac{1}{a_{i\ell}}\Big(b_i - \sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{n} a_{ik}x_k\Big)$

$j$. Zeile: $\quad a_{j1}x_1 + \dots + a_{j\ell}x_\ell + \dots + a_{jn}x_n = b_j$

Elimination von $x_\ell$ aus der $j$. Zeile:

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{n} a_{jk}x_k + a_{j\ell}\frac{1}{a_{i\ell}}\Big(b_i - \sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{n} a_{ik}x_k\Big) = b_j$$

$$\sum_{\substack{k=1\\k\neq\ell}}^{n}\Big(a_{jk} - \frac{a_{j\ell}}{a_{i\ell}}a_{ik}\Big)x_k = b_j - \frac{a_{j\ell}}{a_{i\ell}}b_i \qquad (*)$$

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\ell} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n}\\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\ell} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,\ell} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & a_{j,\ell} & \dots & a_{j,k} & \dots & a_{j,n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots\\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,\ell} & \dots & a_{m,k} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_\ell\\ \vdots\\ x_k\\ \vdots\\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1\\ b_2\\ \vdots\\ b_i\\ \vdots\\ b_j\\ \vdots\\ b_m \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ Isolation & Elimination von $x_\ell$ aus k. Zeile

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,\ell} & \dots & a_{1,k} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,\ell} & \dots & a_{2,k} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{i,1} & a_{i,2} & \dots & a_{i,\ell} & \dots & a_{i,k} & \dots & a_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{j,1}-ta_{i,1} & a_{j,2}-ta_{i,2} & \dots & 0^{*} & \dots & a_{j,k}-ta_{i,k} & \dots & a_{j,n}-ta_{i,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,\ell} & \dots & a_{m,k} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_\ell \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_j - tb_i \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix},$$

mit $t := \frac{a_{j,\ell}}{a_{i,\ell}}$.

$* = 0$, da keine Summation über $k=\ell$ in $(*)$

**Satz I.4.2.G** (Invarianz der Lösungsmenge unter Zeilenumformungen).
*Unterwirft man ein lineares Gleichungssystem in $n \in \mathbb{N}$ Unbekannten und mit $m \in \mathbb{N}$ Gleichungen den Zeilenumformungen*

$$\begin{aligned} &\text{Zeile } j \leftarrow \text{Zeile } j + \beta \cdot \text{Zeile } i\,, && j,i \in \{1,\dots,m\},\ i \neq j\,, \\ &\text{Zeile } j \leftarrow \alpha \cdot \text{Zeile } j\,, && j \in \{1,\dots,m\},\ \alpha \in \mathbb{R}\setminus\{0\}\,, \end{aligned}$$

*dann ändert sich seine Lösungsmenge nicht.*

"Beweis": Sei $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ Lsg. von $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$

$$\Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{n} \beta a_{ik} x_k = \beta b_i \qquad \forall \beta \in \mathbb{R}$$

$$+ \quad \sum_{k=1}^{n} a_{jk} x_k = b_j$$

$$\sum_{k=1}^{n} (a_{jk} + \beta a_{ik}) x_k = b_j + \beta b_i \qquad \square$$

Idee: $\underline{A}\underline{x} = \underline{b} \xrightarrow{\text{Zeilenumformungen}} \underbrace{\underline{Z}\underline{x} = \underline{y}}_{\text{"einfacher zu lösen"}}$

## I.4.4. Gausselimination zur Berechnung der ZSF

**Satz I.4.4.A** (Transformierbarkeit von LGS in Zeilenstufenform durch Zeilenumformungen).
*Jedes lineare Gleichungssystem lässt sich durch Zeilenumformungen gemäss Definition I.4.2.A in ein lineares Gleichungssystem transformieren, dessen Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform gemäss Definition I.4.3.A vorliegt.*

**Korollar I.4.4.C** (Transformierbarkeit von Matrizen in Zeilenstufenform durch Zeilenumformungen).
*Jede beliebige $m \times n$-Matrix lässt sich durch Zeilenumformungen analog zu Definition I.4.2.A auf Zeilenstufenform gemäss Definition I.4.3.A transformieren.*

Gegeben: LGS $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$
$m, n \in \mathbb{N}$

$\ell := 1$ % $\ell$ ist ein Zeilenindex
$j := 1$ % $j$ ist ein Spaltenindex
$r := 0$ % Meta-Index für Pivotspalten
**while** $(j \leqslant n)$ **do**
{ % Suche nach Pivotelement
$i := \ell$ % $i$ ist ein Zeilenindex (Hilfsvariable)
**while** $(i \leqslant m$ **and** $(\mathbf{A})_{i,j} = 0)$ **do** { $i \leftarrow i+1$ } ⇐ Such Einträge $\neq 0$ in $(A)_{\ell:m,j}$
**if** $(i \leqslant m)$ **then** % $(\mathbf{A})_{\ell:m,j} = \mathbf{0}$, wenn $i > m$!
{ $i_{r+1} := j$ % Speichere Position der Pivotspalte
Zeilenvertauschung: $i$. Zeile $\longleftrightarrow$ $\ell$. Zeile
Zeilenskalierung: $\ell$. Zeile $\leftarrow \frac{1}{(\mathbf{A})_{\ell,j}} \cdot$ $\ell$. Zeile
**for** $(k \in \{1,\ldots,m\}\setminus\{\ell\})$ **do**
{ Zeilenkombination: $k$. Zeile $\leftarrow$ $k$. Zeile $-(\mathbf{A})_{k,j} \cdot$ $\ell$. Zeile }
$\ell \leftarrow \ell + 1$ % Eine Zeile weniger zu bearbeiten
$r \leftarrow r + 1$ % (Eventuell) weiter zu nächster Pivotspalte
}
$j \leftarrow j + 1$ % Weiter zu nächster Spalte
}

while <Bed> do{<Anweisung>} : Solange <Anw.> wie <Bed.> erfüllt

Ausgabe : Transformierte Matrix $\underline{A}$ in ZSF,
transformierter Rechte-Seite-Vektor,
Positionen $i_k$, $k \in \{1,..,r\}$ der Pivotspalten

**Satz I.4.4.C** (Transformation auf Zeilenstufenform durch Gausselimination).
*Die Gausselimination (siehe Algorithmus) transformiert eine beliebiges lineares Gleichungssystem durch Zeilenumformungen gemäss Definition I.4.2.A auf Zeilenstufenform nach Definition I.4.3.A.*

**Korollar I.4.4.D** (Invarianz der Lösungsmenge bei Gausselimination).
*Die bei Gausselimination stattfindende Transformation eines lineares Gleichungssystems ändert dessen Lösungsmenge nicht.*

**Satz I.4.4.F** (Eindeutigkeit der Zeilenstufenform).
*Die nach Satz I.4.4.A/Korollar I.4.4.C durch Zeilenumformungen hergestellten Zeilenstufenformen von linearen Gleichungssystemen/Matrizen sind eindeutig.*

**Definition I.4.4.H** (Rang einer Matrix).
*Die Anzahl $r$ der Pivotspalten in der Zeilenstufenform einer Matrix bezeichnet man als Rang der Matrix (in Zeichen: $\mathrm{Rang}(\mathbf{A})$ für eine Matrix $\mathbf{A}$).*

Bsp I.4.4.K : ZSF für verallgemeinerte Dreiecksmatrizen

$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $n \geqslant m$, heisst verallgemeinerte Dreiecksmatrix, wenn $(\mathbf{A})_{i,j} = 0$ für $i > j$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & \cdots & a_{1,m} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & \cdots & a_{2,m} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & a_{m-1,m} & \cdots & a_{m-1,n} \\ 0 & \cdots & & \cdots & 0 & a_{m,m} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}.$$

Wenn $(A)_{ii} \neq 0 \Rightarrow$ ZSF

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{1,m+1} & \dots & z_{1,n} \\ 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 & z_{2,m+1} & \dots & z_{2,n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 & z_{m-1,m+1} & \dots & z_{m-1,n} \\ 0 & \dots & & \dots & 0 & 1 & z_{m,m+1} & \dots & z_{m,n} \end{bmatrix}$$

$\triangleright$ $\operatorname{Rang}(A) = m$