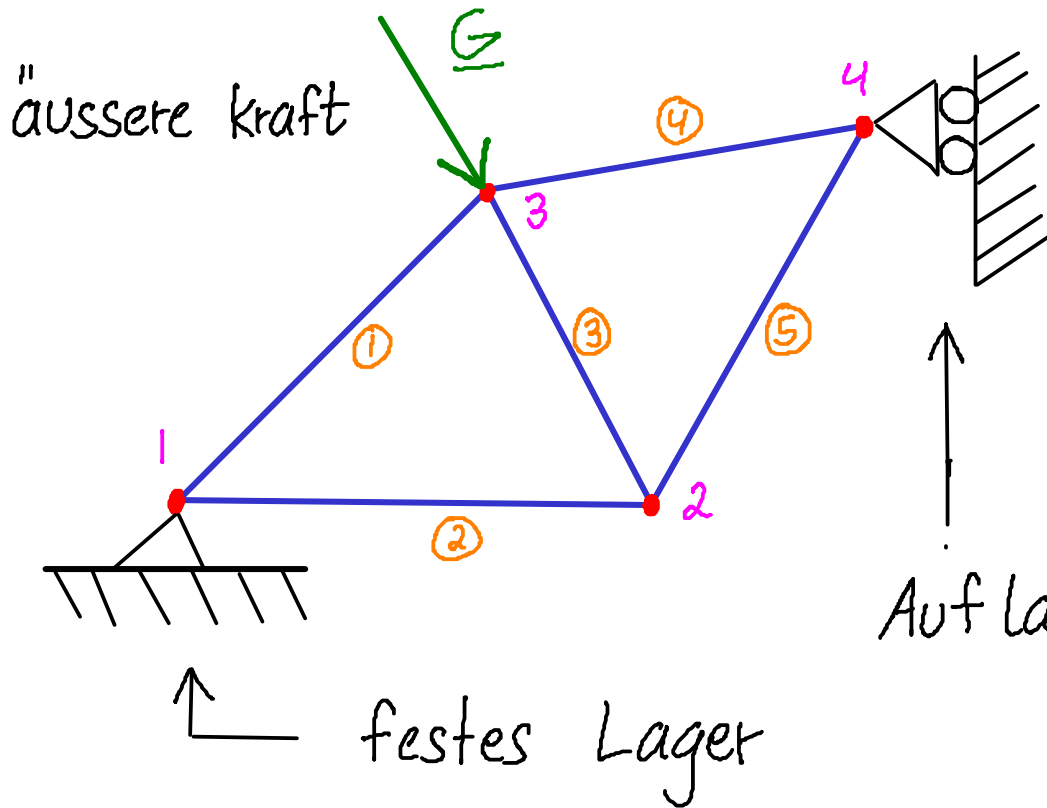


# 5.5.1. Projekt: Ideale statische Fachwerke



—  $\hat{=}$  masselose Stäbe  
(nur auf Zug/Druck belastbar)

•  $\hat{=}$  reibungsfreie Gelenke

Auf Lager : übt nur Kraft senkrecht zur Wand aus

Gelenke numeriert von 1 bis k  
Stäbe numeriert von 1 bis s

Gegeben :  
- Positionen aller Gelenke  
- Lage der Stäbe (zwischen Gelenken)  
- Position und Art der Lager

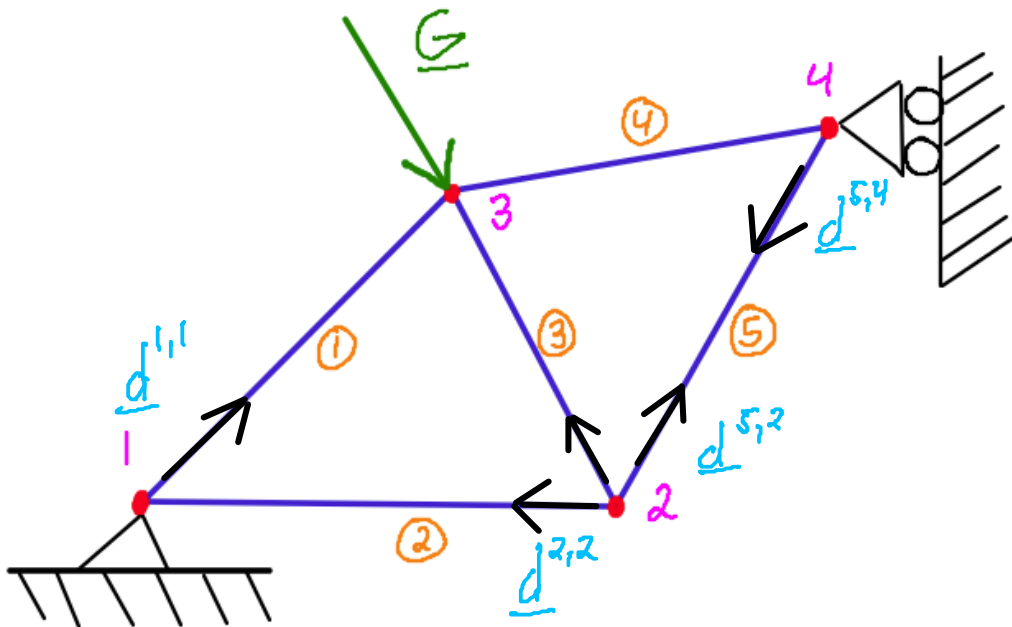
Gesucht: - Stabkräfte und Lagerkräfte

Notation:  $S(i) = \{ \text{Nummern der Stäbe an Lager } i \}$

$\underline{d}^{j,i} \in \mathbb{R}^2 \hat{=} \text{Vektor in Richtung des } j. \text{ Stabes,}$   
 weist vom Gelenk  $i$  weg,  $\|\underline{d}^{j,i}\| = 1, j \in S(i)$

$F_j \hat{=} \text{Betrag der Kraft in Stab } j, [F] = 1 \text{ N}$

$\underline{L}^i \in \mathbb{R}^2 \hat{=} \text{Lagerkraft auf Gelenk } i$



$$\begin{aligned} S(1) &= \{1, 2\} \\ S(2) &= \{2, 3, 5\} \\ S(3) &= \{1, 4, 3\} \\ S(4) &= \{4, 5\} \end{aligned}$$

Beachte:  $\underline{d}^{j,i} = -\underline{d}^{j,n}, n \neq i$

# Kodierung einer Fachwerkstruktur in MATLAB

```
function trussimulator(jointpos, links, supports, ...  
                        supplanes, forces)
```

```
% define truss
```

```
① jointpos = [0 1 0.75 1.5; 0 0 1 1.25];
```

```
② links = [1 3; 1 2; 2 3; 3 4; 2 4];
```

```
③ supports = [1 4];
```

```
④ supplanes = [0 1; 0 0];
```

```
⑤ forces = [0 0 0.5 0; 0 0 0.5 0];
```

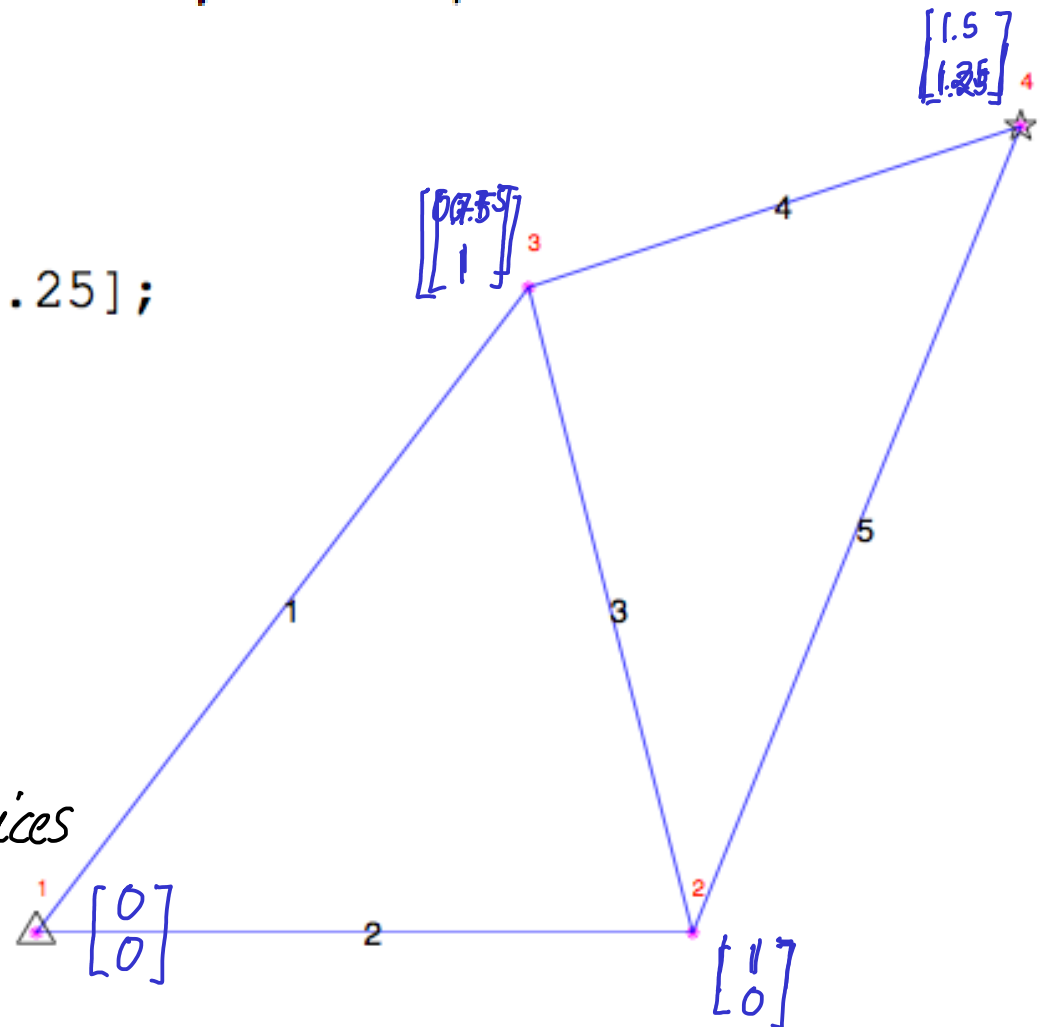
①  $\in \mathbb{R}^{2,k}$  : Spalten  $\hat{=}$  Gelenkkoordinaten

②  $\in \{1, \dots, k\}^{s,2}$  : Stäbe, Paare von Gelenkindices

③  $\in \{1, \dots, k\}^m$  : Lagerindices

④  $\in \mathbb{R}^{2,m}$  : Normalenvektoren der Auflager (festes Lager, wenn  $= \underline{0}$ )

⑤  $\in \mathbb{R}^{2,k}$  : Kraftkoordinatenvektoren der externen Kräfte



# Zeichnen des Fachwerks in MATLAB

```
% Draw truss
figure('name','Truss');
% Mark joints by magenta star
plot(jointpos(1,:), jointpos(2,:), 'm*'); hold on;
ax = axis; axis off; axis equal;
dx = ax(2)-ax(1); dy = ax(4) - ax(3);
% Annotate joints
for l=1:k
    text(jointpos(1,l), jointpos(2,l)+0.05*dy, num2str(l))
end
```

◁ Zeichnen der Gelenke

```
% Visualize links
for l=1:s
    % Draw blue line for a link
    plot(jointpos(1, links(l,:)), jointpos(2, links(l,:)), 'b-');
    % Annotate links with their numbers
    mp = 0.5*(jointpos(:, links(l,1))+jointpos(:, links(l,2)));
    text(mp(1), mp(2), num2str(l), 'color', 'k', 'fontsize', 14);
end
```

◁ Zeichnen der Stäbe

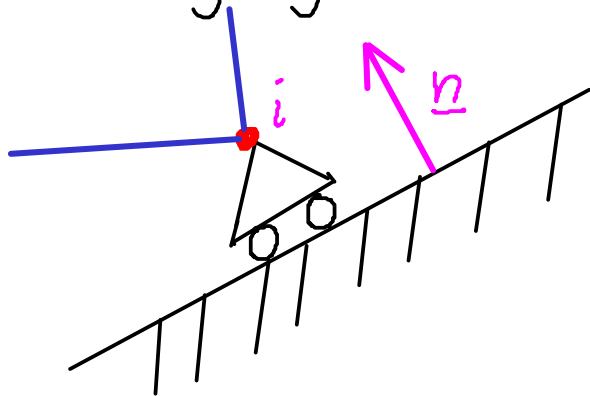
# Prinzip: Kräftegleichgewicht an Gelenken

$$\sum_{j \in S(i)} F_j d^{z,i} + L_i + G_i = 0, \quad i = 1, \dots, k \quad (5.5.1.A)$$

↑  
Unbekannte

↑  
"äußere Kraft auf Gelenk  $i$   
(übt Druck aus auf das Gelenk)

Nebenbedingung für Auflager :



$\underline{n} \in \mathbb{R}^2$  senkrecht zur Wand,  
 $\|\underline{n}\| = 1$

$$\Rightarrow \underline{L}^i - l_i \underline{n} = 0 \quad (5.5.1.B)$$

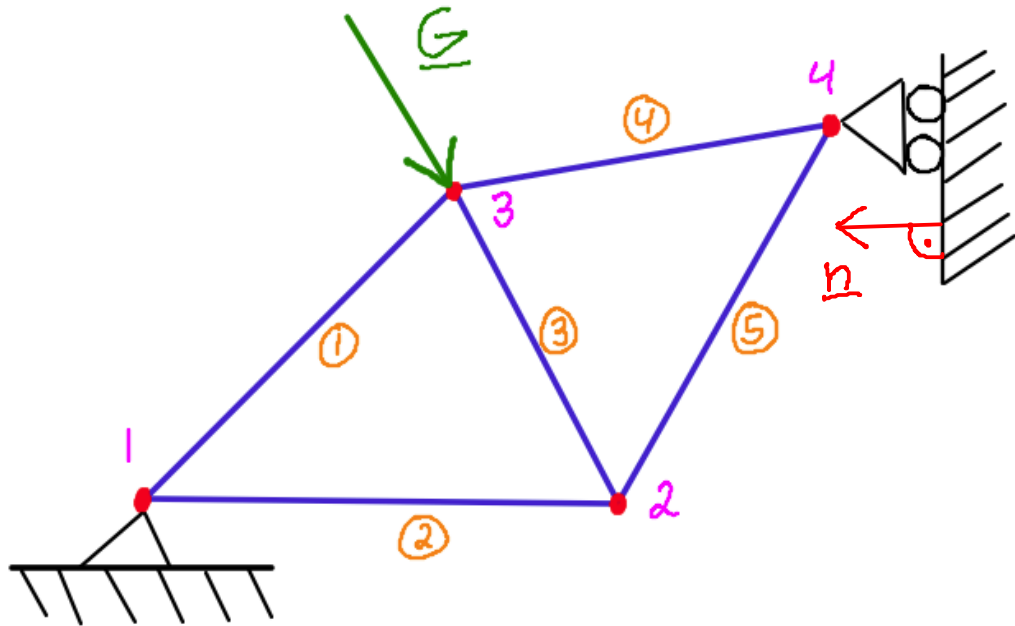
↑  
weitere Unbekannte

(5.5.1.A) & (5.5.1.B)  $\hat{=}$  Lineares Gleichungssystem

Unbekannte:

$S$	Stabkräfte	$F_1, \dots, F_5$	$\in \mathbb{R}$
$r$	Lagerkräfte	$\underline{L}_1, \dots, \underline{L}_r$	$\in \mathbb{R}^2$
$q$	Auflagerkräfte	$l_{n,1}, \dots, l_{n,q}$	$\in \mathbb{R}$

Bsp: Aus (5.5.1.A)



$$\begin{aligned}
 1: & F_1 \underline{d}^{1,1} + F_2 \underline{d}^{2,1} + \underline{L}^1 = \underline{0} \\
 2: & F_2 \underline{d}^{2,2} + F_3 \underline{d}^{3,2} + F_5 \underline{d}^{5,2} = \underline{0} \\
 3: & F_1 \underline{d}^{1,3} + F_3 \underline{d}^{3,3} + F_4 \underline{d}^{4,3} + \underline{G} = \underline{0} \\
 4: & F_4 \underline{d}^{4,4} + F_5 \underline{d}^{5,4} + \underline{L}^4 = \underline{0}
 \end{aligned}$$

Aus (5.5.1.B)

$$4: \underline{L}^4 - l_4 \underline{n} = \underline{0}$$

$\Leftrightarrow$  LGS:  $\underline{A} \underline{x} = \underline{b}$  ,  $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$

$$m = 2k + 2q \triangleq \text{Anzahl der Gleichungen}$$

$$n = s + 2r + q \triangleq \text{Anzahl der Unbekannten}$$

Def 5.5.1.C: Das ideale Fachwerk heisst **statisch bestimmt** wenn die Koeffizientenmatrix des LGS aus (5.5.1.A) und (5.5.1.B) invertierbar ist.

Notwendig für "statisch bestimmt":

$$n = m \iff 2k = s + \underbrace{2r + q}$$

Gesamtzahl der Lagerkräfte  
(→ Vorlesung "Mechanik")

Bemerkung: Aus den Auflagergleichungen (3.8.2.B) kann natürlich  $\underline{L}^i$  isoliert und in die anderen Gleichungen eingesetzt werden (empfohlen).

Für das Beispiel ergibt sich damit das Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcll}
 F_1 \underline{d}^{1,1} + F_2 \underline{d}^{2,1} & & + \underline{L}^1 & = \underline{0} \\
 & F_2 \underline{d}^{3,2} + & F_5 \underline{d}^{5,2} & = \underline{0} \\
 F_1 \underline{d}^{1,3} & + F_3 \underline{d}^{3,3} + F_4 \underline{d}^{4,3} & & = -\underline{G} \\
 & & F_4 \underline{d}^{4,4} + F_5 \underline{d}^{5,4} & + \underline{l}_4 \underline{n} = \underline{0}
 \end{array}$$





