Lineare Algebra und Numerische Mathematik

Prof. Ralf Hiptmair

Seminar for Applied Mathematics, ETH Zürich

Vorlesung für D-BAUG Herbstsemester 2014

www.math.ethz.ch/education/bachelor/lectures/hs2014/other/linalgnum_BAUG
www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair/tmp/LANM/

4.4.1 Überbestimmte lineare Gleichungssystemme

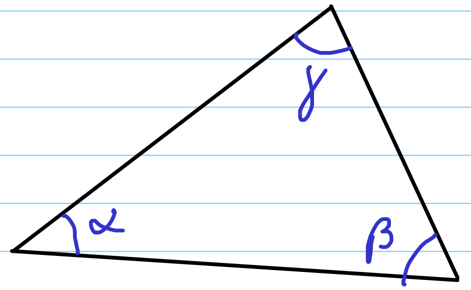
LGS: $Ax = b$, $A \in \mathbb{R}^{m,n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $m > n$

Satz I.4.5.B über Lösungsmengen von LGS $\Rightarrow$ Für $b \neq 0$ wird i.a. keine Lösung existieren

Sofort aus der Definition III.3.0.B von Bild(A) folgt:

Korollar IV.4.1.A (Existenz von Lösungen überbestimmter lienearer Gleichungssysteme).
Eine Lösung des linearen Gleichungssystems $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *mit* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *existiert* genau dann, *wenn* $\mathbf{b} \in \mathrm{Bild}(\mathbf{A})$.

Beispiel IV.4.1.C: Messung von Winkeln im Dreieck



Gemessene Winkel $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$

Exakte Winkel erfüllen

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

LGS: [$m = 4$, $n = 3$]

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \\ \pi \end{bmatrix}$$

Lösung ohne Messfehler: $\alpha = \tilde{\alpha}$, $\beta = \tilde{\beta}$, $\gamma = \tilde{\gamma}$

Mit Messfehlern: LGS hat in der Regel keine Lösung

Beispiel IV.4.1.D: Messung eines elektrischen Widerstandes

Ohmsches Gesetz $U = R \cdot I$

Spannung [V] Stromstärke [A]

Messreihe:

U	u_1	u_2	u_3	......	u_m
I	i_1	i_2	i_3	.....	i_m

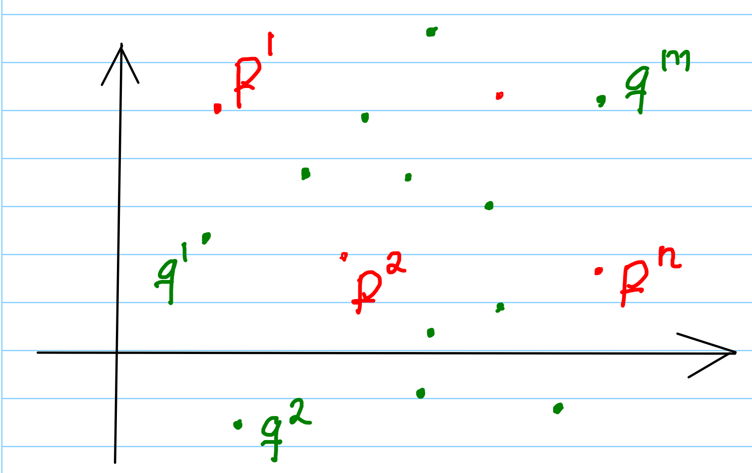
Ohne Messfehler: $\exists R \in \mathbb{R}: u_j = R i_j$, $j \in \{1, .., m\}$

"LGS" [$n = 1$!]

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ \vdots \\ i_m \end{bmatrix} [R] = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix}$$

$\rightarrow$ i.a. unlösbar für gemessene Daten

Beispiel IV.4.1.E : Ausmessen von Schallquellen



In der Ebene:

n Schallquellen unbekannter Leistungen $x_j, j \in \{1,..,n\}$ an Positionen $p^j \in \mathbb{R}^2$.

Lautstärkenmessung an m Orten $q^\ell, \ell \in \{1,...,m\}$ $\quad m > n$

$q^\ell \neq p^j \quad \forall \ell, j$

Abnahme der Lautstärke (Schallintensität) mit zunehmender Entfernung $d > 0$:

$$L(d) = \frac{1}{d^2} X$$

↳ Leistung der Schallquelle

Physik: Additive Überlagerung von Schallwellen

=> Schallintensität am Ort q^ℓ:

$$\underbrace{L(q^\ell) = \sum_{j=1}^{n} \frac{x_j}{\|q^\ell - p^j\|}, \quad \ell \in \{1,..,m\}}$$

$m \times n$ - LGS in Unbekannten x_j, überbestimmt

Beispiel IV.4.1.F : Rekonstruktion eines Kreises aus "Punktwolke"

Kreisgleichung:

$$K(z,r) = \{ x \in \mathbb{R}^2 : \|x - z\|^2 = r^2 \}$$

[$z \in \mathbb{R}^2$ ≙ Mittelpunkt, $r > 0$ ≙ Radius]

Gegeben: Punkte $p^1, p^2, ..., p^m \in \mathbb{R}^2$, $m \geq 4$

Ideal: $\exists z \in \mathbb{R}^2, r > 0 : p^j \in K(z,r)$

Real: Zeichenungenauigkeit / Messfehler => $p^j \notin K(z,r)$

[es gibt i.a. keinen Kreis auf dem alle Punkte liegen]

=> $\|p^\ell - z\|^2 - r^2 = 0$

$\Leftrightarrow \|p^\ell\|^2 - 2z_1(p^\ell)_1 - 2z_2(p^\ell)_2 + z_1^2 + z_2^2 - r^2 = 0$

[Unbekannte: z, r]

Nicht-linear!

▷ Trick: Neue Unbekannte

$x_1 := -2z_1$
$x_2 := -2z_2$
$x_3 := z_1^2 + z_2^2 - r^2$

=> $\underbrace{(p^\ell)_1 x_1 + (p^\ell)_2 x_2 + x_3 = -\|p^\ell\|^2}$, $\ell \in \{1,..,m\}$

$m \times 3$ - LGS, überbestimmt