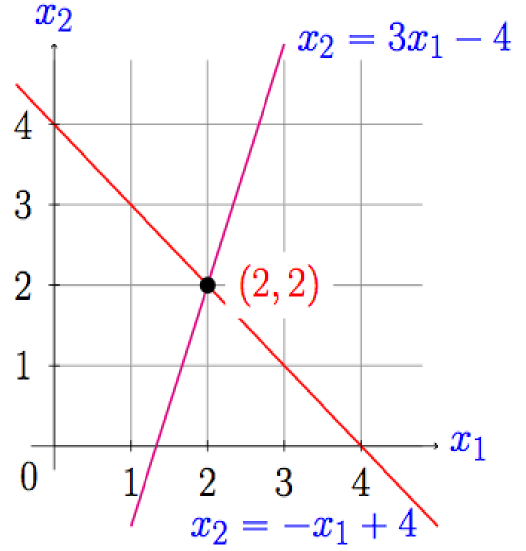
1.4.5. Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme

Veranschaulichung im Kartesischen Koordinatensystem:

Korollar 1.2.1.F & Abschnitt 1.1.3

$\mathcal{L}(LGS) = \bigcap$ Hyperebenen

Bsp. in 2D:



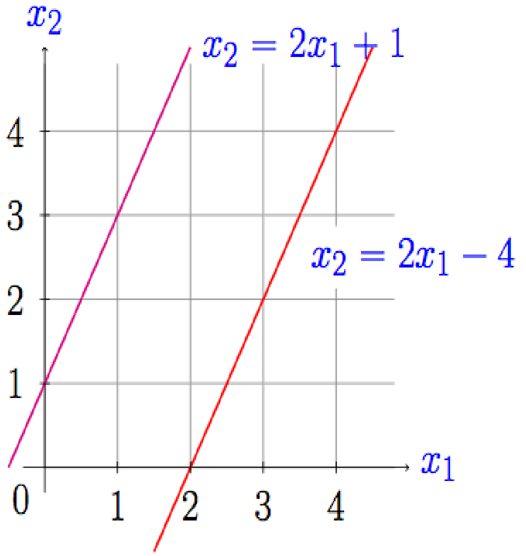
Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 4 \\ 6x_1 - x_2 &= 8 \end{aligned}$$

◁ • Lösungsmengen der einzelnen linearen Gleichungen sind Hyperebenen in 2D (Geraden)

• Schnittpunkt der Geraden ist *eindeutige* Lösung des LGS

$\mathcal{L} = \{ \binom{2}{2} \}$



Lineares Gleichungssystem:

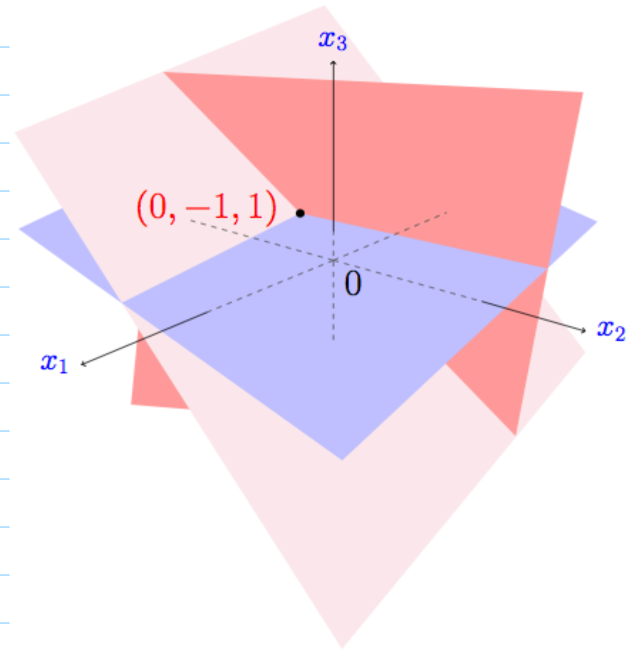
$$\begin{aligned} 4x_1 - 2x_2 &= -2 \\ 2x_1 - x_2 &= 4\,. \end{aligned}$$

◁ Lösungsmengen der linearen Gleichungen $\hat{=}$ parallele Geraden

keine Lösung

$\mathcal{L} = \emptyset$

Bsp in 3D:



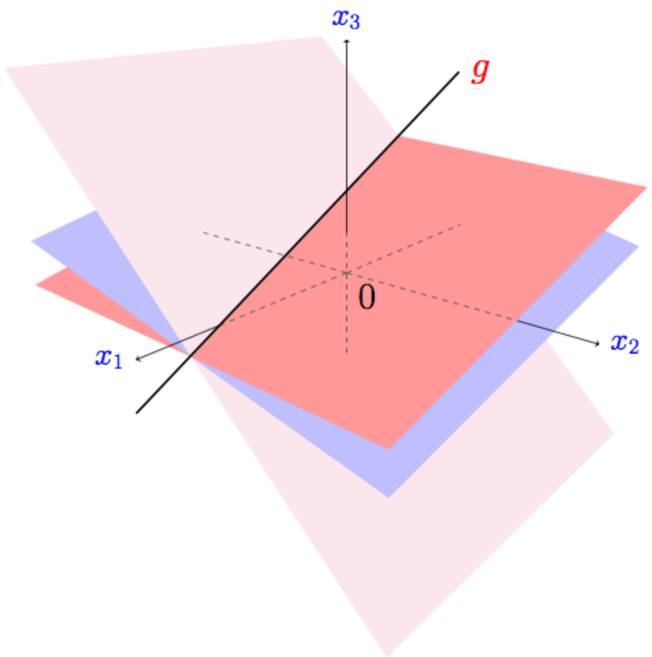
Lineares Gleichungssystem:

$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 4x_3 &= 0 \\ 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 12 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1\,. \end{aligned}$$

◁ • Lösungsmengen der linearen Gleichungen $\hat{=}$ Ebenen

• Eindeutige Lösung = Schnittpunkt von drei Ebenen

$\mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$



Lineares Gleichungssystem:

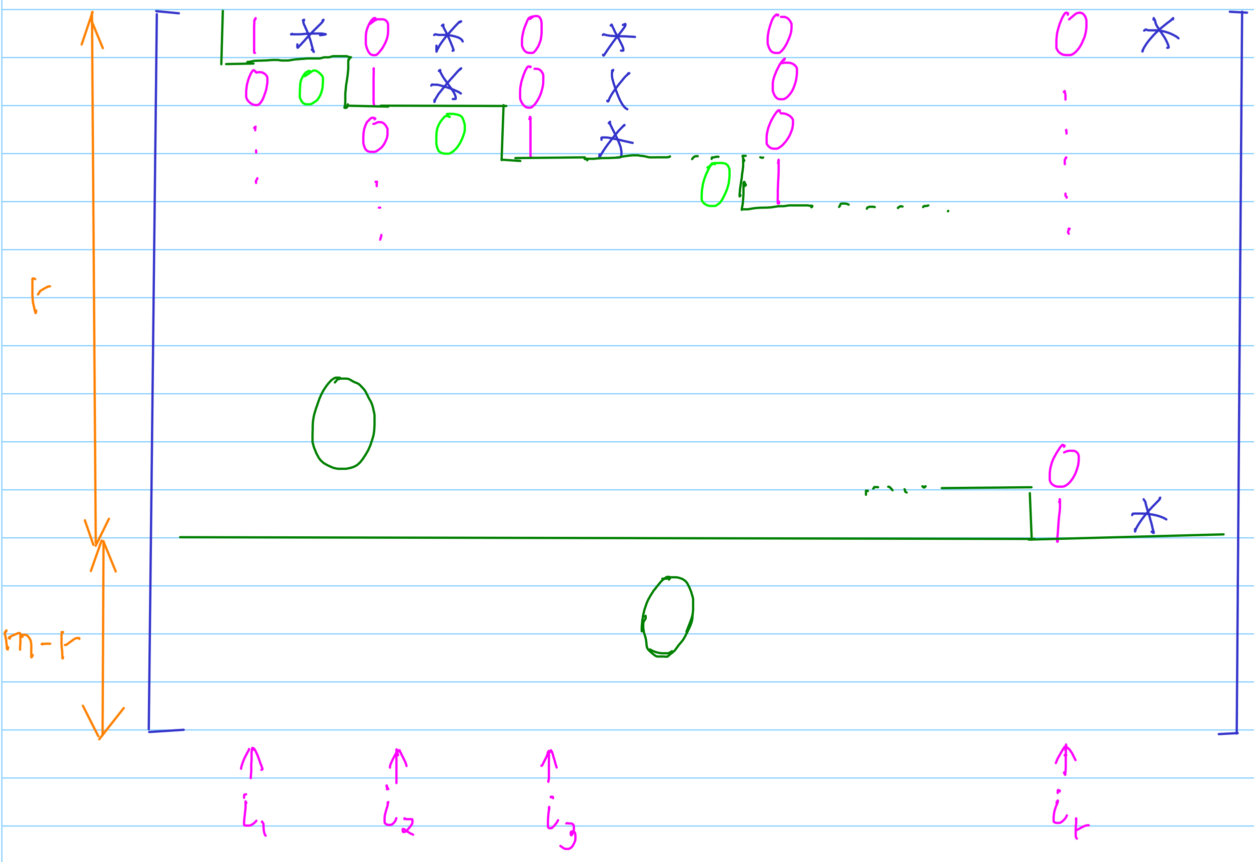
$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + 16x_3 &= 12 \\ -7x_2 - 7x_3 &= 0 \\ 4x_2 + 4x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

◁ Lösungsmenge = Gerade im Schnitt der drei Ebenen: unendlich viele Lösungen.

$\mathcal{L} = \{ \underline{x} \in \mathbb{R}^3 : \underline{x} \in g \}$

"Sonde" : Zeilenstufenform (ZSF, Def. 1.4.3.A)

Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ in ZSF:



$r \in \mathbb{N} \triangleq$ Anz. (Pivotspalten) : Rang $(\underline{A})$

↑

die ersten r Einheitsvektoren

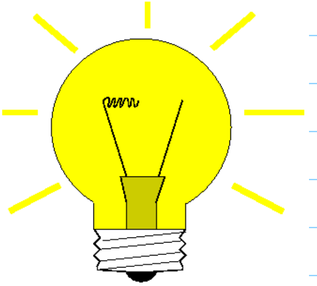
$* \triangleq$ beliebiger Matrixeintrag

Lösen von LGS in ZSF:

- Lösungskomponenten zu Nicht-Pivotspalten sind "frei" $\longrightarrow$ Parameter
- Lösungskomponenten x_{i_k}, $k \in \{1, \dots, r\}$ abhängig

Algebraisches Vorgehen:

LGS: $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$



Idee: Gausselimination

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \longrightarrow \underline{Z}\,\underline{x} = \underline{y}$$

Koeffizientenmatrix in Zeilenstufenform

Korollar I.4.4.D $\Rightarrow$ $\mathcal{L}(\underline{A};\underline{b}) = \mathcal{L}(\underline{Z};\underline{y})$

$\triangleright$ Es genügt, die Lösungsmengen von LGS mit Koeffizientenmatrizen in Zeilenstufenform zu untersuchen.

Beispiele:

(i) $n = m$ (Anz. Gleichungen = Anz. Unbekannte)

- $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

Rang$(A) = n$

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung $\underline{x} = \underline{y}$

(ii) m, n allgemein, $r = \text{Rang}(A) < \min(m,n)$

- $$\begin{array}{c} \\ r \\ \\ m-r \end{array} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & z_{1,r+1} & \cdots & z_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & & & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z_{r,r+1} & \cdots & z_{r,n} \\ \hline & & \underline{0} & & & \underline{0} & \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$\underbrace{}_{r}\ \underbrace{}_{n-r}$$

Falls $\begin{bmatrix} y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow \mathcal{L} = \emptyset$ (keine Lösung)

Falls $y_{r+1} = \ldots = y_m = 0$

$\Rightarrow$ $x_{r+1}, \ldots, x_n$ sind freie Variablen

$\Rightarrow$ $n-r$ Parameter $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \ldots, x_n = \alpha_n$

[Nach $x_1, \ldots, x_r$ kann aufgelöst werden]

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 - \alpha_{r+1} z_{1,r+1} - \ldots - \alpha_n z_{1,n} \\ \vdots \\ y_r - \alpha_{r+1} z_{r,r+1} - \ldots - \alpha_n z_{r,n} \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix}, \alpha_{r+1}, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R} \right\}$$

(iii) $m > n$, $r = \text{Rang}(A) = n$ $\rightarrow$ jede Spalte Pivotspalte

↳ Mehr Gleichungen als Unbekannte

$$\begin{array}{c} r=n \\ \\ m-n \end{array}\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \hline & & & \\ & \underline{0} & & \\ & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c} y_1 \\ \vdots \\ y_r \\ \hline y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{array}\right]$$

$$r = n$$

Falls $\begin{bmatrix} y_{r+1} \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \neq \underline{0} \Rightarrow \mathcal{L} = \emptyset$ (keine Lösung)

Falls $y_{r+1} = \dots = y_m = 0$

$\Rightarrow$ Eindeutige Lösung $\underline{x} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_r \end{bmatrix}$

(iv) $m < n$, $r = \text{Rang}(A) = m$

↳ mehr Unbekannte als Gleichungen

$\Rightarrow x_1 + z_{1,r+1}\alpha_{r+1} + \dots + z_{1,n}\alpha_n = y_1$

$$m \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & z_{1,r+1} & \cdots & z_{1,n} \\ 0 & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & z_{m,r+1} & \cdots & z_{m,n} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_n \end{array}\right] = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

$$r = m$$

$\Rightarrow x_{r+1}, \dots, x_n$ sind freie Variable

$\Rightarrow n - r$ Parameter $x_{r+1} = \alpha_{r+1}, \dots, x_n = \alpha_n$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} y_1 - \alpha_{r+1} z_{1,r+1} - \dots - \alpha_n z_{1,n} \\ \vdots \\ y_m - \alpha_{r+1} z_{m,r+1} - \dots - \alpha_n z_{m,n} \\ \alpha_{r+1} \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \;\middle|\; \alpha_j \in \mathbb{R},\ j \in \{r+1, \dots, n\} \right\}$$

Allgemeine Zeilenstufenform:

$$\underline{Z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \star & 0 & \star & 0 & \star & \cdots & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \star & 0 & \star & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \star & \cdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots & 0 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \leftarrow \quad r.\ \text{Zeile}$$

$\uparrow i_1 \qquad \uparrow i_2 \qquad \uparrow i_3 \qquad \cdots \qquad \uparrow i_r$

$j_1, \dots, j_{n-r} \mathrel{\hat{=}}$ Nr. der Nichtpivotspalten

Satz I.4.5.B (Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems).
Sei $\mathbf{Z}\mathbf{x} = \mathbf{y}$, $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m,n}$, *die Zeilenstufenform eines linearen Gleichungssystems gemäss* Definition I.4.3.A, $r := \operatorname{Rang}(\mathbf{Z})$ (→ Definition I.4.4.H), $\{i_1, \dots, i_r\} \subset \{1, \dots, n\}$ *die geordnete* ($i_1 < i_2 < \dots < i_r$) *Indexmenge der Pivotspalten,* $\{j_1, \dots, j_{n-r}\} := \{1, \dots, n\} \setminus \{i_1, \dots, i_r\}$ *(leer, wenn* $r = n$*).*

(i) Dann hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung, wenn $y_j \neq 0$ *für ein* $j > r$.

(ii) Andernfalls ist die Lösungsmenge $\mathcal{L}$ *von* $\operatorname{LGS}(\mathbf{Z};\mathbf{y})$ *gegeben durch*

$$\mathcal{L} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \begin{array}{l} (\mathbf{x})_{i_k} = y_k - \sum_{\ell=1}^{n-r} \alpha_\ell \cdot (\mathbf{Z})_{k,j_\ell},\ k \in \{1, \dots, r\}, \\ (\mathbf{x})_{j_\ell} = \alpha_\ell,\ \ell \in \{1, \dots, n-r\} \end{array},\ \alpha_1, \dots, \alpha_{n-r} \in \mathbb{R} \right\}$$

abhängigen Lösungskomponenten

„freien" Lösungskomponenten

Korollar I.4.5.D (Existenz von Lösungen eines linearen Gleichungssystems).
Falls $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = m$ *für* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *dann hat das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *für jeden Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ *mindestens eine Lösung:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n} \quad \textit{und} \quad \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = m \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{L}(\operatorname{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) \neq \emptyset \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m .$$

, da (i) nie eintreten kann! [keine Nullzeile]

Korollar I.4.5.E (Eindeutige Lösbarkeit von quadratischen LGS).
Gilt $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = n$ *für eine quadratische Matrix* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *dann hat das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *für jeden Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *eine eindeutige Lösung:*

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n} \quad \textit{und} \quad \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = n \quad \Longrightarrow \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n:\ \exists_1 \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n:\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} .$$

(i) nicht möglich & keine Nicht-Pivotspalten: Lösung $\underline{x} = \underline{y}$

Satz I.4.5.F (Eindeutigkeit aus Existenz).
Wenn für eine quadratische Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, *das lineare Gleichungssystem* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *für jeden Rechte-Seite-Vektor* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *eine Lösung besitzt, dann ist* $\operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = n$:

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}: \quad \left(\mathcal{L}(\operatorname{LGS}(\mathbf{A};\mathbf{b})) \neq \emptyset \quad \forall \mathbf{b} \in \mathbb{R}^n \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Rang}(\mathbf{A}) = n \right).$$

Wenn $\operatorname{Rang}(A) < n \Rightarrow \exists$ Nullzeile (Zeile n), keine Lösung für $\underline{b}$, das auf $y_n \neq 0$ führt.

[Allgemein: $\operatorname{Rang}(A) <$ Anz. (Zeilen) $\Rightarrow \exists$ Nullzeile]

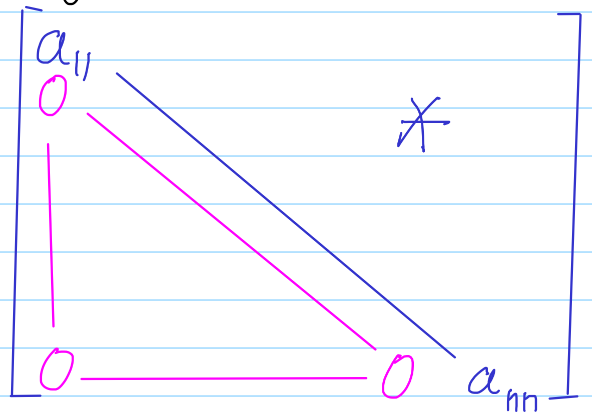
Korollar I.4.5.G (Lineare Gleichungssysteme mit rechter Seite $\mathbf{0}$).
Falls $n > m$, so hat das lineare Gleichungssystem $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ mit Koeffizientenmatrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$ unendlich viele Lösungen.*

* mehr Unbekannte als Gleichungen

$\underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{y} = 0 \Rightarrow$ (i) kann nie eintreten

$r \leq \min(m,n) < n \Rightarrow \exists$ Nicht-Pivotspalte $\rightarrow$ Parameter

Anwendung auf Dreieckssysteme:

$\underline{A}$ 

$\in \mathbb{R}^{n,n}$, $a_{ii} \neq 0$, $i \in \{1, \ldots, n\}$

Bsp. I.4.4.K $\Rightarrow$ Rang$(A) = n$

$\Rightarrow$ [Kor I.4.5.E]

LGS $\underline{A}\underline{x} = \underline{b}$ hat immer eine eindeutig Lösung