1.4.3. Zeilenstufenform

Was ist allgemein eine "einfache Gestalt" der Koeffizientenmatrix eines LGS ?

✎ Notation: j. Einheitsvektor $\in \mathbb{R}^n$, $j \in \{1, \ldots, n\}$:

$$\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n \quad , \quad (\mathbf{e}_j)_k = \begin{cases} 1 & \text{, wenn } k = j \text{ ,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases} \quad , \quad k \in \{1, \ldots, n\} \, .$$

$$\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \, , \quad \mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \, \ldots \, \mathbf{e}_{n-1} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \, , \quad \mathbf{e}_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \, .$$

Definition I.4.3.A (Zeilenstufenform einer Matrix).
Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m,n}$, $\mathbf{A} \neq \mathbf{O}$, *ist in Zeilenstufenform (ZFS), falls es eine Zahl* $r \in \mathbb{N}$, $r \leqslant \min\{n, m\}$, *und Indices*

$$1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leqslant n$$

⇐ paarweise verschiedene Spaltenindices (i_l und i_k verschieden)

so gibt, dass

$$(\mathbf{A})_{:,i_k} = \mathbf{e}_k \quad \textit{und} \quad \begin{cases} j < i_k \Rightarrow (\mathbf{A})_{i,j} = 0 & \text{für alle } i \geqslant k \text{ ,} \\ (\mathbf{A})_{i,j} = 0 & \text{, wenn } i > r \text{ ,} \end{cases} \quad k \in \{1, \ldots, r\} \, .$$

Die Matrixspalten $(\mathbf{A})_{:,i_k}$, $k \in \{1, \ldots, r\}$, *heissen Pivotspalten von* $\mathbf{A}$.

→ Pivotspalten sind Einheitsvektoren

Beispiele für ZSF:

(i) $[m = 4, n = 5]$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotspalten: $i_1 = 1$, $i_2 = 2$, $i_3 = 4$, $r = 3$

(ii) $[m = 3, n = 7]$

Keine Pivotspalte!

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotspalten $i_1 = 2$ $i_2 = 5$ $r = 2$

(iii) $[m = 4, n = 4]$

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$r = 4$

$i_1 = 1$ $i_2 = 2$ $i_3 = 3$ $i_4 = 4$

(iv) $[m = 6,\ n = 3]$

$$\underline{Z} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Pivotspalten $\quad \iota_1 = 1 \qquad \iota_2 = 3 \quad , r = 2$

LGS mit Koeffizientenmatrix in ZSF:

Zu Bsp (i): $\qquad$ Notwendig für $\mathcal{L} \neq \emptyset$

pink $\Leftrightarrow$ Pivotsp.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} x_1 \quad + 2x_3 \quad + x_5 &= b_1 \\ x_2 + 3x_3 \qquad &= b_2 \\ x_4 + 2x_5 &= b_3 \end{aligned}$$

Einfache Isolation von x_1, x_2, x_4

$$\begin{aligned} x_1 &= b_1 - 2x_3 - x_5 \\ x_2 &= b_2 - 3x_3 \\ x_4 &= b_3 - 2x_5 \end{aligned}$$

x_3, x_5 "freie variable" $\rightarrow$ parameter α, β

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} b_1 - 2\alpha - \beta \\ b_2 - 3\alpha \\ \alpha \\ b_3 - 2\beta \\ \beta \end{bmatrix} ,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \right\}$$

Regel: $\quad x_{i_k}$ lassen sich isolieren, $k \in \{1, \dots, r\}$

$x_\ell,\ \ell \in \{1, \dots, n\} \setminus \{\iota_1, \dots, \iota_r\}$ "freie variable"

Bsp. (ii)

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ x_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{aligned} x_2 + 2x_3 + x_4 \quad + 3x_6 &= b_1 \\ x_5 + x_6 &= b_2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha \\ b_1 - 2\beta - \gamma - 3\delta \\ \beta \\ \gamma \\ b_2 - \delta \\ \delta \\ \nu \end{bmatrix} ,\ \alpha, \beta, \gamma, \delta, \nu \in \mathbb{R} \right\}$$