# Beispiel 1.4.1.A (Eliminationsidee für ein 3×3-LGS)

## Phase I: Elimination (durch Isolation & Einsetzen)

$$\begin{aligned} 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$\Downarrow$ Vertausche Zeilen $1 \leftrightarrow 2$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 3 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

( $x_1 = 9/2 - 2x_2 - 5/2\, x_3$ in 2. & 3. Gleichung )

$\Downarrow$ 3. Zeile $\leftarrow$ 3. Zeile $- 1/2 \cdot$ 1. Zeile

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 0x_1 + \boxed{2x_2 + 2x_3} &\boxed{= 1} \\ 0x_1 - \boxed{3x_2 - \tfrac{1}{2} x_3} &\boxed{= -3/2} \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & -3 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

↳ 2×2-LGS in Unbekannten $x_2, x_3$

( $x_2 = 1/2 - x_3$ ; Einsetzen in Gleichung 3 )

$\Downarrow$ 3. Zeile $\leftarrow$ 3. Zeile $+ 3/2 \cdot$ 2. Zeile

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 0x_1 + 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 0x_1 + 0x_2 + \boxed{\tfrac{5}{2} x_3 = 0} \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \boxed{\frac{5}{2}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ Stufenmatrix

## Phase II: Rückeinsetzen

$$x_3 = 0$$

$\Downarrow$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 9 \\ 0x_1 + 2x_2 &= 1 \end{aligned} \quad \longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = 1/2$$

$\Downarrow$

$$2x_1 = 7 \quad \longleftrightarrow \quad [2]\,[x_1] = [7]$$

$$x_1 = \frac{7}{2}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 7/2 \\ 1/2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\} \subset \mathbb{R}^3$$

$\leftarrow$ $\hat{=}$ "wird ersetzt durch"

# Rückeinsetzen aus anderer Perspektive

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 + 5x_3 &= 9 \\ 2x_2 + 2x_3 &= 1 \\ 1\,x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.Z ⇐ 2.Z − 2 · 3.Z
1.Z ⇐ 1.Z − 5 · 3.Z

⇓ Rückeinsetzen von $x_3$

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 9 \\ 2x_2 &= 1 \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2.Z. ⇐ ½ · 2.Z.

⇓ Reskalierung 2. Zeile

$$\begin{aligned} 2x_1 + 4x_2 &= 9 \\ 1\,x_2 &= \tfrac{1}{2} \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

1.Z. ⇐ 1.Z − 4 * 2.Z.

⇓ Rückeinsetzen von $x_2$

$$\begin{aligned} 2x_1 &= 9 - 4 \cdot \tfrac{1}{2} \\ x_2 &= \tfrac{1}{2} \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$

⇓ Reskalieren 1. Zeile

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{7}{2} \\ x_2 &= \tfrac{1}{2} \\ x_3 &= 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{bmatrix}$$