Beispiel 1.4.1.B (Elimination für 3×3-LGS)

Gleichungssystem mit Parameter $c \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 \phantom{{}-x_3} &= 1 \\ -x_2 + x_3 &= c \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{bmatrix}$$

($x_1 = 1 + x_3$; in 2. Gleichung)

$$\Downarrow \quad 2.Z \leftarrow 2.Z + 1 \cdot 1.Z$$

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_2 + x_3 &= c \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ c \end{bmatrix}$$

($x_2 = 2 + x_3$; in 3. Gleichung)

$$\Downarrow \quad 3.Z \leftarrow 3.Z + 1 \cdot 2.Z$$

$$\begin{aligned} x_1 \phantom{{}+x_2} - x_3 &= 1 \\ x_2 - x_3 &= 2 \\ 0 &= 2+c \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \boxed{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2+c \end{bmatrix}$$

Lineare Gleichung mit sämtlichen Koeffizienten $= 0$

Fallunterscheidung ! ($\rightarrow$ Satz I.1.2.D)

① c so, dass $2 + c = 0 \Leftrightarrow c = -2$

3. Zeile: $0 x_3 = 0 \Rightarrow x_3 \in \mathbb{R}$ beliebig

↳ "freie Variable"

→ ersetze x_3 durch Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$, keine Unbekannte mehr

→ auf rechte Seite.

Rückeinsetzen:

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} x_3 &= \alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R} \\ x_2 &= 2 + \alpha \\ x_1 &= 1 + \alpha \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \left\{ \begin{bmatrix} 1+\alpha \\ 2+\alpha \\ \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R} \right\}$$

↳ Lösungsmenge des LGS

② c so, dass $2 + c \neq 0$

d.h. 3. Zeile $\underbrace{0 x_3 = 2 + c}_{\text{nicht erfüllbar für irgendein } x_3}$

$$\Rightarrow \quad \mathcal{L} = \emptyset$$

d.h. das LGS hat keine Lösung

Fall ①: $c = -2$

Rückeinsetzen aus anderer Perspektive

$$\begin{aligned} x_1 \quad & - x_3 = 1 \\ x_2 & - x_3 = 2 \\ & 0 x_3 = 0 \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

x_3 beliebig ! $\Rightarrow$ Ersetze x_3 durch Parameter $\alpha \in \mathbb{R}$

(Parameter ist keine Unbekannte mehr
$\rightarrow$ α auf die rechte Seite!)

$\Downarrow$ Rückeinsetzen von $x_3 = \alpha$

$$\begin{aligned} x_1 \quad & = 1 + \alpha \\ x_2 & = 2 + \alpha \\ [\, x_3 & = \alpha \,] \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+\alpha \\ 2+\alpha \\ 0 \end{bmatrix}$$