1.3. Lineare Gleichungssysteme: Anwendungsbeispiele

→ Mathematische Modellierung mit LGS

1.3.1. Additive Überlagerung: Mischungsprobleme

Gemessene/Beobachtete Grösse = Summe intrinsischer Grössen

Bsp. 1.3.A: Stoffmenge aus Aktivität

Eine Probe enthält $n \in \mathbb{N}$ verschiedene Radionuklide $R_1, \dots, R_n$, deren Stoffmengen aus Messungen der gesamten radioaktiven Aktivität der Probe bestimmt werden soll.

Die Gesamtaktivität $A(t)$ zum Zeitpunkt t (angegeben in Bq) ergibt sich als Summe der momentanen Einzelaktivitäten:

$$A(t) = \sum_{j=1}^{n} A_j(t) \qquad \text{[Additive Überlagerung]}$$

Die Einzelaktivitäten gehorchen dem radioaktivem Zerfallsgesetz:

$$A_j(t) = \underbrace{A_j(0)}_{\text{gesuchte Grössen}} e^{-\lambda_j t} \qquad (*)$$

mit bekannten Zerfallskonstanten $\lambda_j, j = 1, \dots, n$, $[\lambda_j] = s^{-1}$.

Wegen der Trägheit des Messgeräts lässt sich die Aktivität nur im Sekundenabstand messen: $\Delta t := 1s$

Es werden $m \in \mathbb{N}$ Messungen durchgeführt, beginnend bei $t=0$.

$\Rightarrow$ Bekannt : $A((i-1)\Delta t) =: g_i \;, i=1,..,m$

In $(*)$ $$\underbrace{\sum_{j=1}^{n} \overset{x_j}{A_j(0)}\, \underbrace{e^{-\lambda_j (i-1)\Delta t}}_{=: a_{ij}} = g_i \;, i=1,..,m}_{}$$

LGS für n Unbekannte $A_j(0)$ mit m Gleichungen

Matrixschreibweise :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ e^{-\lambda_1 \Delta t} & e^{-\lambda_2 \Delta t} & \cdots & e^{-\lambda_n \Delta t} \\ \vdots & & & \\ e^{-\lambda_1 (m-1)\Delta t} & e^{-\lambda_2 (m-1)\Delta t} & \cdots & e^{-\lambda_n (m-1)\Delta t} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_1(0) \\ \vdots \\ A_n(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_m \end{bmatrix}$$

Bemerkung : Sobald $A_j(0), j=1,..,n$, bekannt

$\Rightarrow$ Stoffmenge $n_j(t)$ (angegeben in mol) aus

$$n_j(t) = A_j(t) / \lambda_j N_A$$

$\hookrightarrow$ Avogadro-Zahl $6.022 \cdot 10^{23}\, mol^{-1}$

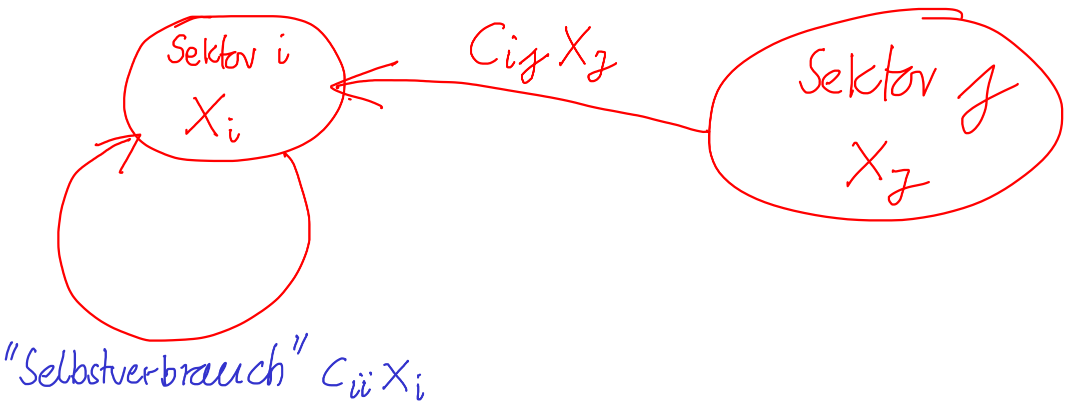
1.3.2. Input-Output-Modelle aus der Ökonomie ("Leontief-Modell")

Eine Volkswirtschaft besteht aus n Sektoren mit jeweils unbekannter Produktion (Output) $x_1, \ldots, x_n$ (angegeben in CHF, €, \$, etc.)

Bekannt: Verbrauchsanteile $c_{ij} \in [0,1]$, $i,j \in \{1,\ldots,n\}$

$c_{ij} \triangleq$ Anteil der Produktion von Sektor j, der vom Sektor i verbraucht wird.

$$\Rightarrow \qquad \sum_{i=1}^{n} c_{ij} \leq 1$$



Konsummatrix:

$$\underline{C} = \begin{bmatrix} c_{11} & \cdots & c_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & \cdots & c_{nn} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

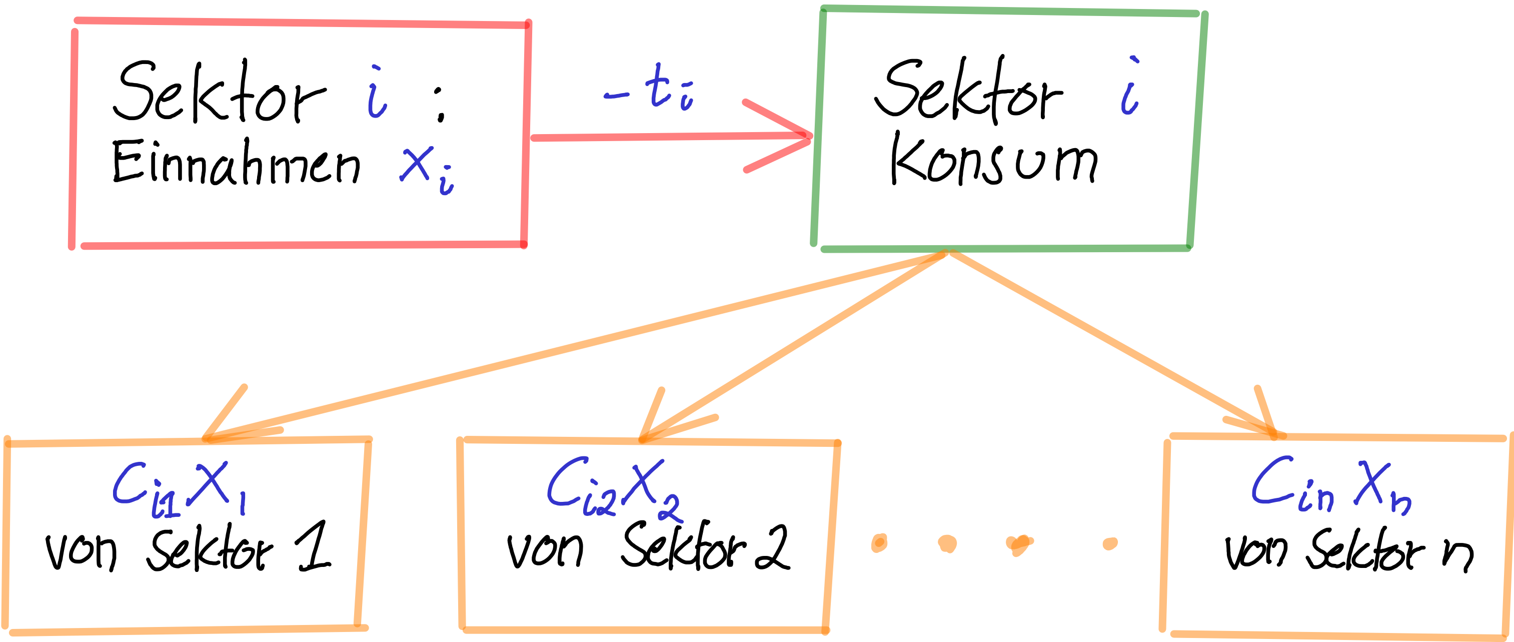
Annahme: Produktion = Einkommen

Gleichgewichtsbedingung (Einnahmen = Ausgaben)

[Additive Überlagerung] $$x_i - t_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j \qquad (*)$$

Ausgaben von Sektor i

"Externe Ausgaben" von Sektor i



$(*)$ $\hat{=}$ LGS in Ubekannten x_j, $j = 1, \dots, n$,
und n Gleichungen

Matrixnotation : $\left[-t_i = \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_j - x_i = (c_{ii}-1)x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} c_{ij} x_j \right]$

$$\begin{bmatrix} c_{11}-1 & c_{12} & c_{13} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22}-1 & c_{23} & \cdots & c_{2n} \\ c_{31} & c_{32} & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \ddots & c_{n-1,n} \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{n,n-1} & c_{nn}-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -t_1 \\ \vdots \\ -t_n \end{bmatrix} \qquad (1.3.C)$$

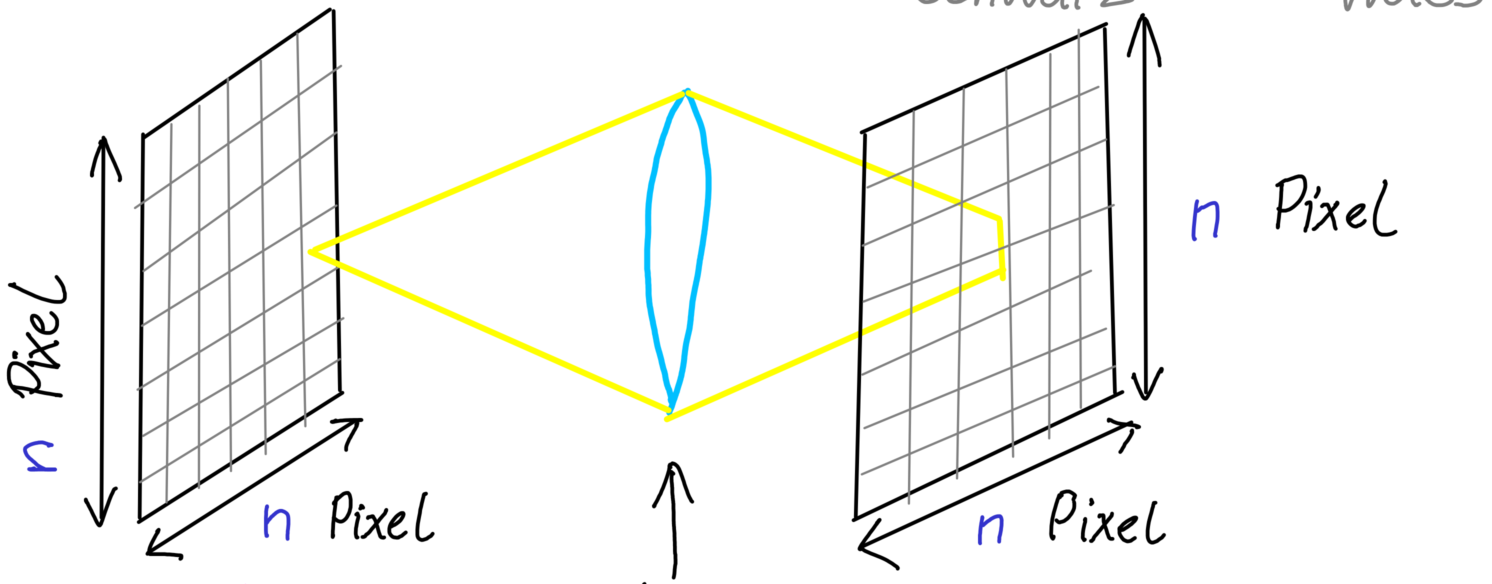
1.3.3. Signalverarbeitung

→ Übersprechen in linearen Übertragungskanälen

Bsp. 1.3.E (Entrauschen eines Graustufenbildes)

∼ $n \times n$ Pixelmatrix von Grauwerten $\in [0,1]$

Schwarz (0) · Weiss (1)



Unbekannte Grauwerte $p_{i,j}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$

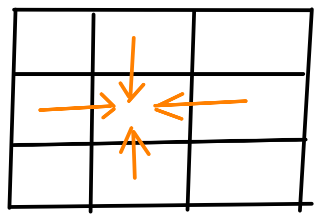
Optischer Übertragungskanal (nicht perfekt)

Empfangene Grauwerte $g_{i,j}$, $i,j \in \{1,\dots,n\}$

Pixelnumerierung:

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}
\hline
p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1n} \\
\hline
p_{21} & & & \vdots \\
\hline
\vdots & \vdots & & \vdots \\
\hline
p_{n1} & & \cdots & p_{nn} \\
\hline
\end{array}$$

Während der Übertragung werden die Grauwerte benachbarter Pixel vermischt:



$$g_{i,j} = r p_{i,j} + s p_{i-1,j} + s p_{i+1,j} + s p_{i,j-1} + s p_{i,j+1}$$

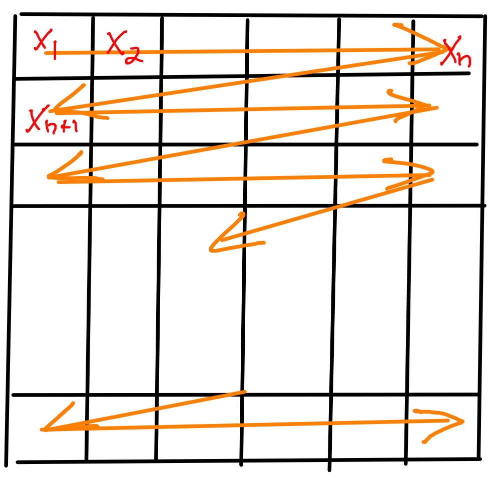
(1.3.F) [n^2 lineare Gleichungen] $i,j \in \{1, \dots, n\}$

mit bekannten Übersprechfaktoren $r \geq 0$, $s \geq 0$, $r + 4s \stackrel{!}{=} 1$

Konvention: In (1.3.F) setzen wir $p_{k,l} := 0$, falls ein Index $\notin \{1, \dots, n\}$

Beachte: (1.3.F) ist eine Menge von linearen Gleichungen in Unbekannten $p_{i,j}$, $p_{i-1,j}$, $p_{i+1,j}$, $p_{i,j-1}$, $p_{i,j+1}$, aber (noch) kein lineares Gleichungssystem!

Um ein solches zu erhalten müssen wir die Unbekannten und Gleichungen numerieren!



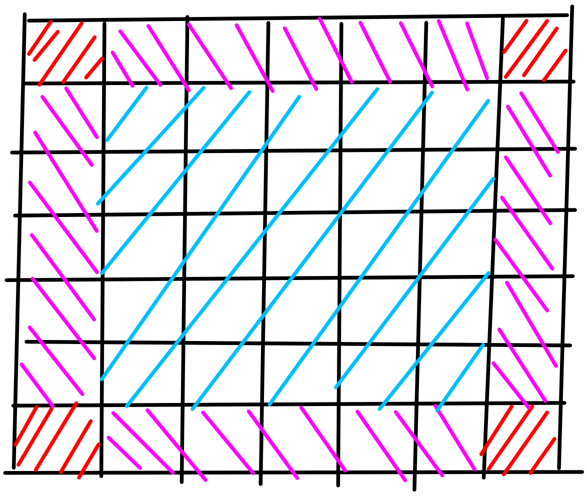
- Pixel $p_{i,j} \rightsquigarrow x_{(i-1)n+j}$
- Gleichung für $g_{i,j} \rightsquigarrow b_{(i-1)n+j}$

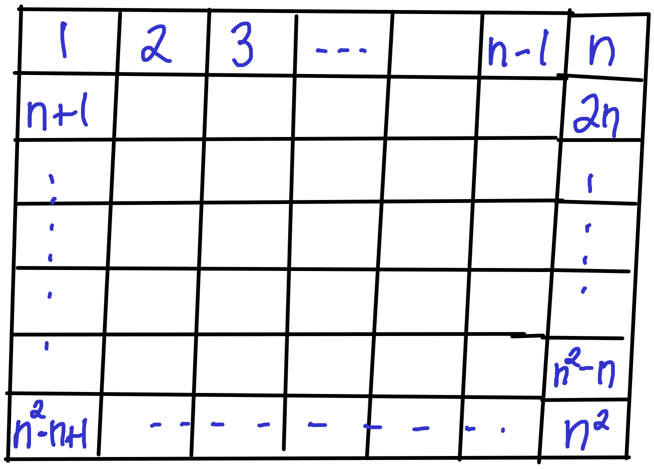
$\rightsquigarrow$ Zeile $(i-1)n+j$ des LGS

▷ Numerierte lineare Gleichungen in den Unbekannten x_j, $j = 1, \dots, n^2$:

Gleichung $j \in \{1, \dots, n^2\}$:

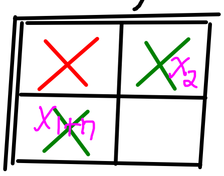
Fallunterscheidung (Sonderbehandlung von Pixeln am Rand)





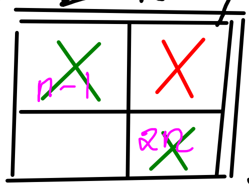
(i) $j = 1$ (Pixel in der linken oberen Ecke)

$$r x_1 + s x_2 + s x_{1+n} = b_1$$



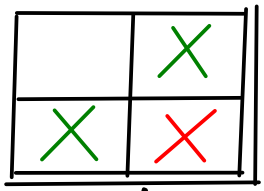
(ii) $j = n$ (Pixel in der rechten oberen Ecke)

$$r x_n + s x_{n-1} + s x_{2n} = b_n$$



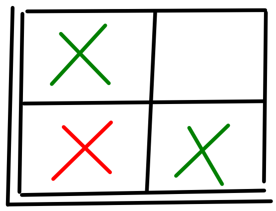
(iii) $j = n^2$ (Pixel in der rechten unteren Ecke)

$$r x_{n^2} + s x_{n^2-1} + s x_{n^2-n} = b_{n^2}$$



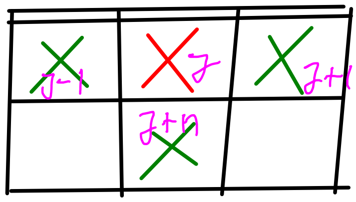
(iv) $j = n(n-1)+1$ (Pixel in der linken unteren Ecke)

$$r x_j + s x_{j+1} + s x_{j-n} = b_j$$



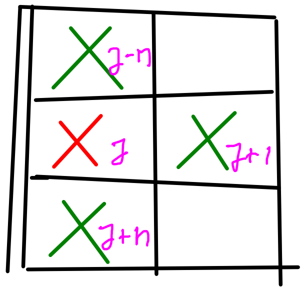
(v) $2 \leq j \leq n-1$ (Pixelreihe am oberen Rand)

$$r x_j + s x_{j-1} + s x_{j+1} + s x_{j+n} = b_j$$



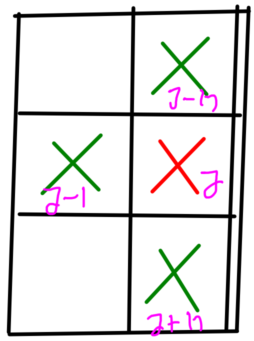
(vi) $j-1$ teilbar durch n (Pixelreihe am linken Rand)
$n \leq j \leq n(n-1)$

$$r x_j + s x_{j-n} + s x_{j+1} + s x_{j+n} = b_j$$



(vii) j teilbar durch n, $n < j < n^2$
(Pixel am rechten Rand)

$$r x_j + s x_{j-n} + s x_{j-1} + s x_{j+n} = b_j$$

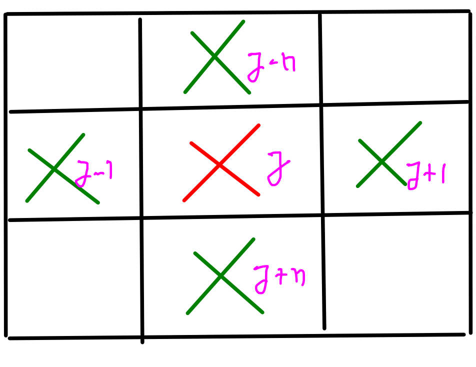


(viii) $n(n-1)+1 < j < n^2$ (Pixel am unteren Rand)

$$r x_j + s x_{j-1} + s x_{j-n} + s x_{j+1} = b_j$$

(ix) $j, j-1$ nicht teilbar durch n, $n+1 < j < n^2-n$
(innere Pixel)

$$r x_j + s x_{j-n} + s x_{j-1} + s x_{j+1} + s x_{j+n} = b_j$$



▷ Matrixnotation : $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$

mit $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n^2, n^2}$, $b \in \mathbb{R}^{n^2}$,

$$(\underline{A})_{i,j} = \begin{cases} r & \text{, falls } i = j \\ s & \text{, falls } \begin{cases} |i-j| = 1 & , \; i, i-1 \text{ nicht teilbar durch } n \\ & \quad\; j, j-1 \qquad\qquad \text{"} \\ |i-j| = n & , \; n < i \text{ und } j \le n^2 - n \\ & \quad \text{oder} \\ & \quad i > n \text{ und } j > n \end{cases} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

Bsp ($n = 3$)

1	2	3
4	5	6
7	8	9

$$\begin{array}{r} \text{Fall} \downarrow \\ (i) \\ (v) \\ (ii) \\ (vi) \\ (ix) \\ j=6 \rightarrow \; (vii) \\ (iv) \\ (viii) \\ (iii) \end{array} \begin{bmatrix} r & s & 0 & s & & & & & \\ s & r & s & & s & & & & \\ 0 & s & r & & & s & & & \\ s & & & r & s & & s & & \\ & s & & s & r & s & & s & \\ & & s & & s & r & & & s \\ & & & s & & & r & s & \\ & & & & s & & s & r & s \\ & & & & & s & & s & r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \\ \\ \\ \vdots \\ \\ x_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 = g_{11} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ b_9 = g_{33} \end{bmatrix}$$

$n = 3$, $j = 6$ (Pixel am rechten Rand, (vii)) :

$$r x_6 + s x_3 + s x_5 + s x_9 = b_6$$

1.3.4. Flussnetzwerke

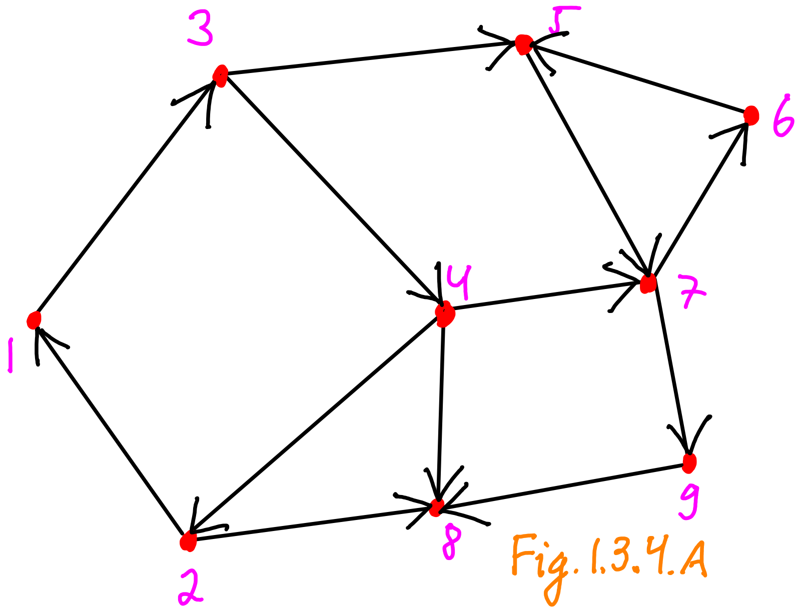


Fig. 1.3.4.A

[Graph]

$\longrightarrow$ ≙ Kante
Leitung
(gerichtet!)

• ≙ Knoten
(numeriert von 1 bis $n \in \mathbb{N}$)

$q_{ej} \in \mathbb{R}$ ≙ Fluss in Leitung $\ell \to j$ $\left(\frac{\text{Einheit}}{s}\right)$

($q_{ej} > 0$ ≙ Fluss in Richtung der Leitung, sonst gegen die Richtung der Leitung)

Erhaltungsgesetz ("Knotenregel"):

An jedem Knoten: Zufluss = Abfluss

$$g_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{wenn Kante } j \xrightarrow{\text{(nach)}} i \text{ vorhanden} \\ -1, & \text{wenn Kante } i \to j \text{ vorhanden} \\ 0, & \text{wenn keine Kante zwischen Knoten } i \text{ und } j \text{ oder } i = j \end{cases}$$

$i, j \in \{1, \dots, n\}$

$\hookrightarrow$ Einträge der Kantenmatrix $\underline{G} \in \mathbb{R}^{n,n}$ des Netzwerks:

$$(\underline{G})_{i,j} := g_{i,j} \qquad i, j \in \{1, \dots, n\}$$

Für Netzwerk aus Fig 1.3.4.A:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{9,9}$$

Lineare Gleichung aus Gleichgewichtsbedingung:

Knoten i: $$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \underbrace{g_{i,j}}_{\text{Koeffizienten}} \underbrace{q_{ji}}_{\text{unbekannte Flüsse}} = 0 \quad (1.3.4.B)}$$

Beachte: $$\underbrace{g_{i,j} = 0 \iff q_{ij} \text{ undefiniert}}_{(1.3.4.B) \text{ macht Sinn}}$$

(1.3.4.B) $\rightarrow$ LGS mit n Gleichungen und m Unbekannten, $m \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl Kanten, wenn wir die <u>Kanten numerieren</u>

$\downarrow$

beliebig

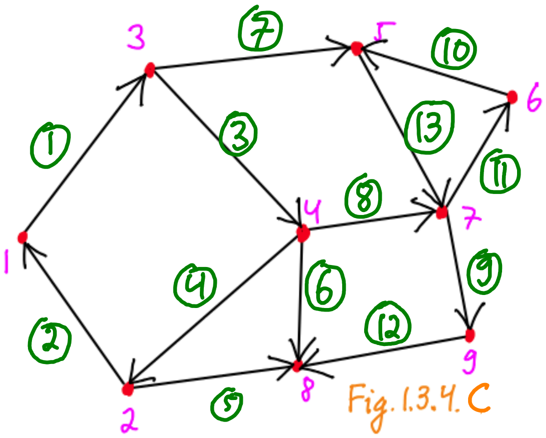


Fig. 1.3.4.C

$\leftarrow$ 13 Kanten numeriert von 1 bis 13

▷ Numerierung der unbekannten Flüsse :

$q_{lk} \sim x_j$, wenn Kante $l \to k$ die Nummer j trägt , $j \in \{1, .., m\}$

(1.3.4.B) ▷ Lineare Gleichungen in Unbekannten x_j

Für Netzwerk aus Fig 1.3.4.C :

Knoten 1 : $-x_1 + x_2 = 0$

Knoten 2 : $-x_2 + x_4 - x_5 = 0$

Knoten 3 : $x_1 - x_3 - x_7 = 0$

$\vdots$

Knoten 9 : $x_9 - x_{12} = 0$

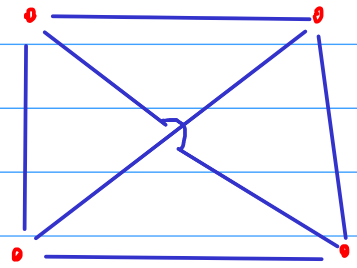
▷ Koeffizientenmatrix des LGS $\in \mathbb{R}^{9,13}$:

$$\begin{bmatrix}
-1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{bmatrix}$$

$\hat{=}$ Inzidenzmatrix des Netzwerks :

Zeilen $\leftrightarrow$ Knoten , Spalten $\leftrightarrow$ Kanten

Vollständiges Netzwerk $(n = 4)$



Konkret: Hydraulische Netzwerke

$\hat{=}$ Flussnetzwerk mit Kanten $\longleftrightarrow$ Rohre
Flüsse $\longleftrightarrow$ Volumenstrom Fluid
(Einheit: $[q_{\ell k}] = \frac{m^3}{s}$)

Neu: Druck p_i in Knoten i ($[p_i] = \frac{N}{m^2}$)

Durchflussgesetz: $q_{\ell k} = \frac{1}{R_{\ell k}}(p_\ell - p_k)$ (1.3.4.D)

Volumenstrom im Rohr zwischen Knoten $\ell \to k$ $\sim$ Druckabfall zwischen Knoten ℓ und k

Proportionalitätskonstante $R_{\ell k}$ $\hat{=}$ hydraulischer Widerstand ($[R_{\ell k}] = Ns/m^5$)

$\hookrightarrow$ bekannt aus Messung/Formel

[Beachte: Vorzeichen des Volumenstroms hängt von der Richtung des Rohres ab!]

Massenerhaltung
$\downarrow$

Idee: $\underbrace{\underset{(1.3.4.D)}{\text{Durchflussgesetz}} + \underset{(1.3.4.B)}{\text{Erhaltungsgesetz}}}$

$\Downarrow$

1 lineare Gleichung pro Knoten, Unbekannte = Knotendrücke

Beispiel: Knoten 1 verbunden mit Knoten 2, 3, 4, 5
→ siehe Fig. 1.3.4.F

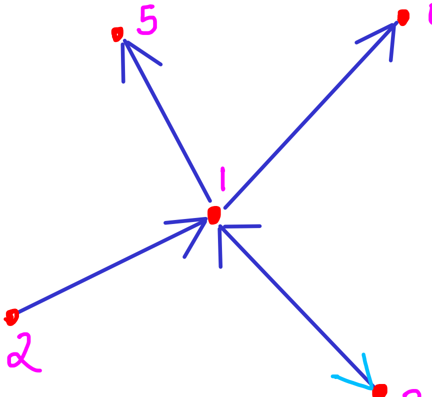


Fig. 1.3.4.F

① Erhaltungsgesetz

$$q_{21} \mp q_{31} - q_{14} - q_{15} = 0$$

② Durchflussgesetze

Rohr 2 → 1: $q_{21} = \frac{1}{R_{21}}(p_2 - p_1)$

Rohr 3 → 1: $q_{\substack{31\\13}} = \frac{1}{R_{31}}(p_{3_1} - p_{1_3})$

Rohr 1 → 4: $q_{14} = \frac{1}{R_{14}}(p_1 - p_4)$

Rohr 1 → 5: $q_{15} = \frac{1}{R_{15}}(p_1 - p_5)$

Einsetzen der Durchflussgesetze in das Erhaltungsgesetz

$$\Rightarrow \frac{1}{R_{21}}(p_2 - p_1) + \frac{1}{R_{31}}(p_3 - p_1) - \frac{1}{R_{14}}(p_1 - p_4) - \frac{1}{R_{15}}(p_1 - p_5) = 0$$

$$\Updownarrow$$

$$-\left(\frac{1}{R_{21}} + \frac{1}{R_{31}} + \frac{1}{R_{14}} + \frac{1}{R_{15}}\right)p_1 + \frac{1}{R_{21}}p_2 + \frac{1}{R_{31}}p_3 + \frac{1}{R_{14}}p_4 + \frac{1}{R_{15}}p_5 = 0$$

! Richtung der Rohre irrelevant, wenn $\underbrace{R_{\ell k} = R_{k\ell}}_{\text{Relativitätsprinzip}}$
(Vorzeichen in Erhaltungsgesetz und Durchflutungsgesetz kürzen sich weg!)

Allgemein:

Lineare Gleichung für Knoten i in einem hydraulischen Netzwerk mit n Knoten und Kantenmatrix $\underline{G}$

$$\underbrace{-\left(\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \left|(\underline{G})_{ij}\right| \frac{1}{R_{ij}}\right)}_{\text{Koeffizient}} p_i + \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underbrace{\left|(\underline{G})_{ij}\right| \frac{1}{R_{ij}}}_{\text{Koeffizient}} \cdot p_j = 0$$

Gilt für $i = 1, \dots, n$

$\triangleright$ LGS mit n Unbekannten p_j, $j = 1, \dots, n$, n Gleichungen und rechter Seite $\underline{0}$.

Beispiel:

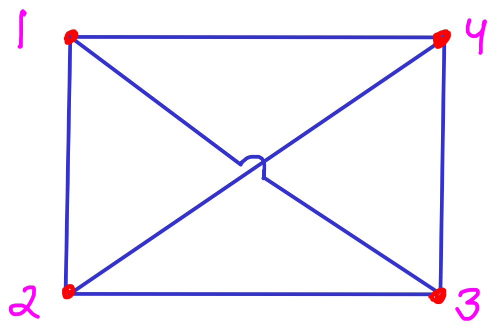


Fig 1.3.4.G

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{bmatrix}
-(R_{14}^{-1}+R_{12}^{-1}+R_{13}^{-1}) & \frac{1}{R_{12}} & \frac{1}{R_{13}} & \frac{1}{R_{14}} \\
\frac{1}{R_{12}} & -(R_{12}^{-1}+R_{23}^{-1}+R_{24}^{-1}) & \frac{1}{R_{23}} & \frac{1}{R_{24}} \\
\frac{1}{R_{13}} & \frac{1}{R_{23}} & -(R_{23}^{-1}+R_{13}^{-1}+R_{34}^{-1}) & \frac{1}{R_{34}} \\
\frac{1}{R_{14}} & \frac{1}{R_{24}} & \frac{1}{R_{34}} & -(R_{14}^{-1}+R_{24}^{-1}+R_{34}^{-1})
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \end{bmatrix} = \underline{0}$$

Beobachtungen:

! $\begin{bmatrix} \beta \\ \beta \\ \beta \\ \beta \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^4$ ist Lösung für jedes $\beta \in \mathbb{R}$

! Nur Druckdifferenzen gehen in das Modell ein

$\rightarrow$ Druck ist eine relative Grösse

$\rightarrow$ Ein beliebiger Knotendruck kann $= 0$ gesetzt werden
(Eichung)

Im Beispiel (Fig. 1.3.4.G): setze $p_4 := 0$

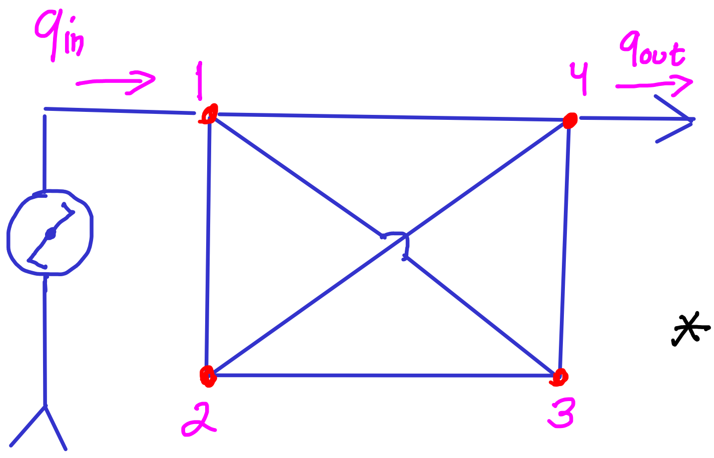
$\Longleftrightarrow$ Unbekannte p_4 entfällt.

$\Longleftrightarrow$ 4. Spalte des LGS entfällt:

$$\begin{bmatrix} -(R_{12}^{-1}+R_{13}^{-1}+R_{14}^{-1}) & R_{12}^{-1} & R_{13}^{-1} \\ R_{12}^{-1} & -(R_{12}^{-1}+R_{23}^{-1}+R_{24}^{-1}) & R_{23}^{-1} \\ R_{13}^{-1} & R_{23}^{-1} & -(R_{13}^{-1}+R_{23}^{-1}+R_{34}^{-1}) \\ R_{14}^{-1} & R_{24}^{-1} & R_{34}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \underline{0} \tag{1.3.4.H}$$

Beobachtung: $\underline{0} \in \mathbb{R}^3$ ist (uninteressante) Lösung

Erweiterung: Hydraulisches Netzwerk mit Zufluss und Abfluss



Abfluss an Knoten 4
↳ ≙ offenes Rohr*

Pumpe
↓
erzeugt einstellbaren Druck $\hat{p}$ an Knoten 1: $p_1 = \hat{p}$
↳ Differenz zum Umgebungsdruck

* Umgebungsdruck am Knoten

⇒ (i) Erweitertes Erhaltungsgesetz an Knoten 1

$$-\frac{1}{R_{12}}(p_1-p_2)-\frac{1}{R_{13}}(p_1-p_3)-\frac{1}{R_{14}}(p_1-p_4) = q_{in} \qquad (1.3.4.H)$$

↑
unbekannter Volumenstrom durch Pumpe

(ii) Erweitertes Erhaltungsgesetz an Knoten 4

$$-\frac{1}{R_{14}}(p_4-p_1)-\frac{1}{R_{24}}(p_4-p_2)-\frac{1}{R_{34}}(p_4-p_3) = -q_{out} \qquad (1.3.4.I)$$

↑
Ausfluss

▷ Zwei zusätzliche Unbekannte q_{in}, q_{out}

(5 Unbekannte: $[p_1], p_2, p_3, q_{in}, q_{out}$; $p_4 = 0$!)

5 Gleichungen:
- [Pumpendruckgleichung : $p_1 = \hat{p}$]
- Erhaltungsgesetze an Knoten 2 & 3
- Erweiterte Erhaltungsgesetze an Knoten 1 & 4

Bemerkung 1.3.4.K : Vorgegebener Pumpenfluss q_{in}

→ 4 Unbekannte : p_1, p_2, p_3, q_{out}

4 (erweiterte) Erhaltungsgesetze an Knoten 1-4

Bemerkung 1.3.4.L : Elektrische Widerstandsnetzwerke

→ Völlig analog zu hydraulischen Netzwerken

Hydraulische Netzwerke	Elektrische Netzwerke
Volumenfluss q in $\frac{m^3}{s}$	Elektrischer Strom I in A
Druck p in $\frac{N}{m^2} = Pa$	Elektrische Spannung U in V
Hydraulischer Widerstand R in $\frac{Ns}{m^5}$	Elektrischer Widerstand R in Ω
Massenerhaltung	Ladungserhaltung