3.9. Kleinste-Quadrate-Lösungen

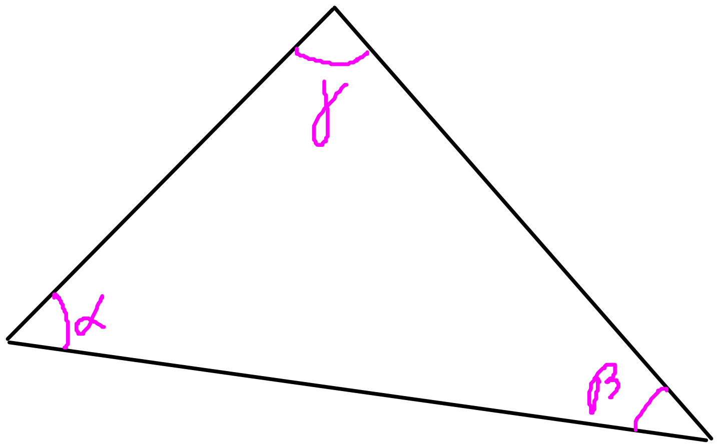
3.9.1. Überbestimmte LGS

$$\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \;, \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m} ,\; \underline{b} \in \mathbb{R}^{n} , \qquad n > m$$

Satz 3.4.A $\Rightarrow$ Für $\underline{b} \neq 0$ wird nur in Ausnahmefällen eine Lösung existieren

Satz 3.9.1.A : Das LGS $\underline{A}\,\underline{x} = \underline{b}$ hat genau dann eine Lösung, wenn $\underline{b} \in \mathrm{Bild}(\underline{A})$

Bsp:



Gemessene Winkel im Dreieck

$\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}, \tilde{\gamma}$

Exakte Winkel erfüllen

$$\alpha + \beta + \gamma = \pi$$

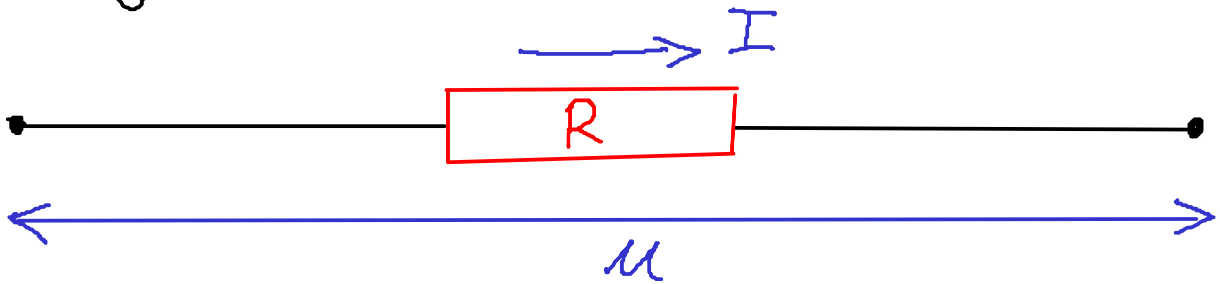
▷ LGS

$$\begin{pmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \\ \pi \end{pmatrix} \qquad [m = 3, n = 4]$$

Ohne Messfehler: Lösung $\begin{pmatrix} \tilde{\alpha} \\ \tilde{\beta} \\ \tilde{\gamma} \end{pmatrix}$

Mit Messfehlern: LGS hat in der Regel keine Lösung

Bsp: Messung eines elektrischen Widerstandes R



Messreihe:

U	u_1	u_2	u_3	...	u_N
I	i_1	i_2	i_3	...	i_N

Ohne Messfehler: $u_\ell = R\, i_\ell \quad , \ell = 1, \dots, N$

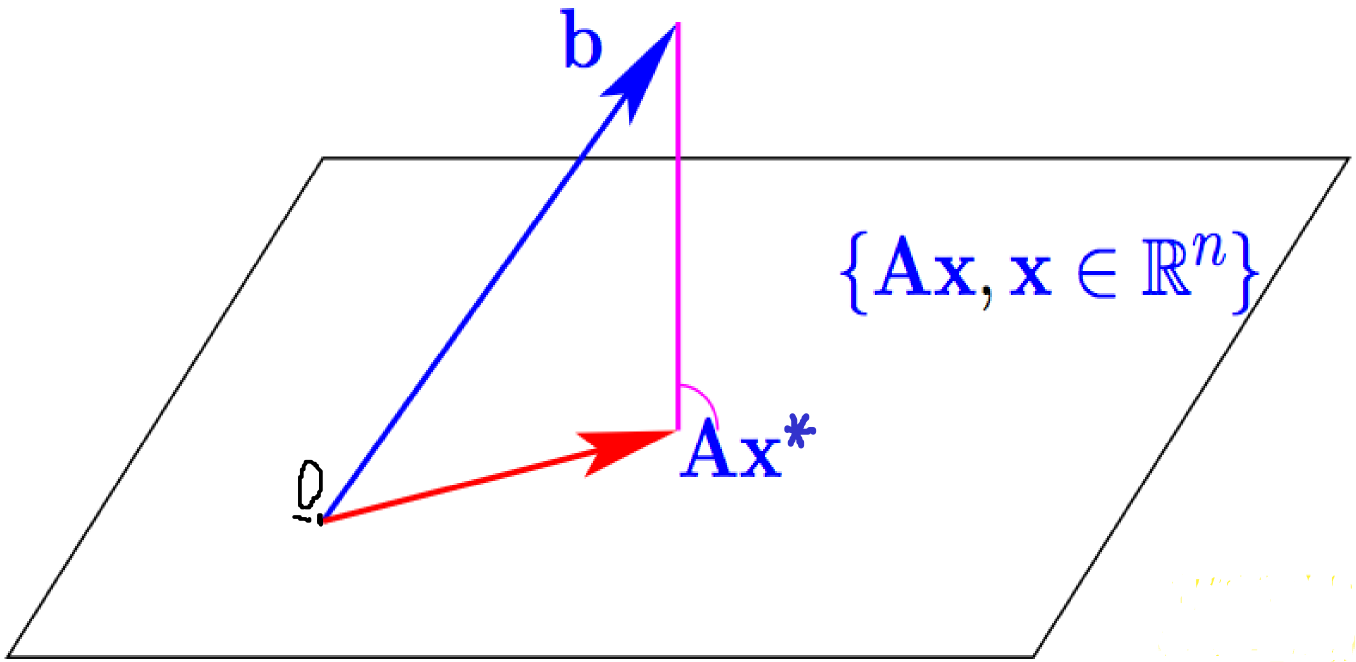
"LGS" $\underbrace{\begin{pmatrix} i_1 \\ \vdots \\ i_N \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\left(R \right)}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}}_{b}$ $\quad [m = 1, n = N]$

$\rightarrow$ unlösbar für gemessene Daten

3.9.2. Orthogonalprojektion

Was tun, wenn $\underline{b} \notin \operatorname{Bild}(\underline{A})$

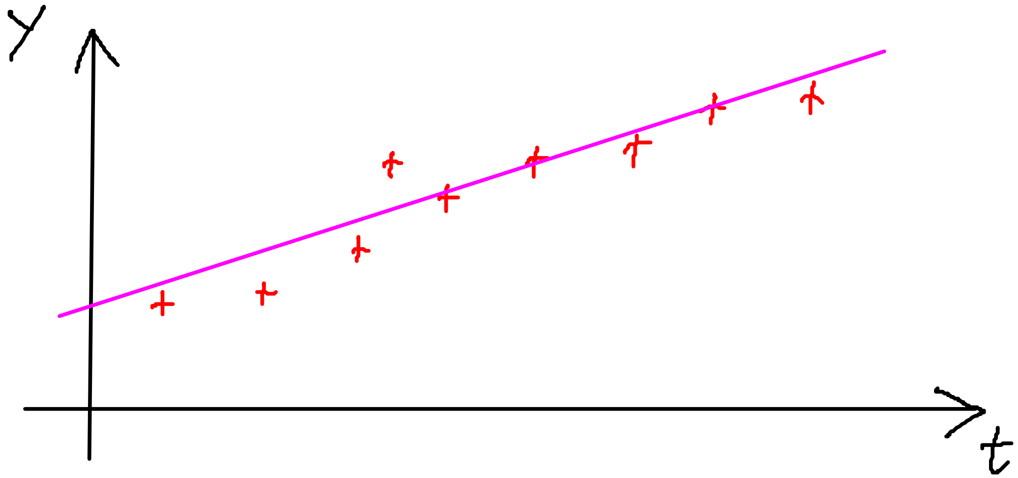
Idee: Finde ein möglichst nahes $\underline{b}^* \in \operatorname{Bild}(A)$ und löse das LGS mit diesem als rechter Seite!



Geometrische Anschauung:

$\underline{b} - \underline{b}^* \perp \operatorname{Bild}(A)$

Anwendungsbeispiel: Lineare Regression



Messwerte:

$$t_i\,,\ y_i\ ,\quad i = 1, \dots, N$$

(mit Messfehlern)

Bekannte Gesetzmässigkeit: $y = \alpha t + \beta \quad , \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

unbekannte Parameter

▷ Überbestimmtes lineares Gleichungssystem

$$\underbrace{\begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \\ t_N & 1 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{pmatrix} y_1 \\ \\ y_N \end{pmatrix}}_{b} \qquad [m = 2,\ n = N]$$

$$\Longleftrightarrow \quad \underline{A}\,\underline{x} = \underline{b} \quad \text{mit} \quad \underline{A} = \begin{pmatrix} t_1 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ t_N & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{N,2}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix}, \quad \underline{x} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$