4.6. Isometrien

$(V,+,\cdot), (W,+,\cdot) \triangleq$ Vektorräume mit Skalarprodukten $\langle\cdot,\cdot\rangle_V, \langle\cdot,\cdot\rangle_W$

4.6.1. Längenerhaltung:

Def. 4.6.1.A. Eine lineare Abbildung $Q \in \mathcal{L}(V,W)$ heisst Isometrie oder längenerhaltend, wenn

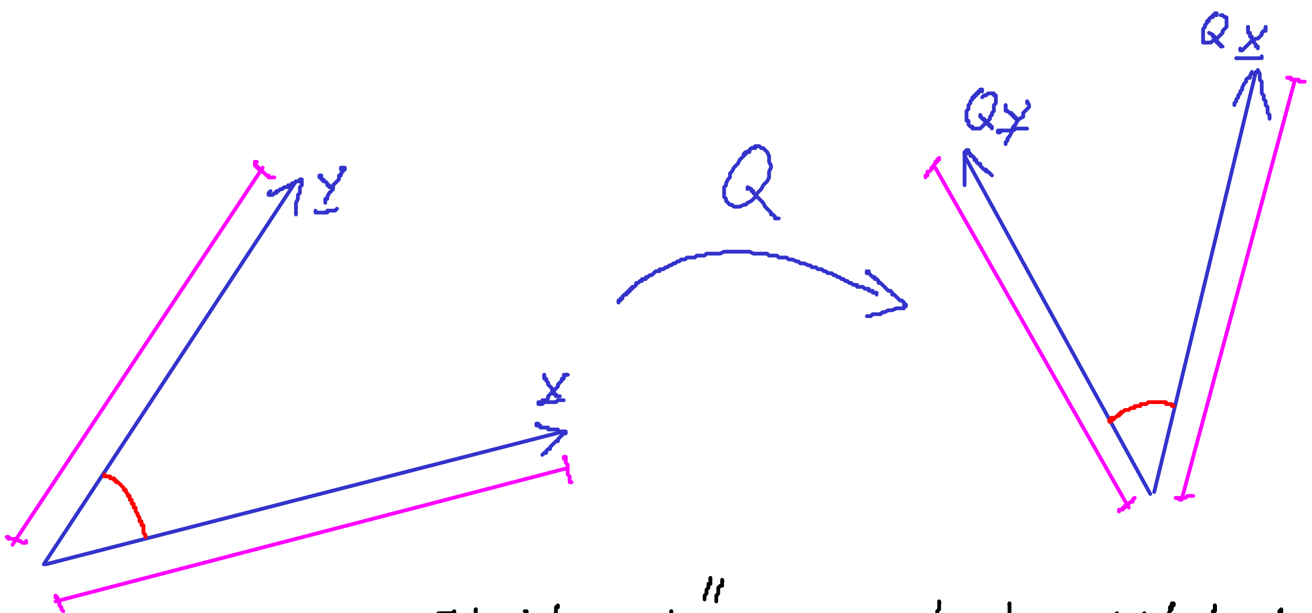
$$\|Q(\mathbf{v})\|_W = \|\mathbf{v}\|_V \quad \text{für alle } \mathbf{v} \in V \,.$$

$\|\cdot\|_V, \|\cdot\|_W \triangleq$ Normen induziert durch Skalarprodukte

Satz 4.6.1.B. Für jede Isometrie $\mathrm{Q} \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt, dass $\mathrm{Kern}(\mathrm{Q}) = \{0\}$.

Satz 4.6.1.C. Lägenerhaltende lineare Abbildungen erhalten das Skalarprodukt, d.h. für jede Isometrie $\mathrm{Q} \in \mathcal{L}(V, W)$ gilt

$$\langle \mathrm{Q}\mathbf{x}, \mathrm{Q}\mathbf{y} \rangle_W = \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_V \quad \text{für alle } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V \ .$$



Gleiche Längen, gleiche Winkel

4.6.2. Orthogonale Matrizen

$W = V = \mathbb{R}^n$, $\langle\cdot,\cdot\rangle \triangleq$ Euklidisches Skalarprodukt

$A \in \mathbb{R}^{n,n}$: $\quad \langle A\underline{x}, \underline{y}\rangle = \langle \underline{x}, A^T\underline{y}\rangle \qquad$ (4.6.2.C)

für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

$\triangleright \quad \underline{x} \to Q\underline{x}$ Isometrie, $Q \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\Updownarrow$ (4.6.1.C)

$\langle Q\underline{x}, Q\underline{y}\rangle = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$ für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

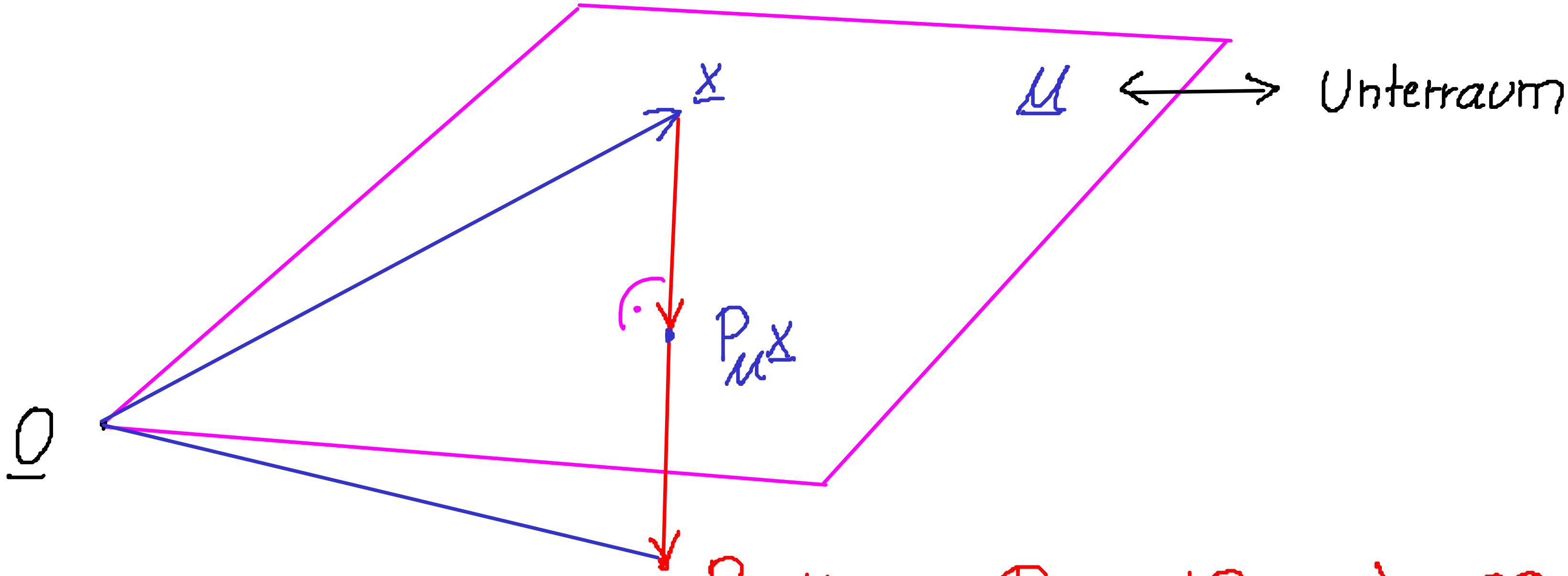
$\Updownarrow$

$\langle Q^TQ\underline{x}, \underline{y}\rangle = \langle \underline{x}, \underline{y}\rangle$ für alle $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$

Satz 4.6.2.B: $\underline{Q}^T\underline{Q} = \underline{I} \iff \underline{x} \to \underline{Q}\,\underline{x}$ Isometrie

▷ Die Spalten einer orthogonalen Matrix haben Norm = 1 und sind paarweise orthogonal

4.6.3. Spiegelungen



$$R_{\mathcal{U}}\underline{x} := P_{\mathcal{U}}\underline{x} + (P_{\mathcal{U}}\underline{x} - \underline{x}) = 2P_{\mathcal{U}}\underline{x} - \underline{x}$$

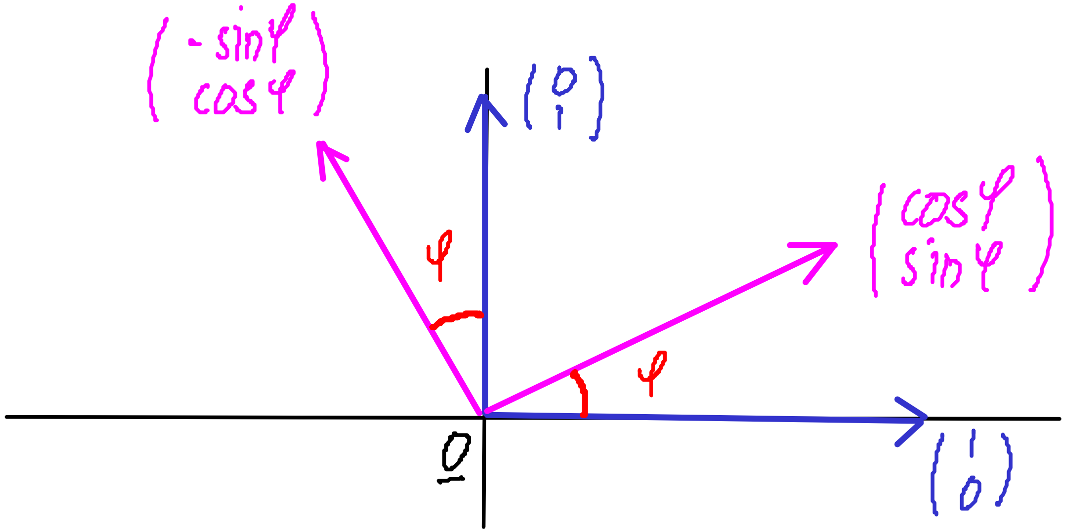
$\hookrightarrow$ Spiegelung an $\mathcal{U}$

$P_{\mathcal{U}} \triangleq$ Orthogonalprojektion auf $\mathcal{U}$

4.6.4. Drehungen

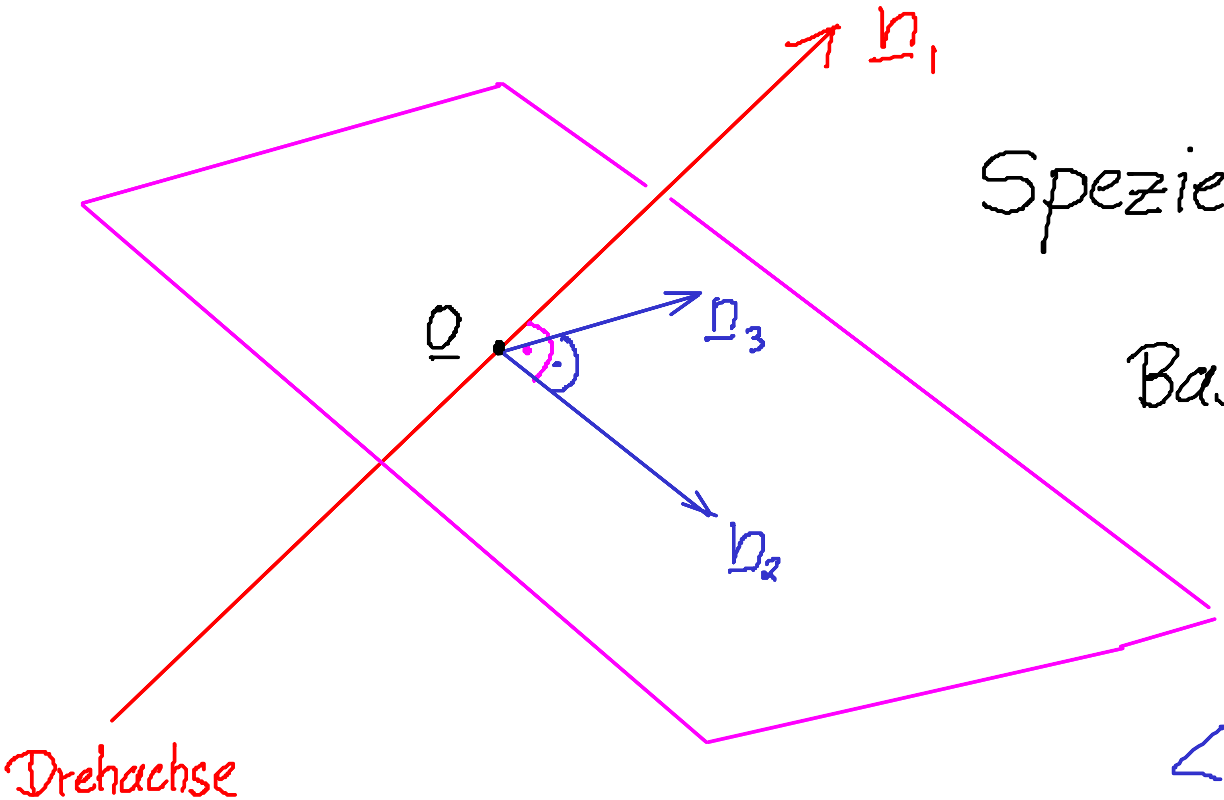
Drehungen in 2D ($\mathbb{R}^2$):

$$\underline{x} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \underline{x}$$



$\hat{=}$ Drehung um Winkel φ um $\underline{0}$

Drehung in 3D ($\mathbb{R}^3$):



Spezielles Koordinatensystem

Basis $\{\underline{n}^1, \underline{n}^2, \underline{n}^3\}$

$$\|\underline{n}^i\| = 1$$

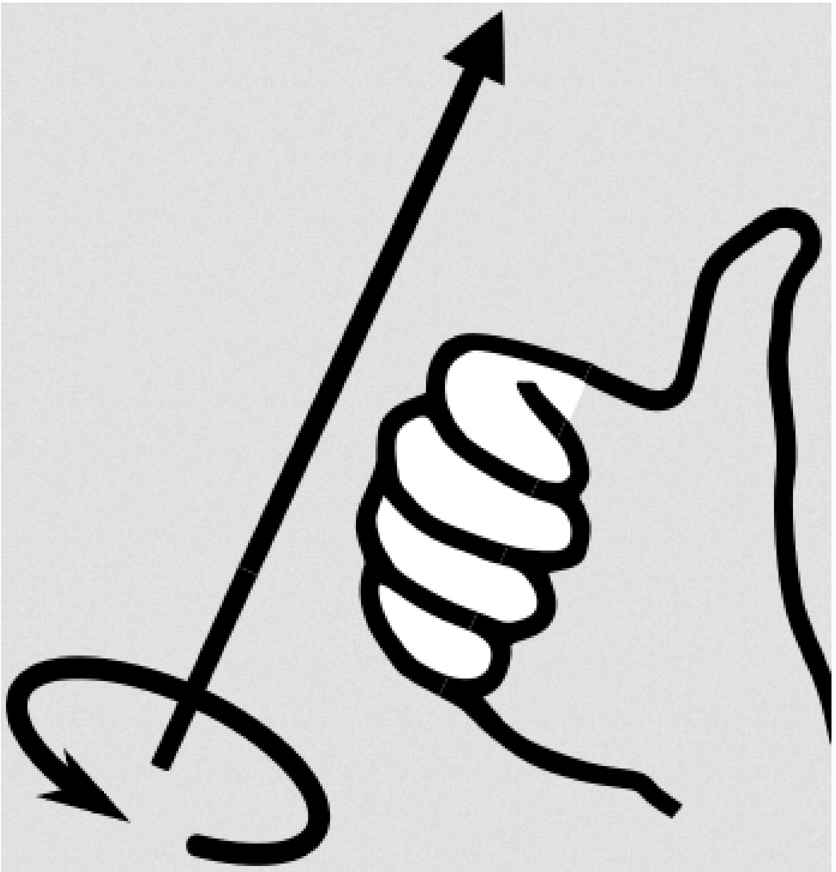
$$\langle \underline{n}^i, \underline{n}^j \rangle = 0 \text{ für } i \neq j$$

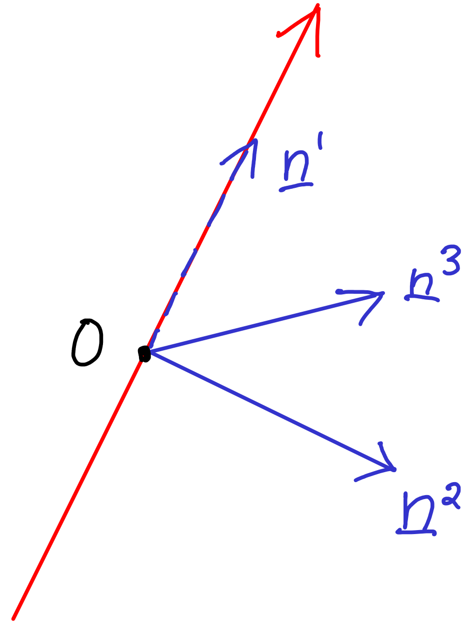
▷ Matrixdarstellung:

$$\underline{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

▷ Drehung in der Ebene $\mathrm{Span}\{\underline{n}^2, \underline{n}^3\}$ um den Winkel φ um Drehachse $\mathrm{Span}\{\underline{n}^1\}$

Konvention : Rechte-Hand-Regel





$\underline{n}^1$ in Richtung von $\underline{n}^2 \times \underline{n}^3$

$\Longleftrightarrow \quad \langle \underline{n}^1, \underline{n}^2 \times \underline{n}^3 \rangle > 0$

4.6.5. Orthormalbasen

$V \mathrel{\hat{=}}$ n-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$

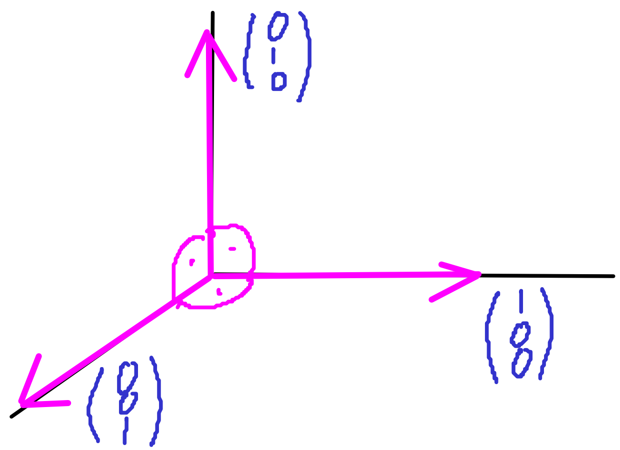
Def. 4.6.5.A. Eine Basis $\{\mathbf{n}^1, \ldots, \mathbf{n}^n\}$ von V heisst Orthonormalbasis*, falls

$$\langle \mathbf{n}^i, \mathbf{n}^j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{, falls } i \neq j \text{ ,} \\ 1 & \text{, falls } i = j \text{ ,} \end{cases} \qquad i, j \in \{1, \ldots, n\} \text{ .}$$

* Abk.: ONB

Bsp.: Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$

$n = 3$:



Satz 4.6.5.B. Ist $\mathcal{B} := \{\mathbf{n}^1, \ldots, \mathbf{n}^n\}$ eine Orthonormalbasis von V, dann ist die Koordinatenabbildung $I_{\mathcal{B}} : V \to \mathbb{R}^n$

$$I_{\mathcal{B}} : \begin{cases} \qquad V & \to \mathbb{R}^n \\ \mathbf{v} = \sum\limits_{j=1}^{n} c_j \mathbf{n}^j & \mapsto \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \end{cases}$$

eine Isometrie (, wenn im $\mathbb{R}^n$ das Euklidische Skalarprodukt verwendet wird).

▷ Bei Verwendung einer Orthonormalbasis, kann man "koordinatenseitig" mit Längen und Winkeln rechnen.

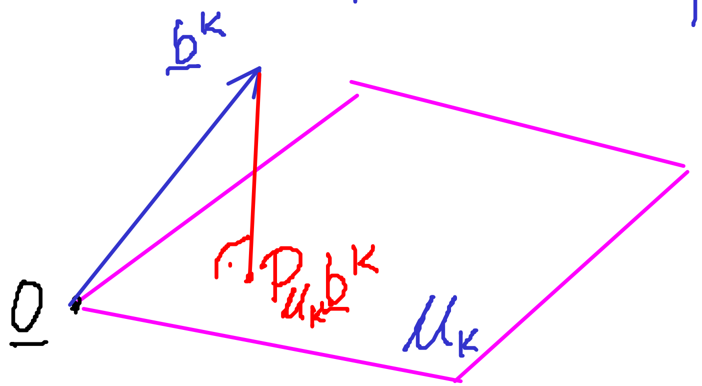
Satz 4.6.5.C: Isometrien erhalten ONB

Satz 4.6.5.D. Zu jeder Basis $\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^n\}$ von V gibt eine Orthonormalbasis $\{q^1, \ldots, q^n\}$ so, dass

$$\mathrm{Span}\{q^1, \ldots q^k\} = \mathrm{Span}\{\mathbf{b}^1, \ldots, \mathbf{b}^k\} \quad \text{für alle} \quad k = 1, \ldots, n\,.$$

Induktive Konstruktion (Gram-Schmidt-Orthogonalisierung)

$$\mathcal{U}_k = \mathrm{Span}\{\underline{b}^1, \ldots, \underline{b}^k\}, \quad k = 1, \ldots, n$$



$$q^{k+1} := \frac{\underline{b}^{k+1} - P_{\mathcal{U}_k}\underline{b}^{k+1}}{\|\underline{b}^{k+1} - P_{\mathcal{U}_k}\underline{b}^{k+1}\|} \qquad (4.6.5.E)$$

$P_{\mathcal{U}_k} \triangleq$ Orthogonalprojektion auf $\mathcal{U}_k$

Satz $\triangleright$ $\underline{b}^k \in \mathrm{Span}\{\underline{q}^1, \ldots, \underline{q}^k\}$

Es gibt $r_{i,k} \in \mathbb{R}$: $\underline{b}^k = \sum_{i=1}^{k} r_{i,k}\, \underline{q}^i$ (4.6.5.F)

Im $\mathbb{R}^n$: *Matrix - Vektor - Perspektive*

$\underline{B} = [\underline{b}^1, \ldots, \underline{b}^n] \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\underline{R} = (r_{i,k})_{i,k=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $\underbrace{\text{wobei } r_{i,k} := 0 \text{ für } i > k}$

$\underline{R}$ ist obere Dreiecksmatrix

$\underline{Q} = \underbrace{[\underline{q}^1, \ldots, \underline{q}^n]}_{\text{orthonormale Spalten}} \in \mathbb{R}^n$ orthogonale *Matrix*

orthonormale Spalten

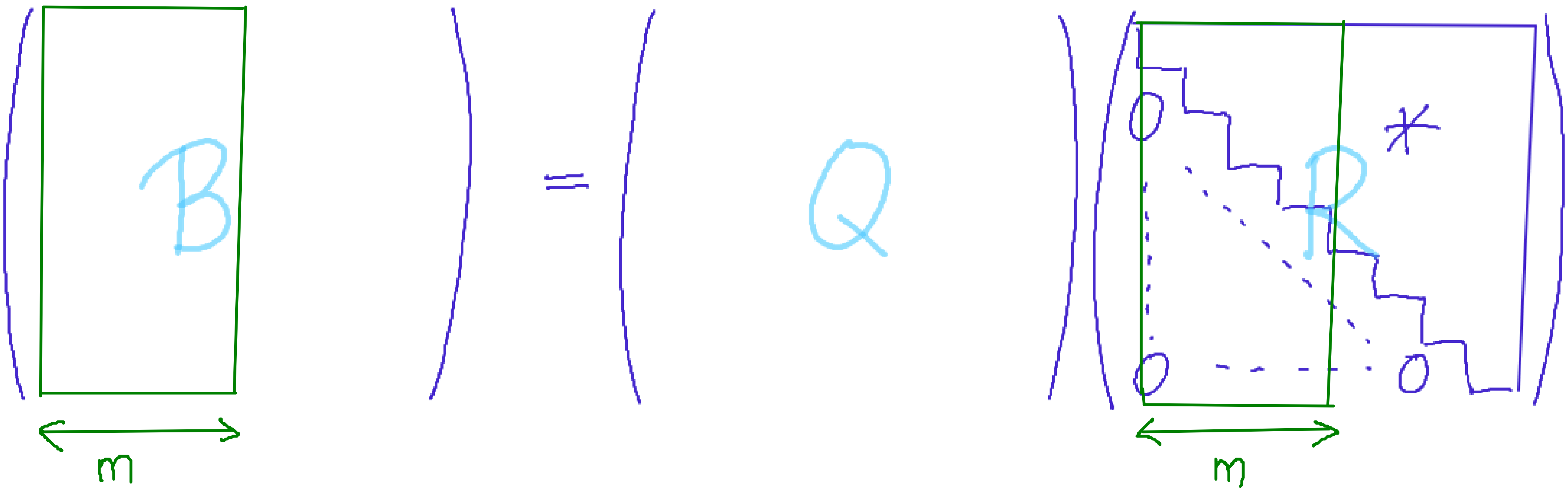
(4.6.5.D) $\Rightarrow$ $$\boxed{\underline{B} = \underline{Q}\,\underline{R}}$$

($\hat{=}$ QR-Zerlegung der Matrix $\underline{B}$)

$$\begin{pmatrix} & & \\ & B & \\ & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} & & \\ & Q & \\ & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & \\ 0 & R^* & \\ & \ddots & \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

MATLAB-Funktion : $$\boxed{[Q,R] = qr(B);}$$

Partielle QR-Zerlegung:



$$\underbrace{[\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^m]}_{\in \mathbb{R}^{n,m}} = Q \cdot \underbrace{[\underline{r}^1, \dots, \underline{r}^m]}_{\in \mathbb{R}^{n,m}}$$

$Q \longrightarrow$ orthogonale Matrix $\in \mathbb{R}^{n,n}$