3.3. Gausselimination

Def. 3.3.C: Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n,m}$, $\underline{A} \neq \underline{0}$ ist in **Zeilenstufenform (ZSF)**, falls es eine Zahl $r \in \mathbb{N}$, $r \leq n$, $r \leq m$ und Indices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_r \leq m$ so gibt, dass $A(:, i_k) = \underline{e}^k$, $k = 1, \ldots, r$, und $a_{ij} = 0$ für alle $i > r$.

r aus Def. 3.3.C: **Rang** von A $\Rightarrow$ $\mathrm{Rang}(A) \leq \min(m,n)$

$\underline{e}^k \in \mathbb{R}^n \triangleq$ k. **Einheitsvektor** im $\mathbb{R}^n$: $\quad \underline{e}^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow$ k. Komponente

Beispiele:

$[n=4, m=5]$ $\quad \underline{\underline{Z}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow & \\ i_1=1 & i_2=2 & & i_3=4 & \end{array} \end{array}, \quad r = 3$

$[n=3, m=7]$ $\quad \underline{\underline{Z}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccccccc} & \uparrow & & & \uparrow & & \\ & i_1=2 & & ! & i_2=5 & & \end{array} \end{array}, \quad r = 2$

[Auch: $i_1=4$, $i_2=5$]

$[m=n=4]$ (Einheitsmatrix) $\quad \underline{\underline{Z}} = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ \begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ i_1=1 & i_2=2 & i_3=3 & i_4=4 \end{array} \end{array}, \quad r = 4$

$[n=6,\ m=3]$:

$$\begin{array}{c} \underline{\underline{Z}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \quad\ \ \uparrow \qquad\ \ \uparrow \\ \quad\ \ i_1 = 1 \quad i_2 = 3 \end{array} \quad , \qquad r = 2$$

Zeilenstufenform, wenn sich durch Spaltenvertauschung die Matrix auf folgende Form bringen lässt

r×r-Einheitsmatrix "links oben"

Nullen in den unteren n-r Zeilen

$$\begin{array}{c|c} \begin{array}{c} r \\ \\ n-r \end{array} & \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ \hline & & \underline{0} & & \underline{0} \end{array}\right) \\ & \quad\longleftarrow r \longrightarrow \quad \longleftarrow m-r \longrightarrow \end{array}$$

beliebige Einträge "rechts oben"

Def. 3.3.A : Zeilenumformungen der Matrix $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,m}$ in MATLAB

(i) $A(i,:) := A(i,:) + \beta * A(\ell,:)$, $\beta \in \mathbb{R}$, $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $i \neq j$

(ii) $A(i,:) := \alpha * A(i,:)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$

(Beachte : $:=$ bedeutet Zuweisung)

(i) $\hat{=}$ Addiere ein Vielfaches einer Matrixzeile zu einer anderen Zeile

(ii) $\hat{=}$ Multipliziere eine Matrixzeile mit einer von 0 verschiedenen Zahl

(Theoretischer) Algorithmus : Gausselimination

```
function A = gaussianelimination(A)
  [n,m] = size(A);                          nicht für zuverlässige numerische
  j = 1; l = 1;                             Berechnungen geeignet!
  while (j<=m)
     i = l; while ((i<=n)&&(A(i,j) == 0 )), i = i+1; end
     if (i<=n)
       A([i,l],:) = A([l,i],:);             -> Zeilenvertauschung
       A(l,:) = A(l,:)/A(l,j);              -> Zeilenumformung (ii)
       for k=[(1:l-1),(l+1:n)]
          A(k,:) = A(k,:) - A(k,j)*A(l,:);  -> Z.U. (i)
       end
       l = l+1;
     end
   j = j+1;
 end
```

Fragen :

- Wie lässt sich eine Zeilenvertauschung durch Zeilenumformungen gemäss Definition 3.3.B realisieren?
- Wie muss man die MATLAB-Funktion

  `gaussianelimination`

  erweitern, so dass auch der Rang der Matrix zurückgegeben wird?