5.1. Matrixdiagonalisierung und Anwendungen

Def. 5.1.A Eine Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, $n \in \mathbb{N}$, heisst diagonalisierbar, wenn sie zu einer Diagonalmatrix ähnlich (→ Def. 4.4.C) ist, das heisst, wenn es eine invertierbare Matrix $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n,n}$ so gibt, dass

$$\mathbf{S}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{S} = \mathbf{D} \quad \text{mit} \quad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots \\ \vdots & & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & & & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad \lambda_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, n.$$

▷ Wenn A die Matrixdarstellung einer linearen Selbstabbildung L eines Vektorraums ist, dann beschreibt S die Transformation auf eine Basis, bzgl. der L durch eine Diagonalmatrix dargestellt wird.

Beachte: Nicht jede Matrix ist diagonalisierbar!

Anwendung : Lineare autonome Differentialgleichungen

$$
\begin{aligned}
y_1'(x) &= a_{11} y_1(x) + a_{12} y_2(x) + \cdots + a_{1n} y_n(x) \\
y_2'(x) &= a_{21} y_1(x) + a_{22} y_2(x) + \cdots + a_{2n} y_n(x) \\
&\vdots \\
y_n'(x) &= a_{n1} y_1(x) + a_{n2} y_2(x) + \cdots + a_{nn} y_n(x)
\end{aligned}
$$

$[\, y_i(x) \hat{=} \text{ Funktionen } \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,]$

$$\Updownarrow$$

$$\underline{y}'(x) := \begin{pmatrix} y_1'(x) \\ \vdots \\ y_n'(x) \end{pmatrix} = \underline{A}\, \underline{y}(x) \quad , \quad \underline{y}(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ \vdots \\ y_n(x) \end{pmatrix} \qquad (5.1.B)$$

$$\underline{A} := (a_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$$

Umformung falls $\underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} = \underline{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$$\underline{y}'(x) = \underline{A}\,\underline{y}(x) \iff \underline{S}^{-1}\underline{y}'(x) = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S}\,(\underline{S}^{-1}\underline{y}(x))$$

$\underline{z}(x) := \underline{S}^{-1}\underline{y}(x)$ erfüllt $\underline{z}'(x) = \underline{D}\,\underline{z}(x)$

$$\iff \begin{aligned} z_1'(x) &= \lambda_1 z_1(x) \\ &\vdots \\ z_n'(x) &= \lambda_n z_n(x) \end{aligned} \implies \begin{aligned} z_1(x) &= \gamma_1 e^{\lambda_1 x} \\ &\vdots \\ z_n(x) &= \gamma_n e^{\lambda_n x} \end{aligned}$$

bekannt aus der Analysis $\qquad \gamma_i \in \mathbb{R}$

▷ Allgemeine Lösung von (5.1.B): $\underline{y}(x) = \underline{S} \begin{pmatrix} \gamma_1 e^{\lambda_1 x} \\ \vdots \\ \gamma_n e^{\lambda_n x} \end{pmatrix}$

mit freien Parametern $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}$.

Beispiel: $\quad f''(x) = f(x) \qquad$ [Dgl. 2. Ordnung]

- Äquivalentes (System) von Dgl. 1. Ordnung:

$$y(x) := \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix} \Rightarrow y'(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} y$$

Details:

(*)

$$y'(x) = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f''(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f'(x) \\ f(x) \end{pmatrix} = \underline{A}\, y(x) = \underline{A} \begin{pmatrix} f(x) \\ f'(x) \end{pmatrix}$$

verwende Dgl. $f'' = f$

Wie findet man $\underline{A} \in \mathbb{R}^{2,2}$?

$$(*) \Rightarrow \quad \underline{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \overset{!}{=} \begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix} \text{ für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \underline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Diagonalisieren ($\rightarrow$ Abschnitt 4.4. & 4.5.)

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}}_{S^{-1}} \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{S} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \operatorname{diag}(1,-1)$$

- Allgemeine Lösung gemäss obiger Formel:

$$y(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}}_{S} \begin{pmatrix} e^{x} & 0 \\ 0 & e^{-x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \end{pmatrix} \qquad \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \quad y_1(x) = \gamma_1 e^{x} + \gamma_2 e^{-x}$$

$$\Rightarrow \quad f(x) \in \operatorname{Span}\{e^{x}, e^{-x}\}$$

Anwendung: Lineare Rekursionen

Rekursiv definierte Folge von Vektoren im $\mathbb{R}^n$:

$$\underline{y}^{(k+1)} := \underline{A}\,\underline{y}^{(k)}, \quad \underline{A} \in \mathbb{R}^{n,n}, \quad \underline{y}^{(0)} \in \mathbb{R}^n \text{ gegeben}$$

$\triangleright$

$$\underline{y}^{(k)} = \underline{A}^{k}\,\underline{y}^{(0)}$$

Matrixpotenz: $\underline{A}^k = \underbrace{\underline{A} \cdot \underline{A} \cdot \ldots \cdot \underline{A}}_{k\text{-mal}}$

"Naive Berechnung" von $\underline{y}^{(k)}$: Rechenaufwand $O(kn^3)$

Effiziente Berechnung für $\underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} = \underline{D} = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

$$A^k = (SDS^{-1})^k =$$
$$= (SDS^{-1})(SDS^{-1}) \cdot \ldots \cdot (SDS^{-1})(SDS^{-1})$$
$$= SD(S^{-1}S)D(S^{-1}S) \cdot \ldots \cdot (S^{-1}S)D(S^{-1}S)DS^{-1}$$
$$= SD \cdot \ldots \cdot DS^{-1}$$
$$= SD^kS^{-1} = S \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) S^{-1}$$

▷ $$y^{(k)} = S \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k) S^{-1} y_0$$

Rechenaufwand : $O(n^2)$ [unabhängig von k]

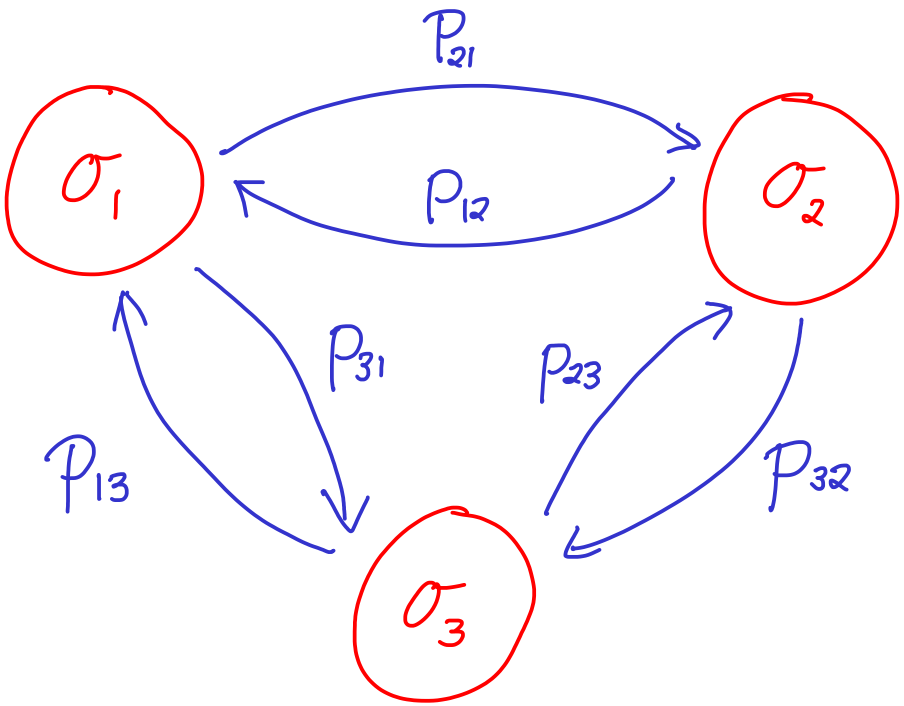
Verallgemeinerung : Matrixpolynome

Spezialfall: Stationäre Markov-ketten

Zeitdiskretes System mit $n \in \mathbb{N}$ Zuständen: $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$

$p_{ij} \in [0,1]$: Übergangswahrscheinlichkeit $\sigma_j \longrightarrow \sigma_i$ (in einem Zeitschritt)

Veranschaulichung:



$y_i^{(k)}$ $\hat{=}$ Wahrscheinlichkeit, dass sich das System
$(i=1,\dots,n)$ nach dem k. Zeitschritt im Zustand σ_i befindet

$\triangleright$ $$y_i^{(k+1)} = p_{i1} y_1^{(k)} + p_{i2} y_2^{(k)} + \dots + p_{in} y_n^{(k)}$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{\underline{y}^{(k+1)} = \underline{P}\,\underline{y}^{(k)}}$$ mit $\underline{P} = (p_{ij})_{i,j=1}^{n} \in \mathbb{R}^{n,n}$

$\underline{P}$ ist stochastische Matrix: $\sum_{i=1}^{n} p_{ij} = 1$

$\Rightarrow$ $(\underline{z} := \underline{P}\,\underline{v})$ $\sum_{i=1}^{n} z_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} v_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} p_{ij}\right) v_j = \sum_{j=1}^{n} v_j$

$\Rightarrow$ Wenn $\sum_i y_i^{(0)} = 1$, dann $\sum_i y_i^{(k)} = 1$ für alle k.