5.2. Determinanten

$(V, +, \cdot) \triangleq$ Vektorraum **$\dim V = n$.**

Def. 5.2.A Eine Determinante ist eine lineare Abbildung

$$\det : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{n \text{ mal}} \to \mathbb{R} ,$$

(d.h. $\det$ nimmt n verschiedene Vektoren als Argumente) für die gilt

1. $\det \neq 0$,
2. für jedes $k \in \{1, \ldots, n\}$ und beliebige Vektoren $\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^n \in V$ ist

   $$\begin{cases} V & \to \mathbb{R} \\ \mathbf{v} & \mapsto \det(\mathbf{w}^1, \ldots, \mathbf{w}^{k-1}, \mathbf{v}, \mathbf{w}^{k+1}, \ldots, \mathbf{w}^n) \end{cases}$$

   eine lineare Abbildung.
3. Gilt für $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in V$, dass $\mathbf{v}^i = \mathbf{v}^j$ für irgendwelche zwei Indices $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$, dann folgt $\det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n) = 0$.

Satz 5.2.B. Eine Determinante auf V erfüllt

$$\det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\mathbf{w}^k+\alpha\mathbf{w}^i,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n)=\det(\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^{k-1},\mathbf{w}^k,\mathbf{w}^{k+1},\dots,\mathbf{w}^n)$$

für beliebige $i, k \in \{1,\dots,n\}$, $i \neq k$, beliebige Vektoren $\mathbf{w}^1,\dots,\mathbf{w}^n \in V$ und alle $\alpha \in \mathbb{R}$.

Beweis: $\det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^{k-1}, \underline{w}^k + \alpha \underline{w}^i, \underline{w}^{k+1}, \dots, \underline{w}^n) =$

$$= \det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^{k-1}, \underline{w}^k, \underline{w}^{k+1}, \dots, \underline{w}^n) +$$

$$\det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^{k-1}, \alpha\underline{w}^i, \underline{w}^{k+1}, \dots, \underline{w}^{i-1}, \underline{w}^i, \underline{w}^{i+1}, \dots, \underline{w}^n)$$

$$= \det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^{k-1}, \underline{w}^k, \underline{w}^{k+1}, \dots, \underline{w}^n) +$$

$$\alpha \underbrace{\det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^{k-1}, \underbrace{\underline{w}^k, \underline{w}^{k+1}, \dots, \underline{w}^{i-1}, \underline{w}^i}_{=}, \underline{w}^{i+1}, \dots, \underline{w}^n)}_{=\,0}$$

gemäss Def 5.2.A: 3.

Satz 5.2.C. Beim Vertauschen zweier Argumente einer Determinante wechselt deren Vorzeichen.

Beweis:

$$\det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^k, \dots, \underline{w}^i, \dots, \underline{w}^n) =$$

$$= \det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^k + \underline{w}^i, \dots, \underline{w}^i, \dots, \underline{w}^n) =$$

Satz 5.2.B

$$= -\det(\underline{w}^1, \dots, \underbrace{\underline{w}^k + \underline{w}^i}, \dots, -\underline{w}^i + \underline{w}^k + \underline{w}^i, \dots, \underline{w}^n) =$$

Satz 5.2.B

$$= -\det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^k + \underline{w}^i, \dots, \underline{w}^k, \dots, \underline{w}^n) =$$

$$= -\det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^k + \underline{w}^i - \underline{w}^k, \dots, \underline{w}^k, \dots, \underline{w}^n) =$$

$\cdot(-1)$

Satz 5.2.B

$$= -\det(\underline{w}^1, \dots, \underline{w}^i, \dots, \underline{w}^k, \dots, \underline{w}^n)$$

□

Satz 5.2.D. Für beliebige Vektoren $\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n \in V$ gilt

$$\{\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n\} \text{ linear unabhängig } \Leftrightarrow \det(\mathbf{v}^1, \ldots, \mathbf{v}^n) \neq 0 .$$

Beweis: Richtung "$\Leftarrow$":

$\{\underline{v}^1, \ldots, \underline{v}^n\}$ linear abhängig

$\Leftrightarrow$ Es gibt ein $l \in \{1, \ldots, n\}$: $\underline{v}_l \in \operatorname{Span}(\{\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n\} \setminus \{\underline{v}_l\})$

(Ohne Beschränkung der Allgemeinheit : $l = 1$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{v}_1 = \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \underline{v}^j$$

$$\Rightarrow \quad \det(\underline{v}_1, \ldots, \underline{v}_n) = \det\left(\sum_{j=2}^{n} \alpha_j \underline{v}^j, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_n\right) =$$

$$= \sum_{j=2}^{n} \alpha_j \underbrace{\det(\underline{v}^j, \underline{v}^2, \ldots, \underline{v}^n)}_{= 0 \text{, wegen Def. 5.2.A: 3.}} = 0$$

Richtung "$\Rightarrow$"

$\{\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^n\}$ Basis von V (also linear unabhängig)

Wähle beliebige $\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^n \in V$

→ Es gibt $a_{ij} \in \mathbb{R} : \underline{v}^i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underline{b}^j$

$$\det(\underline{v}^1, \dots, \underline{v}^n) = \det\Big(\sum_{j_1=1}^{n} a_{1j_1} \underline{b}^{j_1}, \dots, \sum_{j_n=1}^{n} a_{nj_n} \underline{b}^{j_n}\Big)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} \det\big(a_{1j_1} \underline{b}^{j_1}, \dots, a_{nj_n} \underline{b}^{j_n}\big)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n} \det\big(\underline{b}^{j_1}, \dots\dots, \underline{b}^{j_n}\big)$$

$$= \sum_{j_1=1}^{n} \sum_{j_2=1}^{n} \cdots \sum_{j_n=1}^{n} a_{1j_1} \cdot \ldots \cdot a_{nj_n}\, s(j_1, \dots, j_n)\, \underbrace{\det(\underline{b}^1, \dots, \underline{b}^n)}_{\neq 0,\ \text{wg. Def 5.2A: 1.}}$$

mit Faktoren $s(j_1, \dots, j_n) \in \{-1, 0, 1\}$

Satz 5.2.E. Eine Determinante auf V ist eindeutig durch ihre Wirkung auf eine (einzige) Basis von V festgelegt.

Def. 5.2.F Die (Standard-)Determinante auf $\mathbb{R}^n$ ist die Determinanten auf dem Vektorraum $\mathbb{R}^n$, für die

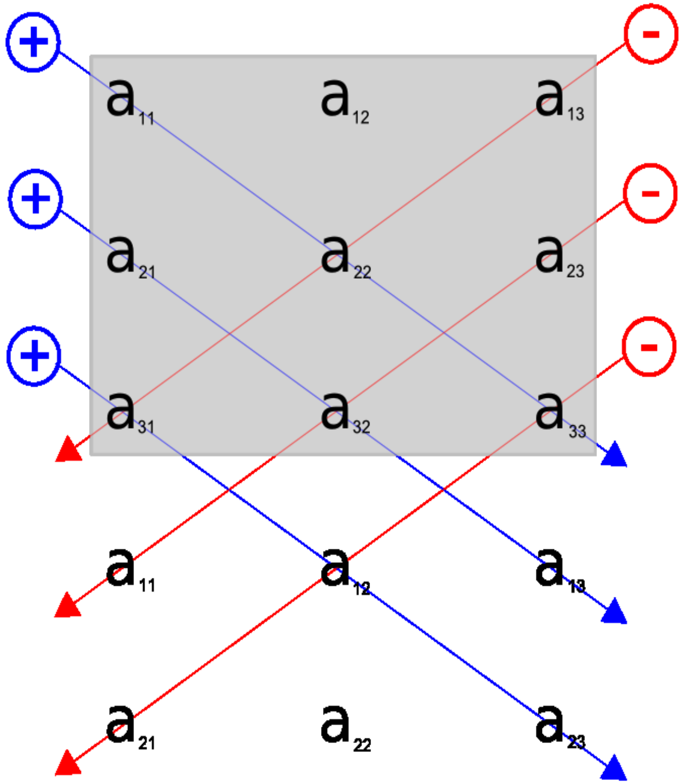
$$\det\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\ \\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\ \\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\ \\ \vdots\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\ \\ \\ \vdots\\1\end{pmatrix}\right) = 1\,.$$

Def. 5.2.G Die Determinante einer Matrix $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$, in Zeichen $\det(\mathbf{A})$, ist die Determinante ihrer Spalten, aufgefasst als Vektoren im $\mathbb{R}^n$.

$n = 2:$

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}$$

$n = 3:$



$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} =$$

$$= a_{11} a_{22} a_{33} + a_{21} a_{32} a_{13} + a_{31} a_{12} a_{23}$$
$$- a_{13} a_{22} a_{31} - a_{23} a_{32} a_{11} - a_{33} a_{12} a_{21} \quad (5.2.H)$$

◁ Regel von Sarrus

Allgemein:

$$\underline{A} = [\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n] \; : \; \underline{a}^j = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \underline{e}^i$$

↳ Einheitsvektoren

$$\begin{aligned}
\det(\underline{A}) &= \det(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n) \\
&= \det\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} \underline{e}^{i_1}, \dots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} \underline{e}^{i_n} \right) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \det(a_{i_1 1} \underline{e}^{i_1}, \dots, a_{i_n n} \underline{e}^{i_n}) \qquad (5.2.X) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \det(\underline{e}^{i_1}, \dots, \underline{e}^{i_n}) \\
&= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_n=1}^{n} \underbrace{a_{i_1 1} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n}}_{\text{Produkt von } n \text{ Matrixeinträgen}} \; s(i_1, \dots, i_n) \; \underbrace{\det(\underline{e}^1, \dots, \underline{e}^n)}_{=1}
\end{aligned}$$

Faktoren $\in \{-1, 0, 1\}$

▷ Determinante von Matrizen in Stufenform:

$$\det \begin{array}{c} \left(\begin{array}{c|c} \underline{B} & * \\ \hline \underline{0} & \underline{C} \end{array}\right) \\ \begin{array}{cc} k & n-k \end{array} \end{array} \begin{array}{l} k \\ n-k \end{array} = \det(\underline{B}) \det(\underline{C}) \qquad (5.2.Y)$$

Kein Einfluss auf die Determinante!

$$\underline{B} \in \mathbb{R}^{k,k}, \ \underline{C} \in \mathbb{R}^{n-k,n-k}$$

Spezialfall:

$$\det \begin{pmatrix} d_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & d_n \end{pmatrix} = d_1 \cdot \ldots \cdot d_n$$

Aus der Formel "abzulesen":

Satz 5.2.H. Für alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt: $\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T)$

Wichtige (theoretische!) Anwendung von Determinanten:

$\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$: $\det([\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n]) = \det(\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n) \neq 0$

[Satz 5.2.D] $\Longleftrightarrow$ $\{\underline{a}^1, \dots, \underline{a}^n\}$ linear unabhängig

$\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Rang}(\underline{A}) = n$

[Satz 3.7.F] $\Longleftrightarrow$ $\mathrm{Kern}(\underline{A}) = \{\underline{0}\}$

[Satz 3.7.G] $\Longleftrightarrow$ $\underline{A}$ invertierbar

Eine der wichtigsten Tatsachen über Determinanten:

Satz 5.2.J. [Determinantenmultiplikationssatz]
Für beliebige Matrizen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n,n}$ gilt

$$\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B}) \ .$$

▷ $\underline{Q} \in \mathbb{R}^{n,n}$ und $\underline{Q}\,\underline{Q}^T = \underline{I} \overset{[5.2.H,\ 5.2.J]}{\Longrightarrow} \det \underline{Q} = \pm 1$ (5.2.K)

▷ $\underline{A} \in \mathbb{R}^{n,n}$ regulär $\Longrightarrow \det(\underline{A}^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\underline{A})}$ (5.2.L)

▷ $\underline{\tilde{A}} = \underline{S}^{-1}\underline{A}\,\underline{S} \Longrightarrow \det(\underline{\tilde{A}}) = \det(\underline{A})$ (5.2.M)

Speziell: $\underline{A} = \underline{S}\,\underline{D}\,\underline{S}^{-1}$, $\underline{D} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

$\Longrightarrow \det(\underline{A}) = \lambda_1 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$ (5.2.N)