5.3 Rechnen im $\mathbb{C}^n$

$\boxed{\text{Rechne wie gewohnt mit Vektoren im } \mathbb{C}^n \text{ und Matrizen aus } \mathbb{C}^{n,m}}$

Alles bleibt beim Alten : Matrix × Vektor
Linearkombinationen , lineare Abhängigkeit
Gausselimination
Basen , Unterräume
Kern und Bild , etc.

▷ Alle Aussagen bleiben richtig bei Ersetzung $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$

(Einzige) Ausnahme : Euklidisches Skalarprodukt im $\mathbb{C}^n$

NEU in $\mathbb{C}^n$:

$\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n$: $\quad \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j \overline{w_j} \qquad (5.3.A)$

komplex konjugiert

$\triangleright \quad \|\underline{v}\|^2 := \langle \underline{v}, \underline{v} \rangle = \sum_{j=1}^{n} |v_j|^2 \geq 0$ für alle $\underline{v} \in \mathbb{C}^n$

Beachte: $\langle \underline{v}, \alpha \underline{w} \rangle = \overline{\alpha} \langle \underline{v}, \underline{w} \rangle$ für $\underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{C}^n, \alpha \in \mathbb{C}$

NEU in $\mathbb{C}^{n,m}$:

Verwende konjugiert transponierte Matrix $\underline{A}^H$ anstelle von Transponierter $\underline{A}^T$

$$\underline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n,m} \Rightarrow \underline{A}^H = \begin{pmatrix} \bar{a}_{11} & \cdots & \bar{a}_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ \bar{a}_{1m} & \cdots & \bar{a}_{mn} \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{m,n}$$

Warum ?

$$\langle \underline{A}\underline{v}, \underline{w} \rangle = \langle \underline{v}, A^H \underline{w} \rangle \quad \text{für alle } \underline{v} \in \mathbb{C}^m, \underline{w} \in \mathbb{C}^n \qquad (5.3.B)$$