

Theoretische Grundlagen von AMG, Teil 2

K. Stüben

Appendix A von U. TROTTENBERG, C. OOSTERLEE, AND A. SCHÜLLER,
Multigrid, Academic Press, London, 2000.

www.gmd.de/publications/report/0070/

- Die Zweigitteriteration und deren Variationsprinzip

- Die Zweigitteriteration und deren Variationsprinzip
- Nachglättung

- Die Zweigitteriteration und deren Variationsprinzip
- Nachglättung
- Vorglättung

- Die Zweigitteriteration und deren Variationsprinzip
- Nachglättung
- Vorglättung
- Grenzen der Theorie und offene Probleme

Die Idee hinter AMG

- Sei A_h eine spd $n \times n$ M-Matrix, $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$ eine Indexmenge und $A_h u_h^* = f_h$. **Ziel ist die Approximation von u_h^* .**

Die Idee hinter AMG

- Sei A_h eine spd $n \times n$ M-Matrix, $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$ eine Indexmenge und $A_h u_h^* = f_h$. **Ziel ist die Approximation von u_h^* .**
- Fixierter Glättungsprozess und Anpassung der Grobgitterkorrektur bei AMG. Umgekehrt bei geometrischen Mehrgitterverfahren.

Die Idee hinter AMG

- Sei A_h eine spd $n \times n$ M-Matrix, $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$ eine Indexmenge und $A_h u_h^* = f_h$. **Ziel ist die Approximation von u_h^* .**
- Fixierter Glättungsprozess und Anpassung der Grobgitterkorrektur bei AMG. Umgekehrt bei geometrischen Mehrgitterverfahren.
- $\Omega^h = F^h \cup C^h$ eine disjunkte Zerlegung in grobe und feine Indizes. **Effiziente Konstruktion dieser Zerlegung?**

Die Idee hinter AMG

- Sei A_h eine spd $n \times n$ M-Matrix, $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$ eine Indexmenge und $A_h u_h^* = f_h$. **Ziel ist die Approximation von u_h^* .**
- Fixierter Glättungsprozess und Anpassung der Grobgitterkorrektur bei AMG. Umgekehrt bei geometrischen Mehrgitterverfahren.
- $\Omega^h = F^h \cup C^h$ eine disjunkte Zerlegung in grobe und feine Indizes. **Effiziente Konstruktion dieser Zerlegung?**
- $A_H = (I_H^h)^T A_h I_H^h$ ist der spd **Galerkinoperator**, wobei I_H^h der **Interpolationsoperator** ist.

Die Idee hinter AMG

- Sei A_h eine spd $n \times n$ M-Matrix, $\Omega^h = \{1, 2, \dots, n\}$ eine Indexmenge und $A_h u_h^* = f_h$. **Ziel ist die Approximation von u_h^* .**
- Fixierter Glättungsprozess und Anpassung der Grobgitterkorrektur bei AMG. Umgekehrt bei geometrischen Mehrgitterverfahren.
- $\Omega^h = F^h \cup C^h$ eine disjunkte Zerlegung in grobe und feine Indizes. **Effiziente Konstruktion dieser Zerlegung?**
- $A_H = (I_H^h)^T A_h I_H^h$ ist der spd **Galerkinoperator**, wobei I_H^h der **Interpolationsoperator** ist.
- Damit $\bar{u}^h = u^h + I_H^h e^H$, wobei $A_H e^H = (I_H^h)^T (f_h - A_h u^h)$.

Der Interpolationsoperator

- Alle Interpolationen $e^h = I_H^h e^H$ sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls } i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls } i \in F^h \end{cases}$$

wobei $P_i^h \subset C^h$ die Menge der Interpolationsvariablen ist.

Der Interpolationsoperator

- Alle Interpolationen $e^h = I_H^h e^H$ sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls } i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls } i \in F^h \end{cases}$$

wobei $P_i^h \subset C^h$ die Menge der Interpolationsvariablen ist.

- Falls $P_i^h \subset C^h \cap N_i$ also nur Nachbarn verwendet werden, spricht man von **direkter Interpolation**.

Der Interpolationsoperator

- Alle Interpolationen $e^h = I_H^h e^H$ sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls } i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls } i \in F^h \end{cases}$$

wobei $P_i^h \subset C^h$ die Menge der Interpolationsvariablen ist.

- Falls $P_i^h \subset C^h \cap N_i$ also nur Nachbarn verwendet werden, spricht man von **direkter Interpolation**.
- Bei AMG vom **Aggregations Typ** gilt, dass P_i^h nur jeweils ein Element hat.

Der Interpolationsoperator

- Alle Interpolationen $e^h = I_H^h e^H$ sind von der Form

$$e_i^h = (I_H^h e^H)_i = \begin{cases} e_i^H & \text{falls } i \in \Omega^H = C^h \\ \sum_{k \in P_i^h} w_{ik}^h e_k^H & \text{falls } i \in F^h \end{cases}$$

wobei $P_i^h \subset C^h$ die Menge der Interpolationsvariablen ist.

- Falls $P_i^h \subset C^h \cap N_i$ also nur Nachbarn verwendet werden, spricht man von **direkter Interpolation**.
- Bei AMG vom **Aggregations Typ** gilt, dass P_i^h nur jeweils ein Element hat.
- **Effiziente Konstruktion von I_H^h ?**

Das Variationsprinzip

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$ als **Grobitter-Korrekturoperator**.

Das Variationsprinzip

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$ als **Grobitter-Korrekturoperator**.

- **Ziel** $\bar{e}^h \approx 0$.

Das Variationsprinzip

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$ als **Grobitter-Korrekturoperator**.

- **Ziel** $\bar{e}^h \approx 0$.
- Präziser mit Variationsprinzip: $\|K_{h,H} e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.

Das Variationsprinzip

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$ als **Grobitter-Korrekturoperator**.

- **Ziel** $\bar{e}^h \approx 0$.

- Präziser mit Variationsprinzip: $\|K_{h,H} e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.

- Kompletter Zweigitter-Iterationsschritt:

$$\bar{e}^h = M_{h,H} e^h \text{ mit } M_{h,H} := S_h K_{h,H} S_h$$

Das Variationsprinzip

- Für den Fehler gilt:

$$\bar{e}^h = K_{h,H} e^h$$

mit $K_{h,H} := I_h - I_H^h A_H^{-1} I_h^H A_h$ als **Grobitter-Korrekturoperator**.

- **Ziel** $\bar{e}^h \approx 0$.

- Präziser mit Variationsprinzip: $\|K_{h,H} e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.

- Kompletter Zweigitter-Iterationsschritt:

$$\bar{e}^h = M_{h,H} e^h \text{ mit } M_{h,H} := S_h K_{h,H} S_h$$

- Hier $\bar{e} = S K e$.

- Hier $\bar{e} = S K e$.
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.

- Hier $\bar{e} = S K e$.
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.
- $K e$ sollte also kein algebraisch glatter Fehler sein. Ein Fehler e ist algebraisch glatt falls $S e \approx e$.

- Hier $\bar{e} = S K e$.
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.
- $K e$ sollte also kein algebraisch glatter Fehler sein. Ein Fehler e ist algebraisch glatt falls $S e \approx e$.
- S erfüllt die Glättungseigenschaft falls

$$\|S e\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2.$$

- Hier $\bar{e} = S K e$.
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.
- Ke sollte also kein algebraisch glatter Fehler sein. Ein Fehler e ist algebraisch glatt falls $Se \approx e$.
- S erfüllt die Glättungseigenschaft falls

$$\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2.$$

Wobei $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$ mit $D := \text{diag}(A)$. Also arbeitet S umso effizienter je grösser $\|e\|_V$ im Verhältnis zu $\|e\|_A$ ist.

- Hier $\bar{e} = S K e$.
- S muss alle Vektoren in $\mathcal{R}(K)$ effizient reduzieren.
- $K e$ sollte also kein algebraisch glatter Fehler sein. Ein Fehler e ist algebraisch glatt falls $S e \approx e$.
- S erfüllt die Glättungseigenschaft falls

$$\|S e\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2.$$

Wobei $\|\cdot\|_{AD^{-1}A} =: \|\cdot\|_V$ mit $D := \text{diag}(A)$. Also arbeitet S umso effizienter je grösser $\|e\|_V$ im Verhältnis zu $\|e\|_A$ ist.

Die Kontraktionseigenschaft von SK

- **Satz:** S erfülle die Glättungeigenschaft. Die C/F -Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von e unabhängigen $\tau > 0$. Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

Die Kontraktionseigenschaft von SK

- **Satz:** S erfülle die Glättungseigenschaft. Die C/F -Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von e unabhängigen $\tau > 0$. Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

Beweis: Aus der Glättungseigenschaft und (\star) folgt

$$\|SKe\|_A^2 \leq \|Ke\|_A^2 - \sigma \|Ke\|_V^2$$

Die Kontraktionseigenschaft von SK

- **Satz:** S erfülle die Glättungseigenschaft. Die C/F -Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von e unabhängigen $\tau > 0$. Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

Beweis: Aus der Glättungseigenschaft und (\star) folgt

$$\|SKe\|_A^2 \leq \|Ke\|_A^2 - \sigma \|Ke\|_V^2 \leq (1 - \sigma/\tau) \|Ke\|_A^2$$

Die Kontraktionseigenschaft von SK

- **Satz:** S erfülle die Glättungseigenschaft. Die C/F -Zerlegung und die Interpolation seien so gewählt, dass

$$\|Ke\|_A^2 \leq \tau \|Ke\|_V^2 \quad (\star)$$

mit einem von e unabhängigen $\tau > 0$. Dann gilt

$$\tau \geq \sigma \quad \text{und} \quad \|SK\|_A \leq \sqrt{1 - \sigma/\tau}.$$

Beweis: Aus der Glättungseigenschaft und (\star) folgt

$$\|SKe\|_A^2 \leq \|Ke\|_A^2 - \sigma \|Ke\|_V^2 \leq (1 - \sigma/\tau) \|Ke\|_A^2 \leq (1 - \sigma/\tau) \|e\|_A^2$$



Die Kontraktionseigenschaft von SK

- **Satz:** Falls die C/F -Zerlegung und die Interpolation I_H^h so gewählt sind, dass für alle e gilt

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$

wobei τ unabhängig von e ist, dann ist (\star) erfüllt.

Die Kontraktionseigenschaft von SK

- **Satz:** Falls die C/F -Zerlegung und die Interpolation I_H^h so gewählt sind, dass für alle e gilt

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$

wobei τ unabhängig von e ist, dann ist (\star) erfüllt.

- Der Parameter τ hängt von A ab!

Die Kontraktionseigenschaft von SK

- **Satz:** Falls die C/F -Zerlegung und die Interpolation I_H^h so gewählt sind, dass für alle e gilt

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2,$$

wobei τ unabhängig von e ist, dann ist (\star) erfüllt.

- Der Parameter τ hängt von A ab!
- Von Interesse ist aber hier die gleichmäßige Konvergenz für eine ganze Klasse von Matrizen.

- Sei A_c der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

Ein Beispiel

- Sei A_c der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- A_0 ist gerade der diskrete Laplace-Operator, dessen kleinster Eigenwert sei λ_0 mit zugehöriger Eigenfunktion e , für die gelten soll $\|e^h\|_{A_0}^2 = \lambda_0$.

Ein Beispiel

- Sei A_c der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- A_0 ist gerade der diskrete Laplace-Operator, dessen kleinster Eigenwert sei λ_0 mit zugehöriger Eigenfunktion e , für die gelten soll $\|e^h\|_{A_0}^2 = \lambda_0$.
- Dann gilt für positives $c < \lambda_0$, dass $\|e^h\|_{A_c}^2 = \lambda_0 - c$.

- Sei A_c der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- A_0 ist gerade der diskrete Laplace-Operator, dessen kleinster Eigenwert sei λ_0 mit zugehöriger Eigenfunktion e , für die gelten soll $\|e^h\|_{A_0}^2 = \lambda_0$.
- Dann gilt für positives $c < \lambda_0$, dass $\|e^h\|_{A_c}^2 = \lambda_0 - c$.
- Also sollte unabhängig von c gelten, dass

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_c}^2 \leq \tau (\lambda_0 - c).$$

- Sei A_c der diskrete Helmholtz-Operator mit Differenzenstern:

$$\begin{pmatrix} & -1 & \\ -1 & 4 - c & -1 \\ & -1 & \end{pmatrix}$$

- A_0 ist gerade der diskrete Laplace-Operator, dessen kleinster Eigenwert sei λ_0 mit zugehöriger Eigenfunktion e , für die gelten soll $\|e^h\|_{A_0}^2 = \lambda_0$.
- Dann gilt für positives $c < \lambda_0$, dass $\|e^h\|_{A_c}^2 = \lambda_0 - c$.
- Also sollte unabhängig von c gelten, dass

$$\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_c}^2 \leq \tau (\lambda_0 - c).$$

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt für den Fehler e :

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt für den Fehler e :

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

- Falls $Se \approx e$, folgt $|r_i| \ll a_{ii} |e_i|$.

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt für den Fehler e :

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

- Falls $Se \approx e$, folgt $|r_i| \ll |a_{ii}| |e_i|$.
- Auch wenn der Fehler e global noch sehr groß ist, kann man e_i lokal durch seine Nachbarwerte approximieren durch

$$e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}.$$

Interpretation algebraisch glatter Fehler

- Gauss-Seidel-Glättung an einem Punkt i ergibt für den Fehler e :

$$\bar{e}_i = e_i - \frac{r_i}{a_{ii}}.$$

- Falls $Se \approx e$, folgt $|r_i| \ll |a_{ii}| |e_i|$.
- Auch wenn der Fehler e global noch sehr groß ist, kann man e_i lokal durch seine Nachbarwerte approximieren durch

$$e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}.$$

- Erinnerung: Ein Fehler heißt **glatt**, falls er auf einem gröberen Gitter approximiert werden **muss**, um die Konvergenz des Verfahrens zu beschleunigen.

Interpolation algebraisch glatter Fehler

- Einerseits $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$ ($i \in F$).

Interpolation algebraisch glatter Fehler

- Einerseits $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$ ($i \in F$).
- Andererseits $e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}$

Interpolation algebraisch glatter Fehler

- Einerseits $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$ ($i \in F$).
- Andererseits $e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}$
- Naiver Ansatz $P_i = N_i$ und $w_{ik} = -a_{ik}/a_{ii}$, d.h. für jedes $i \in F$ wären alle Nachbarn in C .

Interpolation algebraisch glatter Fehler

- Einerseits $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$ ($i \in F$).
- Andererseits $e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}$
- Naiver Ansatz $P_i = N_i$ und $w_{ik} = -a_{ik}/a_{ii}$, d.h. für jedes $i \in F$ wären alle Nachbarn in C .
- Ziel: Nur eine sehr kleine Menge von Interpolationsvariablen P_i . Sehr konsequent sind hier die Aggregations AMG-Methoden.

Interpolation algebraisch glatter Fehler

- Einerseits $e_i = \sum_{k \in P_i} w_{ik} e_k$ ($i \in F$).
- Andererseits $e_i \approx \frac{-\sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j}{a_{ii}}$
- Naiver Ansatz $P_i = N_i$ und $w_{ik} = -a_{ik}/a_{ii}$, d.h. für jedes $i \in F$ wären alle Nachbarn in C .
- Ziel: Nur eine sehr kleine Menge von Interpolationsvariablen P_i . Sehr konsequent sind hier die Aggregations AMG-Methoden.

Starke und schwache Kopplungen

- Sei $P_i \subset N_i$, dann ist die Approximation

$$\frac{1}{\sum_{k \in P_i} a_{ik}} \sum_{k \in P_i} a_{ik} e_k \approx \frac{1}{\sum_{j \in N_i} a_{ij}} \sum_{j \in N_i} a_{ij} e_j$$

um so besser, je mehr **starke Kopplungen** bezüglich i in P_i enthalten sind.

- Eine Kopplung zwischen zwei Indizes i und j ist stark, falls

$$|a_{ij}|/a_{ii}$$

relativ groß ist.

- Wähle also $w_{ik} = -\alpha_i a_{ik}/a_{ii}$, wobei hier $\alpha_i = \frac{\sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\sum_{l \in P_i} a_{il}}$.

Wahl der Interpolationsvariablen

- Fixiere $\tau \geq 1$.

Wahl der Interpolationsvariablen

- Fixiere $\tau \geq 1$.
- Konstruiere die disjunkte Zerlegung von $\Omega^h = F \cup C$, so dass für jedes $i \in F$ eine Menge $P_i \subset C \cap N_i$ existiert mit

$$\sum_{k \in P_i} |a_{ik}| \geq \frac{1}{\tau} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|.$$

Wahl der Interpolationsvariablen

- Fixiere $\tau \geq 1$.
- Konstruiere die disjunkte Zerlegung von $\Omega^h = F \cup C$, so dass für jedes $i \in F$ eine Menge $P_i \subset C \cap N_i$ existiert mit

$$\sum_{k \in P_i} |a_{ik}| \geq \frac{1}{\tau} \sum_{j \in N_i} |a_{ij}|.$$

- Diese Interpolation mit Gewichten $\alpha_i = \frac{\sum_{j \in N_i} a_{ij}}{\sum_{l \in P_i} a_{il}}$ erfüllt $\|e^h - I_H^h e^H\|_{D_h}^2 \leq \tau \|e^h\|_{A_h}^2$.

Wahl der Interpolationsvariablen

- Die Wahl von τ ist entscheidend für Konvergenzgeschwindigkeit und Aufwand der Konstruktion der gröberen Gitter.

Wahl der Interpolationsvariablen

- Die Wahl von τ ist entscheidend für Konvergenzgeschwindigkeit und Aufwand der Konstruktion der größeren Gitter.
- Aus Experimenten $\tau = 2$.

Wahl der Interpolationsvariablen

- Die Wahl von τ ist entscheidend für Konvergenzgeschwindigkeit und Aufwand der Konstruktion der gröberen Gitter.
- Aus Experimenten $\tau = 2$.
- Nach Möglichkeit sollte P_i den Punkt $i \in F$ umzingeln, falls ein geometrischer Hintergrund vorliegt.

Wahl der Interpolationsvariablen

- Die Wahl von τ ist entscheidend für Konvergenzgeschwindigkeit und Aufwand der Konstruktion der gröberen Gitter.
- Aus Experimenten $\tau = 2$.
- Nach Möglichkeit sollte P_i den Punkt $i \in F$ umzingeln, falls ein geometrischer Hintergrund vorliegt.

- Variationsprinzip: $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.

- Variationsprinzip: $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.
- Mit Vorglättung: $\|K_{h,H}S e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|S e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.

- Variationsprinzip: $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.
- Mit Vorglättung: $\|K_{h,H}Se^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|Se^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.
- Gilt $\|Se^h - I_H^h e^H\|_{A_h} \leq \eta \|e^h\|_{A_h}$ folgt $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} \leq \eta$. S muss kein Glättungsoperator im Sinne von $\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2$ sein.

- Variationsprinzip: $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|e^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.
- Mit Vorglättung: $\|K_{h,H}Se^h\|_{A_h} = \min_{e^H} \|Se^h - I_H^h e^H\|_{A_h}$.
- Gilt $\|Se^h - I_H^h e^H\|_{A_h} \leq \eta \|e^h\|_{A_h}$ folgt $\|K_{h,H}e^h\|_{A_h} \leq \eta$. S muss kein Glättungsoperator im Sinne von $\|Se\|_A^2 \leq \|e\|_A^2 - \sigma \|e\|_V^2$ sein.
- Durch eine geschickte Wahl von S und I_H^h können wir η beliebig reduzieren.

- Die Matrix A_h kann geschickt in Blockform notiert werden:

$$A_h u = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_c \end{pmatrix} = f$$

- Die Matrix A_h kann geschickt in Blockform notiert werden:

$$A_h u = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_c \end{pmatrix} = f$$

- $I_H^h = \begin{pmatrix} I_{FC} & I_{CC} \end{pmatrix}^T$ und $e_F = I_{FC} e_C$.

- Die Matrix A_h kann geschickt in Blockform notiert werden:

$$A_h u = \begin{pmatrix} A_{FF} & A_{FC} \\ A_{CF} & A_{CC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_F \\ u_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_F \\ f_c \end{pmatrix} = f$$

- $I_H^h = \begin{pmatrix} I_{FC} & I_{CC} \end{pmatrix}^T$ und $e_F = I_{FC} e_C$.
- Wir können bei geeigneter Wahl der feinen und groben Indizes A_{FF} stark diagonal dominant wählen, d.h.

$$a_{ii} - \sum_{j \in F, j \neq i} |a_{ij}| \geq \delta a_{ii}$$

bei fixiertem $\delta > 0$. Dies ist erfüllt mit $\delta = 1/\tau$.

- Sei $u = \begin{pmatrix} u_F & u_C \end{pmatrix}$ eine Approximation der Lösung, wobei wir jetzt u_C fixiert halten wollen.

- Sei $u = \begin{pmatrix} u_F & u_C \end{pmatrix}$ eine Approximation der Lösung, wobei wir jetzt u_C fixiert halten wollen.
- Gauss-Seidel auf $A_{FF}u_F + A_{FC}u_C = f_F$ angewandt ergibt für den Fehler

$$\bar{e}_F = S_{FF}e_F - (I_{FF} - S_{FF})A_{FF}^{-1}A_{FC}e_C$$

mit $S_{FF} = I_{FF} - Q_{FF}^{-1}A_{FF}$.

- Sei $u = \begin{pmatrix} u_F & u_C \end{pmatrix}$ eine Approximation der Lösung, wobei wir jetzt u_C fixiert halten wollen.
- Gauss-Seidel auf $A_{FF}u_F + A_{FC}u_C = f_F$ angewandt ergibt für den Fehler

$$\bar{e}_F = S_{FF}e_F - (I_{FF} - S_{FF})A_{FF}^{-1}A_{FC}e_C$$

mit $S_{FF} = I_{FF} - Q_{FF}^{-1}A_{FF}$.

- So erhalten wir den Glättungsoperator

$$S_h = \begin{pmatrix} S_{FF} & (S_{FF} - I_{FF})A_{FF}^{-1}A_{FC} \\ 0 & I_{CC} \end{pmatrix}.$$

- Sei $u = \begin{pmatrix} u_F & u_C \end{pmatrix}$ eine Approximation der Lösung, wobei wir jetzt u_C fixiert halten wollen.
- Gauss-Seidel auf $A_{FF}u_F + A_{FC}u_C = f_F$ angewandt ergibt für den Fehler

$$\bar{e}_F = S_{FF}e_F - (I_{FF} - S_{FF}) A_{FF}^{-1} A_{FC} e_C$$

mit $S_{FF} = I_{FF} - Q_{FF}^{-1} A_{FF}$.

- So erhalten wir den Glättungsoperator

$$S_h = \begin{pmatrix} S_{FF} & (S_{FF} - I_{FF}) A_{FF}^{-1} A_{FC} \\ 0 & I_{CC} \end{pmatrix}.$$

Approximation einer Projektion

- $S_h^\nu(e_F, e_C) \rightarrow (\hat{e}, e_C)$ für $\nu \rightarrow \infty$ und für alle (e_F, e_C) . Dabei gilt $A_{FF}\hat{e} + A_{FC}e_C = 0$.
- Die Wirkung von $S_h^n \nu$ auf e_F kann also als Approximation für einen Projektionsoperator in den Raum $R(A_{FF}^{-1} A_{FC})$ verstanden werden. Insbesondere gilt auch $S_h e = e$ für alle $e = (e_F, e_C)$, falls $e_F \in R(A_{FF}^{-1} A_{FC})$.
- In der Praxis kaum $n > 2$, da die entsprechenden Galerkinoperatoren sonst aufgefüllt würden.

Grenzen der Theorie und offene Probleme

- Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz gelingt nur für einige Klassen von Matrizen.

Grenzen der Theorie und offene Probleme

- Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz gelingt nur für einige Klassen von Matrizen.
- Diverse Tricks nötig, um die entsprechenden Eigenschaften der Matrizen auch für die ungeordneten Galerkin Operatoren der Grobgitter zu garantieren.

Grenzen der Theorie und offene Probleme

- Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz gelingt nur für einige Klassen von Matrizen.
- Diverse Tricks nötig, um die entsprechenden Eigenschaften der Matrizen auch für die ungeordneten Galerkin Operatoren der Grobgitter zu garantieren.
- Zu viele Ergebnisse sind heuristisch motiviert.

Grenzen der Theorie und offene Probleme

- Der Beweis der gleichmäßigen Konvergenz gelingt nur für einige Klassen von Matrizen.
- Diverse Tricks nötig, um die entsprechenden Eigenschaften der Matrizen auch für die ungeordneten Galerkin Operatoren der Grobgitter zu garantieren.
- Zu viele Ergebnisse sind heuristisch motiviert.