H-Matrix-Arithmetik Niedrigrangmatrizen (Komplexität)

Raphaël Scheiwiller

Wichtige Begriffe

- Singulärwertzerlegung (SVD)
- Gekürzte Singulärwertzerlegung (rSVD)
- Bestapproximation
- Aufwand der (gekürzte) Singulärwertzerlegung

Def: ($R_{\leq k}$-Matrix)

Eine Matrix M $\in \Re^{n \times m}$ bezeichnen wir als eine $R_{\leq k}$-Matrix, wenn ihr Rang höchstens k ist. Die Menge aller n×m-$R_{\leq k}$-Matrizen bezeichnen wir mit

$R_{\leq k}$(n,m)={ M $\in \Re^{n \times m}$ | rang(M)$\leq$k}

Def: (Rk-Matrix)

Eine Matrix M $\in \Re^{n\times m}$ bezeichnen wir als eine Rk-Matrix, wenn sie die Darstellung

$$M = \sum_{i=1}^{k} a^i (b^i)^T = AB^T$$

mit A $\in \Re^{n\times k}$, B $\in \Re^{m\times k}$, a$^i \in \Re^n$, b$^i \in \Re^m (i = 1, \ldots, k)$ vorliegt

SVD

Sei M $\in \Re^{n\times m}$, k=rang(M) welche in SVD

$$M = U\Sigma V^T$$

mit $\Sigma = \mathrm{diag}\{\sigma_1,\ldots,\sigma_k,0,\ldots,0\} \in \Re^{n\times m}$ und unitären U $\in \Re^{n\times n}$, V $\in \Re^{m\times m}$ gegeben ist, ist insbesondere eine $R_{\leq k}$(n,m)-Matrix

$$M = \sum_{i=1}^{k} u^i \sigma_i (v^i)^T$$

mit den Spaltenvektoren u^i bzw v^i. σ_i sind die Singulärwert von M.

rSVD

Geg M $R_{\leq k}$-Matrix mit SVD

$$M = U\Sigma V^T = \begin{bmatrix} u^1 \dots u^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & \sigma_{k'} & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v^1)^T \\ \vdots \\ (v^n)^T \end{bmatrix}$$

Die zu dieser SVD und k $\in \{0, \dots, k'\}$ gehörende Matrix

$$\tilde{M} = U\tilde{\Sigma}V^T = \begin{bmatrix} u^1 \dots u^{\tilde{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_{\tilde{k}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (v^1)^T \\ \vdots \\ (v^{\tilde{k}})^T \end{bmatrix}$$

bezeichnen wir als eine (auf Rang $\tilde{k} \leq k'$) rSVD von M.

rSVD liefert Bestapproximation

Eine auf Rang $\tilde{k}$ gekürzte SVD $\tilde{M}$ von M ist eine Bestapproximierende (bzgl der Spektral - und Frobeniusnorm) von M in der Mengen der $R_{\leq k}$-Matrizen
:

$$\min_{rang(B)\leq\tilde{k}} \|M - B\|_2 = \|M - \tilde{M}\|_2 = \sigma_{\tilde{k}+1}$$

$$\min_{rang(B)\leq\tilde{k}} \|M - B\|_F = \|M - \tilde{M}\|_F = \sqrt{\sum_{i=\tilde{k}+1}^{k'} \sigma_{i^2}}$$

Frobeniusnorm: $\|M\|_F^2 = \Sigma Mij^2$

<u>Bew</u>

Im Falle $\tilde{k}$=k' ist die Beh trivial, sei also nun $\tilde{k} < k'$

<u>Richtung $\min_{rang(B)\leq\tilde{k}} \|M - B\| \leq \|M - \tilde{M}\|$:</u>

- $$\min_{rang(B)\leq\tilde{k}} \|M - B\|_2 \leq \|M - \tilde{M}\|_2 = \|U^T(M - (\tilde{M}))V\|_2$$
  $$= \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_2 = \sigma_{\tilde{k}+1}$$
- $$\min_{rang(B)\leq\tilde{k}} \|M - B\|_F \leq \|M - \tilde{M}\|_F = \|U^T(M - (\tilde{M}))V\|_F$$
  $$= \|\Sigma - \tilde{\Sigma}\|_F = \sqrt{\sum_{i=\tilde{k}+1}^{k'} \sigma_{i^2}}$$

Richtung $\min_{rang(B)\leq\tilde{k}} \|M-B\| \geq \|M-\tilde{M}\|$:

Bew für die Spektralnorm:(kurze Version)

Mit Hilfe einer vorgegebner Matrix B konnte man einen normierten Vektoren $z^{\tilde{k}+1}$ finden, wobei es gilt

$$\bullet \|M-B\|_2 \geq \|(M-B)z^{\tilde{k}+1}\|_2 = \|Mz^{\tilde{k}+1}\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\tilde{k}+1}(\sigma_i(v_i)^T z^{\tilde{k}+1})^2}$$

$$\geq \sigma_{\tilde{k}+1}\sqrt{\sum_{i=1}^{\tilde{k}+1}((v^i)^T z^{\tilde{k}+1})^2} = \sigma_{\tilde{k}+1}$$

Bew für die Frobeniusnorm:(kurze Version)

Durch Induktion hat man ein Orthonormalsystem von Vektoren $z^{\tilde{k}+1}, \ldots, z^{k'}$ gefunden, dieser System wurde weiter zu einer Orthonormalbasis $z^1, \ldots, z^n$ ergänzt. Dh jetzt haben wir Z=$\left[z^1 \ldots z^n\right]$ eine unitäre Matrix und es foglt

$$\|M - B\|_F = \|(M - B)Z\|_F = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \|(M - B)Ze^i\|_2^2}$$

$$\geq \sqrt{\sum_{i=\tilde{k}+1}^{k'} \|(M - B)z^i\|_2^2} \geq \sqrt{\sum_{i=\tilde{k}+1}^{k'} \sigma_{i^2}}$$

Multiplikation, Addition

Lemma 1:

Sei R $\in R_{\leq k}$(n,m), N $\in \Re^{n' \times n}$ und M $\in \Re^{m \times m'}$.

$$Dann NR \in R_{\leq k}(n', m), RM \in R_{\leq k}(n, m')$$

Bew:

Falls R=AB^T dann NR=(NA)B^T und RM=A$(M^T B)^T$

Lemma 2:

Sei R_1, $R_2 \in R_{\leq k}$(n,m).

$$Dann R_1 + R_2 \in R_{\leq 2k}(n, m)$$

Bew:

Falls R_1=AB^T und R_2=CD^T dann

$$R_1 + R_2 = AB^T + CD^T = \underbrace{[AC]}_{n\times 2k}\underbrace{[BD]^T}_{2k\times m}$$

Def:(Truncation τ_k)

Sei M $\in \Re^{n \times m'}$ und k eine natürliche Zahl.

$$Operator \tau_k : \Re^{n \times m} \mapsto R_{\leq k}(n, m)$$

$$M \mapsto \tilde{M}$$

wobei $\tilde{M}$ die Bestapproximation von M ist. $\tilde{M}$ ist die sog. Truncation von M zur Rang k.

Def:(Formatierte Rk-Matrix Addition)

Die formatierte Addition in die Menge $R_{\leq k}$(n,m) ist definiert durch

$$A \bigoplus B = \tau_k(A + B)$$

A,B $\in \Re^{n \times m}$

Algorithm zur SVD von Rk-Matrizen

Geg M=AB^T eine Rk(n,m)-Matrix, A $\in \Re^{n\times k}$, B $\in \Re^{m\times k}$ mit Rang k' $\leq$ k.

Schritt 1 :

QR-Zerlegungen von A und B

$$A = Q_A R_A, Q_A \in \Re^{n\times k}, R_A \in \Re^{k\times k}$$

$$B = Q_B R_B, Q_B \in \Re^{m\times k}, R_B \in \Re^{k\times k}$$

Schritt 2 :

SVD von $R_A R_B^T$

$$R_A R_B^T = U\Sigma V^T$$

Schritt 3 :

$$M = AB^T = Q_A U \cdot \Sigma \cdot (Q_B V^T)$$

ist ein SVD von M.

Aufwand

$$\begin{array}{lll}
QR - Zerlegung von A: & 4nk^2 & \\
QR - Zerlegung von B: & 4mk^2 & \\
Multiplikation von R_A R_B^T: & & 2k^3 \\
SVD von R_A R_B^T: & & 21k^3 \\
Multiplikation von Q_A U, Q_B V: & nk^2 + mk^2 & \\
Gesamt: N_{Rk,SVD}(n,m) = & 5(n+m)k^2 & +23k^3
\end{array}$$