Lemma 2: Taylorentwicklung von $g(x,y) = \log|x-y|$
Sei $x_o := (a+b)/2$. Für jedes $k \in \mathbf{N}$ approximiert die Funktion

$$\tilde{g}(x,y) := \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} \partial_x^\nu g(x_o,y)(x-x_o)^\nu$$

den Kern $g(x,y) = \log|x-y|$ mit dem Fehler

$$|g(x,y) - \tilde{g}(x,y)| \le \left(1 + \frac{|x_o - a|}{|c-b|}\right)\left(1 + \frac{|c-b|}{|x_o - a|}\right)^{-k}$$

Beweis: Sei $x \in [a,b]$, $a < b$ und $y \in [c,d]$.Die Taylorentwicklung des Kerns $g(x,y)$ in x_o erfüllt innerhalb der Konvergenzradius:

$$g(x,y) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} \partial_x^\nu g(x_o,y)(x-x_o)^\nu$$

. Der Rest $g(x,y) - \tilde{g}(x,y) = \sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \partial_x^\nu g(x_o,y)(x-x_o)^\nu$ kann geschätzt werden durch:

$$\left|\sum_{\nu=k}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \partial_x^\nu g(x_o,y)(x-x_o)^\nu\right| = \left|\sum_{\nu=k}^{\infty} (-1)^{\nu-1} \frac{(\nu-1)!}{\nu!} \left(\frac{x-x_o}{x-y}\right)^\nu\right| \le \sum_{\nu=k}^{\infty} \left|\frac{x-x_o}{x-y}\right|^\nu$$

$$\le \sum_{\nu=k}^{\infty} \left(\frac{|x_o-a|}{|x_o-a|+|c-b|}\right)^\nu \overset{\text{geom. Reihe}}{=} \frac{\left(\frac{|x_o-a|}{|x_o-a|+|c-b|}\right)^k}{1 - \frac{|x_o-a|}{|x_o-a|+|c-b|}}$$

$$= \frac{\left(\frac{|x_o-a|}{|x_o-a|+|c-b|}\right)^k}{\frac{|c-b|}{|x_o-a|+|c-b|}} = \left(1 + \frac{|x_o-a|}{|c-b|}\right)\left(1 + \frac{|c-b|}{|x_o-a|}\right)^{-k}$$

da $1 + \frac{|c-b|}{|x_o-a|} > 1$ deckt der Konvergenzradius das ganze Intervall $[a,b]$ ab. □

Lemma 3: elementenweise Matrix Approximationsfehler
Die Matrixelemente sind in den zugelassenen Blocks $t \times s$ beschränkt durch:

$$|G_{ij} - \tilde{G}_{ij}| \le n^{-2} 3^{-k+1}$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
|G_{ij} - \tilde{G}_{ij}| &= \left|\int_0^1 \int_0^1 \varphi_i(x)(g(x,y) - \tilde{g}(x,y))\varphi_j(y)dydx\right| \\
&\overset{|g(x,y)-\tilde{g}(x,y)| \le 3^{-k+1}}{\le} \int_0^1 \int_0^1 |\varphi_i(x)| 3^{-k+1} |\varphi_j(y)| dydx \\
&= 3^{-k+1} \underbrace{\int_0^1 \varphi_i(x)dx}_{1/n} \underbrace{\int_0^1 \varphi_j(y)dy}_{1/n} \\
&= n^{-2} 3^{-k+1}
\end{aligned}$$

□