

Elektromagnetische Felder — ganz diskret

Ralf Hiptmair

Seminar für Angewandte Mathematik
ETH Zürich

(e-mail: hiptmair@sam.math.ethz.ch)

(Homepage: <http://www.sam.math.ethz.ch/~hiptmair>)

Elektromagnetische Felder

Elektromagnetische Felder (I)



Technik

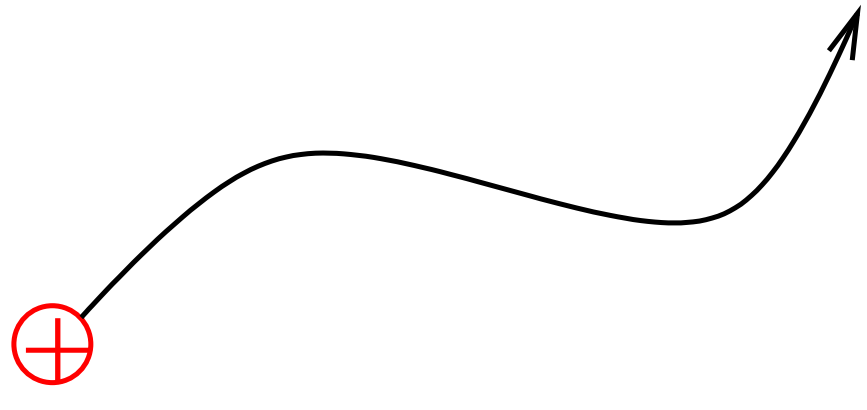
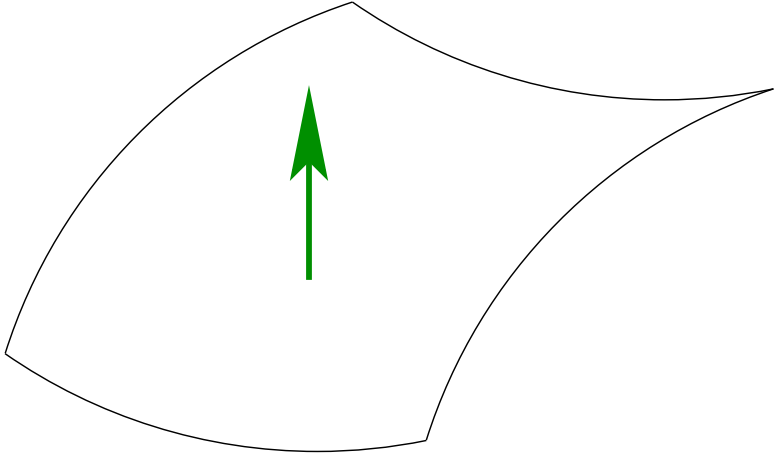
ist

(überwiegend)

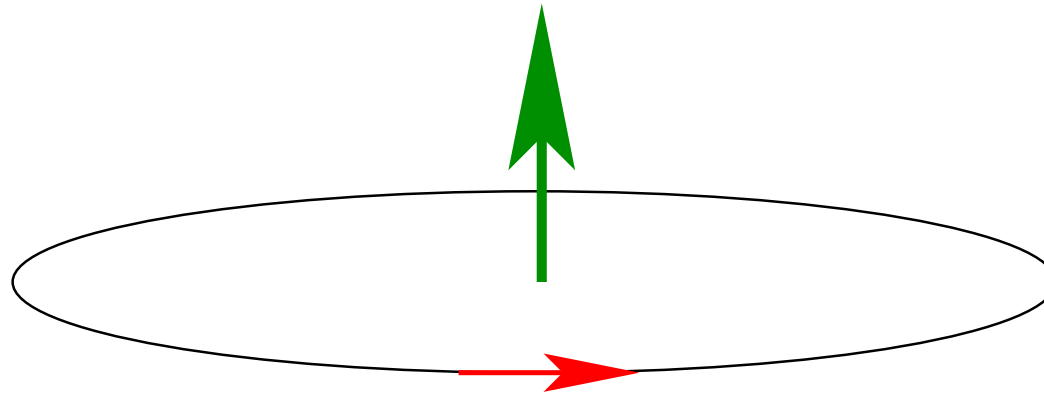
elektromagnetisch!

Elektromagnetische Felder (II)

Elektromagnetische Felder sind ein **mathematisches Konzept**

<p><i>Elektrisches Feld</i></p>  <p>Spannung entlang Pfade</p> $U = \int_{\gamma} \mathbf{E} \cdot d\vec{s}$	<p><i>Magnetisches Feld</i></p>  <p>Fluss durch Flächen</p> $\Phi = \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$
--	---

Maxwellsche Gleichungen



Induktionsgesetz

Durchflutungsgesetz

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot dS$$

Σ : Orientierte Fläche
 $\partial\Sigma$: Rand der Fläche

$$\int_{\partial\Sigma} \mathbf{H} \cdot d\vec{s} = \frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot dS$$

Beziehungen zwischen Randspannungen und Flächenflüssen!

$[\frac{d}{dt}]$ = Zeitliche Änderung]

Diskrete Felder

Diskrete Feldwerte

Diskret = durch endlich viele Zahlen zu charakterisieren

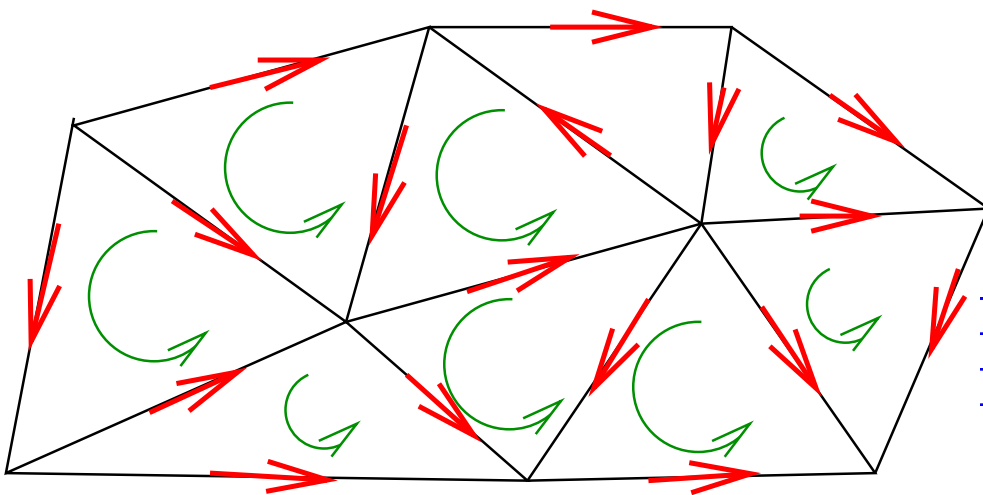
Diskretes elektrisches Feld

Diskretes magnetisches Feld

charakterisiert durch

Spannungen zu endlich vielen Pfaden

Flüsse zu endlich vielen Flächen



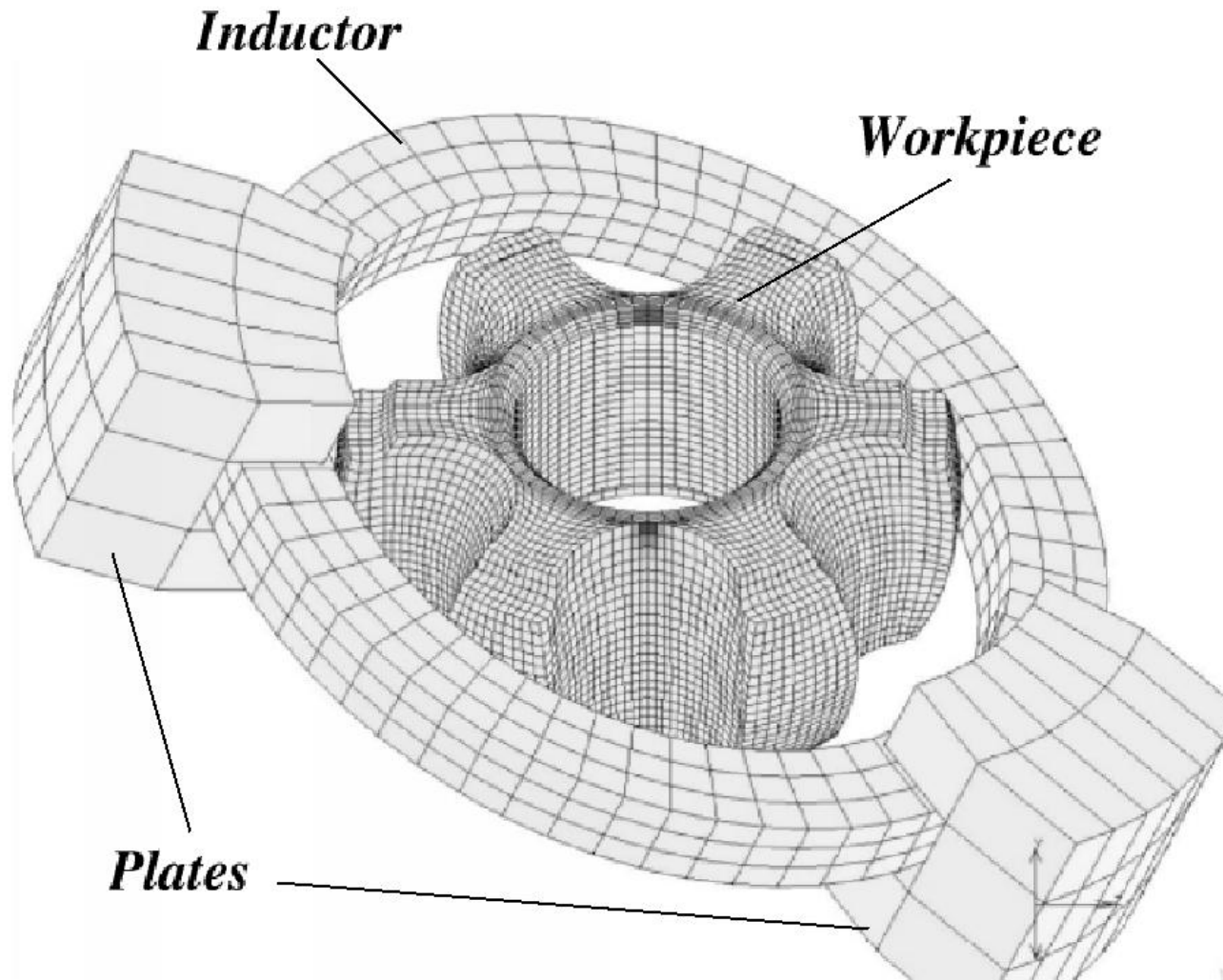
Essentiell: Sinnvoller Randoperator

▶ Triangulierung/Netz

\mathbf{E} → Spannungen zu Netzkanten : \vec{E}

\mathbf{B} → Flüsse zu Netzflächen : \vec{B}

Triangulierung



Netz für numerische
Lösung eines Wirbel-
stromproblems

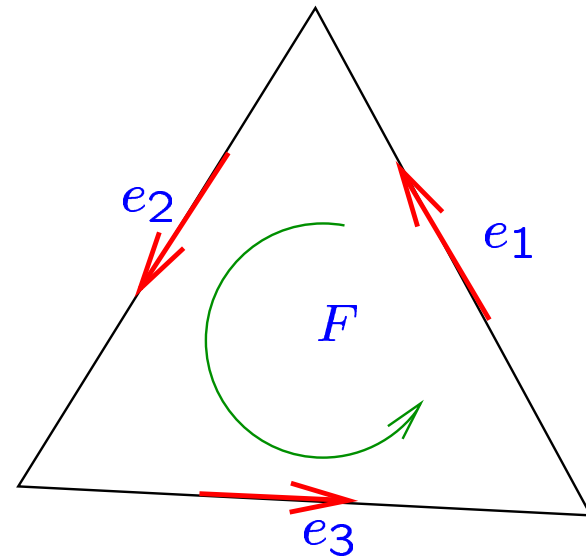
Diskrete Maxwell'sche Gleichungen

Diskretes Induktionsgesetz

$$\vec{E}(e_1) + \vec{E}(e_2) + \vec{E}(e_3) = -\frac{d}{dt}\vec{B}(F)$$

Diskretes Durchflutungsgesetz

$$\vec{H}(e_1) + \vec{H}(e_2) + \vec{H}(e_3) = \frac{d}{dt}\vec{D}(F)$$



Abtastoperator: Extraktion von Kantenspannungen/Flächenflüssen aus kontinuierlichen Feldern, d.h. $\mathbf{E} \mapsto \vec{E}$, $\mathbf{B} \mapsto \vec{B}$

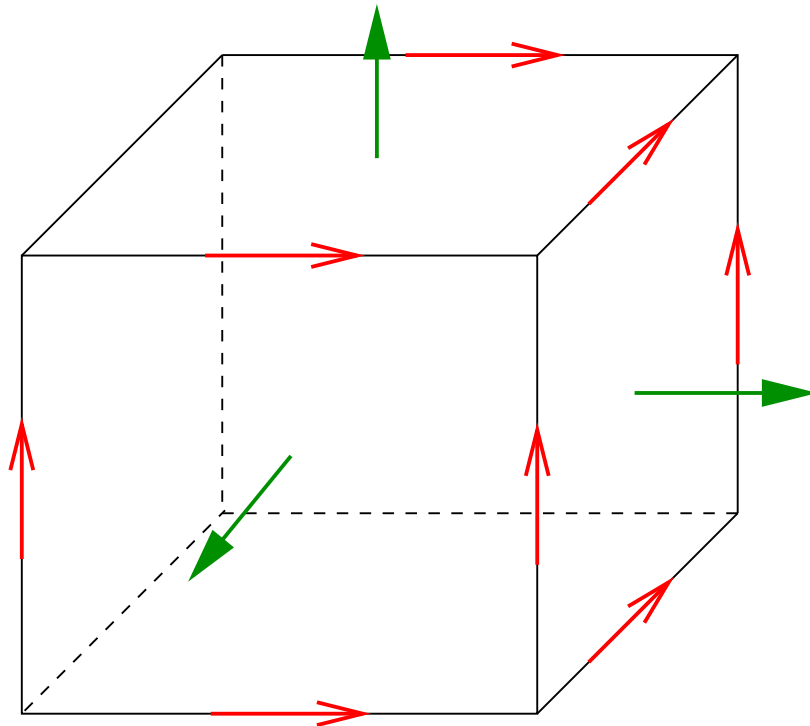
Konsistenz: \mathbf{E} , \mathbf{B} erfüllen Maxwell'sche Gleichungen

Abgetastete Felder erfüllen diskrete Maxwell'sche Gleichungen

Materialbeziehungen

► Notwendige Komplettierung der Maxwellschen Gleichungen

Beispiel: $\mathbf{D}(\mathbf{x}) = \epsilon_0 \mathbf{E}(\mathbf{x})$ für jeden Punkt \mathbf{x}



Diskretes Gegenstück ?

$$\text{Kantenspannungen} = \epsilon_0 \cdot \text{Flächenflüsse}$$
$$\vec{\mathbf{E}} = \epsilon_0 \vec{\mathbf{D}}$$

Zuordnung unklar, insbesondere i.a.
Anzahl Kanten \neq Anzahl.Flächen

Kantenelemente

Diskretes elektrisches Feld (I)

Ziel: Kantenspannungen \vec{E} \mapsto beliebige Pfadspannungen E_h



Interpolationsaufgabe

Beispiel: Interpolation von Punktwerten im Dreieck

Baryzentrische Koordinaten:

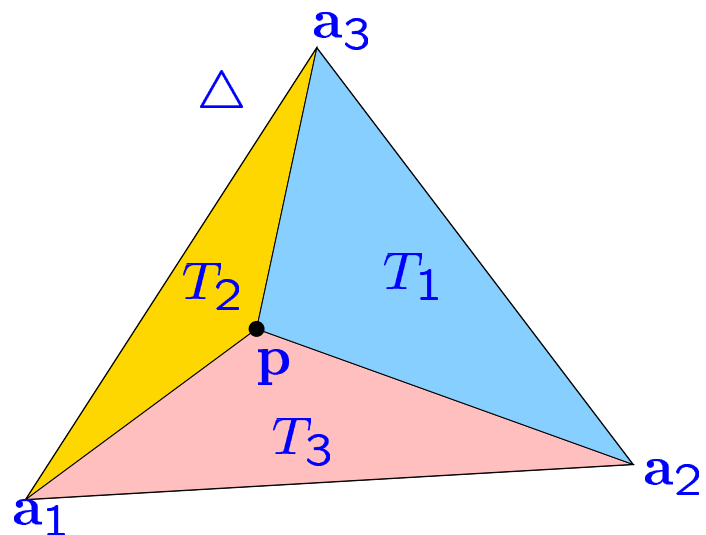
$$\lambda_i(\mathbf{p}) = \text{Fläche}(T_i) : \text{Fläche}(\Delta)$$

$$\Rightarrow \mathbf{p} = \lambda_1(\mathbf{p})\mathbf{a}_1 + \lambda_2(\mathbf{p})\mathbf{a}_2 + \lambda_3(\mathbf{p})\mathbf{a}_3$$

„Punkt \mathbf{p} als Summe der Eckpunkte“

▶ **Lineare Interpolation:**

$$f(\mathbf{p}) = \lambda_1(\mathbf{p})f(\mathbf{a}_1) + \lambda_2(\mathbf{p})f(\mathbf{a}_2) + \lambda_3(\mathbf{p})f(\mathbf{a}_3)$$



Diskretes elektrisches Feld (II)

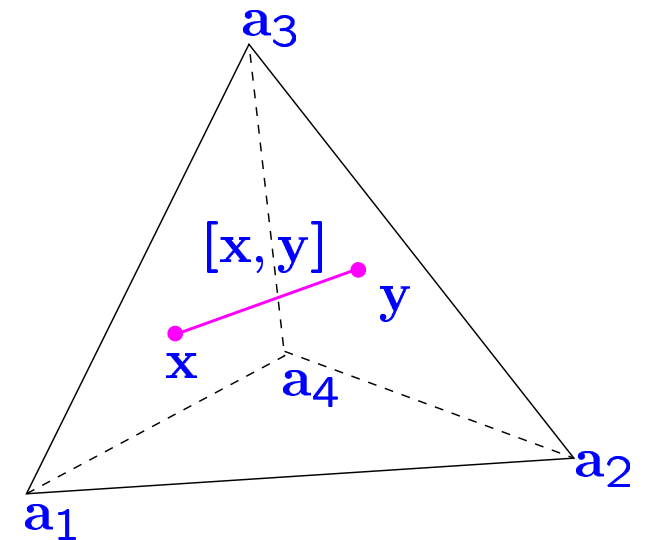
Beispiel: Tetraeder T mit Eckpunkten $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4$

► Baryzentrische Koordinaten:

$$\lambda_1(\mathbf{p}), \lambda_2(\mathbf{p}), \lambda_3(\mathbf{p}), \lambda_4(\mathbf{p}),$$

► „Interpolation“ der Strecke $[\mathbf{x}, \mathbf{y}]$

$$\mathbf{x}, \mathbf{y} \in T, \mathbf{x} = \sum_i \lambda_i(\mathbf{x}) \mathbf{a}_i, \mathbf{y} = \sum_i \lambda_i(\mathbf{y}) \mathbf{a}_i$$



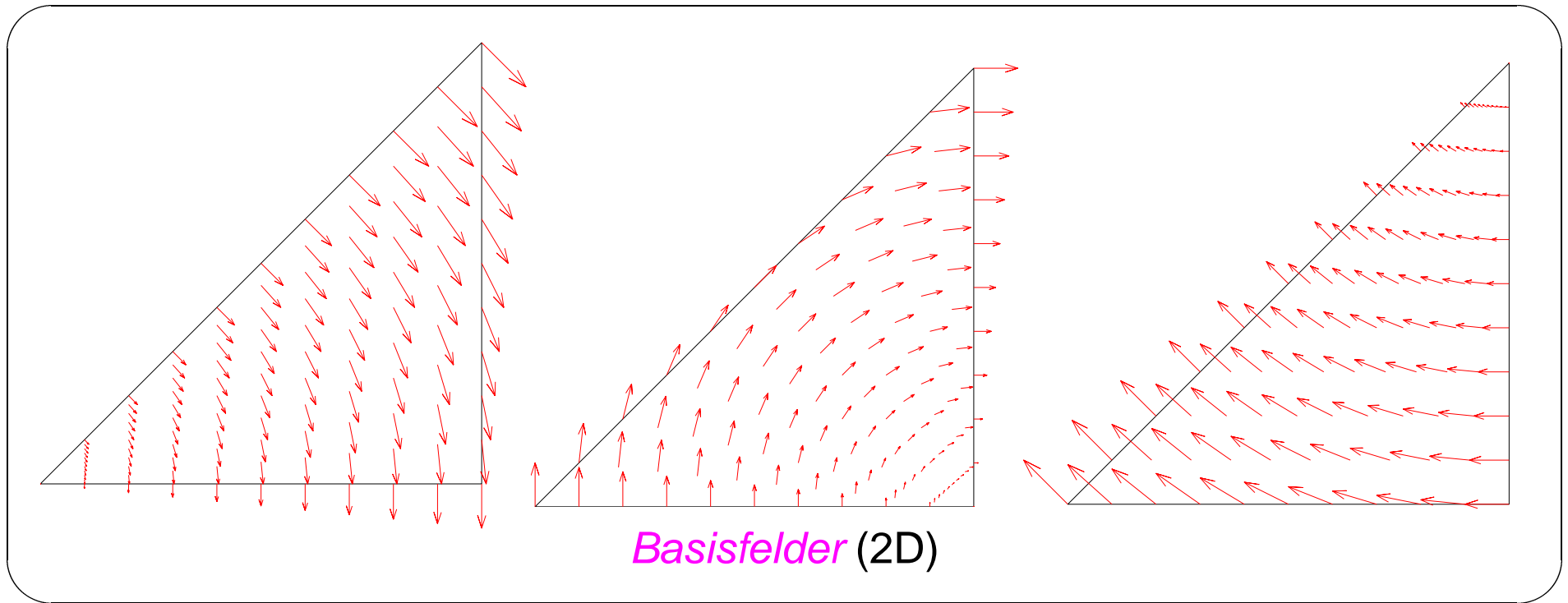
$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}] &= \{t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{y}; 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{\sum_i [t\lambda_i(\mathbf{x}) + (1-t)\lambda_i(\mathbf{y})] \mathbf{a}_i; 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \left\{ \sum_i [t \sum_j \lambda_j(\mathbf{y}) \lambda_i(\mathbf{x}) + (1-t) \sum_j \lambda_j(\mathbf{x}) \lambda_i(\mathbf{y})] \mathbf{a}_i \right\} \\ &= \left\{ \sum_i \sum_j \lambda_i(\mathbf{x}) \lambda_j(\mathbf{y}) [t\mathbf{a}_i + (1-t)\mathbf{a}_j]; 0 \leq t \leq 1 \right\}. \end{aligned}$$



$$\int_{[\mathbf{x}, \mathbf{y}]} \mathbf{E}_h \cdot d\vec{s} := \sum_{i < j} [\lambda_i(\mathbf{x}) \lambda_j(\mathbf{y}) - \lambda_i(\mathbf{y}) \lambda_j(\mathbf{x})] \cdot \vec{\mathbf{E}}([\mathbf{a}_i, \mathbf{a}_j])$$

Kantenelemente

Ergebnis der Interpolation in Vektorfelddarstellung:



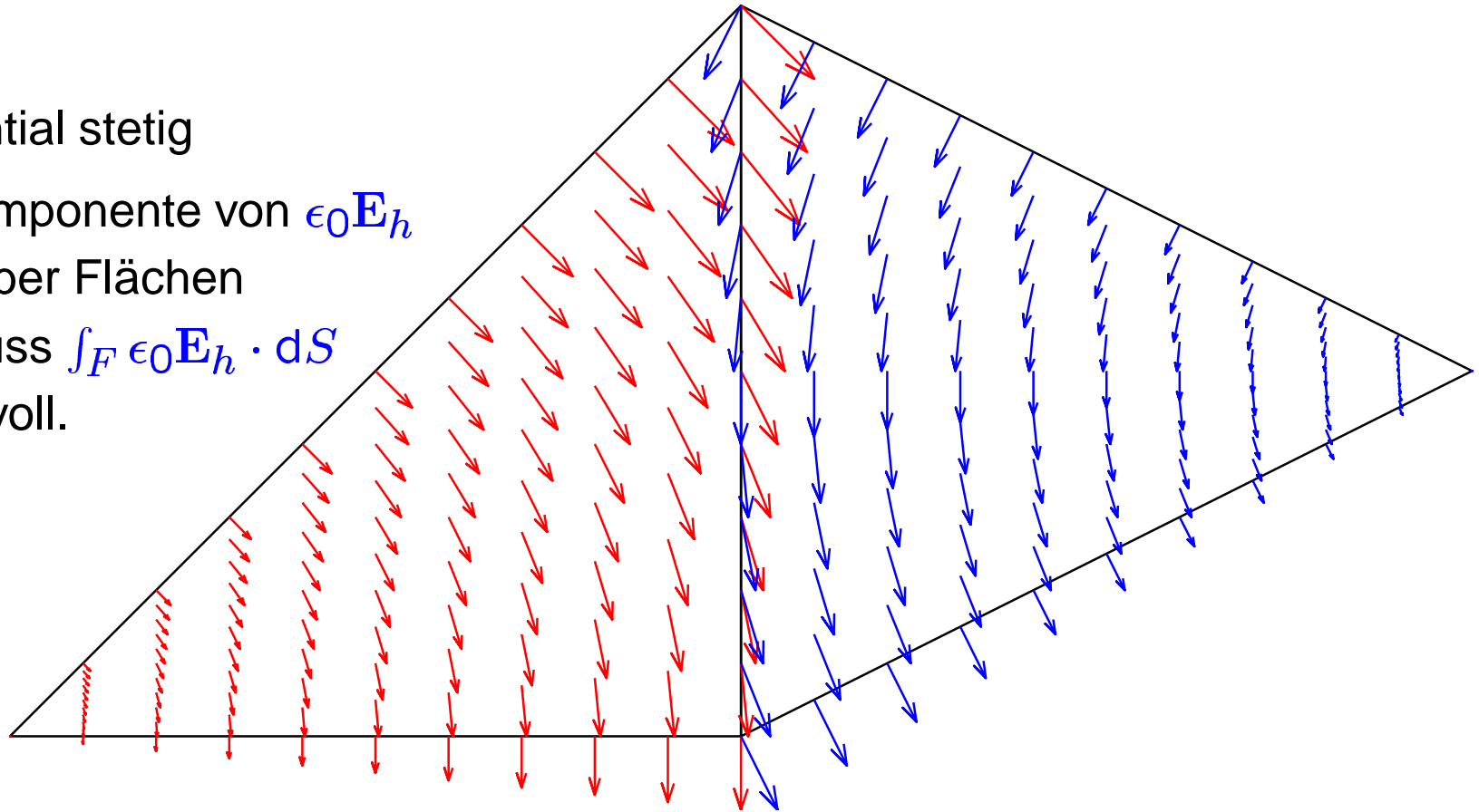
► \mathbf{E}_h hat konstante Tangentialkomponenten entlang Gitterkanten

Diskrete Materialgleichungen

\mathbf{E}_h nur tangential stetig

▶ Normalkomponente von $\epsilon_0 \mathbf{E}_h$
unstetig über Flächen

▶ Flächenfluss $\int_F \epsilon_0 \mathbf{E}_h \cdot d\mathbf{S}$
nicht sinnvoll.



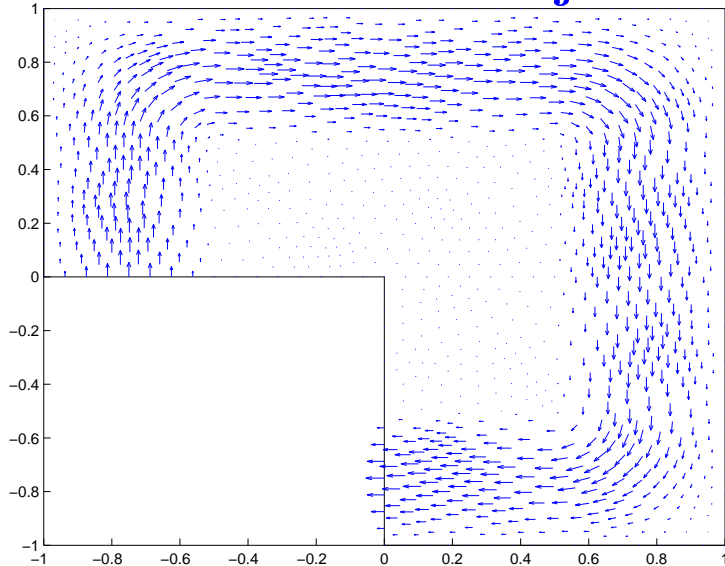
Idee:

Mittelung durch **Galerkin-Projektion**

$$\mathbf{D}_h : \int \mathbf{D}_h \cdot \mathbf{D}'_h dV = \int \epsilon_0 \mathbf{E}_h \cdot \mathbf{D}'_h dV \quad \text{für alle } \mathbf{D}'_h$$

Vektorelemente vs. Kantenelemente

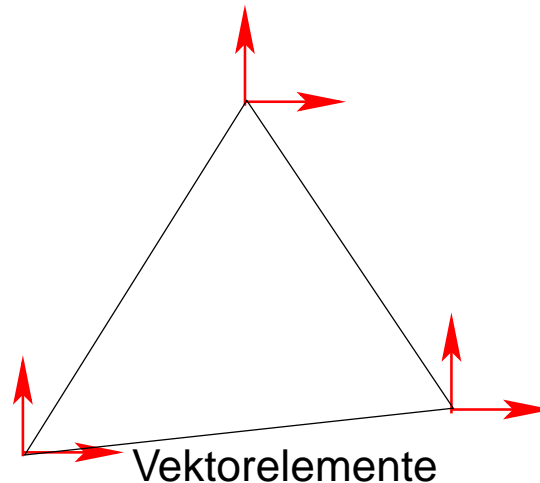
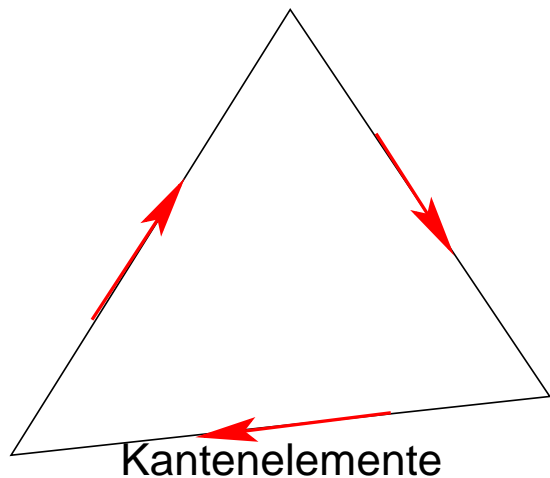
Quellterm \mathbf{j}



Beispiel: 2D Magnetostatik

Rechengebiet Ω mit einspringender Ecke („L-Gebiet“)

$$\begin{aligned} \operatorname{curl} \mu_0^{-1} \operatorname{curl}_{2D} \mathbf{A} &= \mathbf{j} && \text{in } \Omega \\ \operatorname{div} \mathbf{A} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{A} \times \mathbf{n} &= 0 && \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

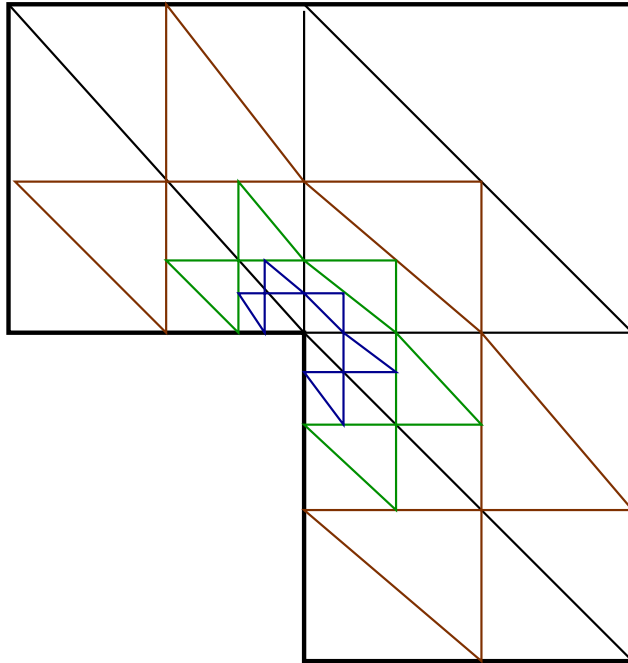


$$\begin{aligned} &\Updownarrow \\ &(\mu_0 = 1) \\ \Delta \mathbf{A} &= \mathbf{j} && \text{in } \Omega \end{aligned}$$

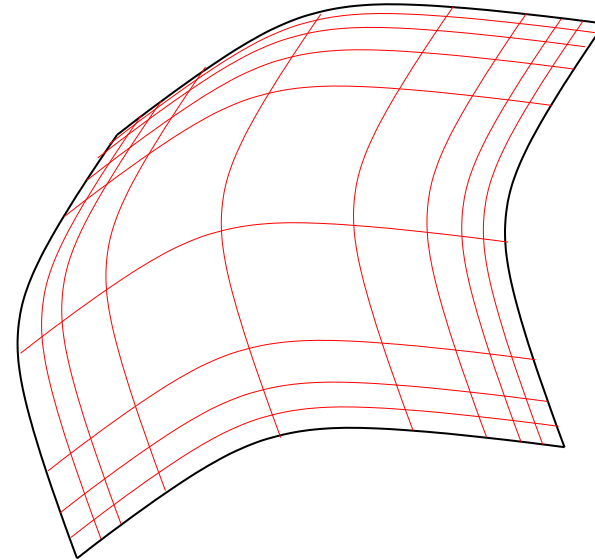
Fragestellungen

Geometriesingularitäten

Einspringende Ecken/Kanten



Dünne Bleche



A-priori
A-posteriori

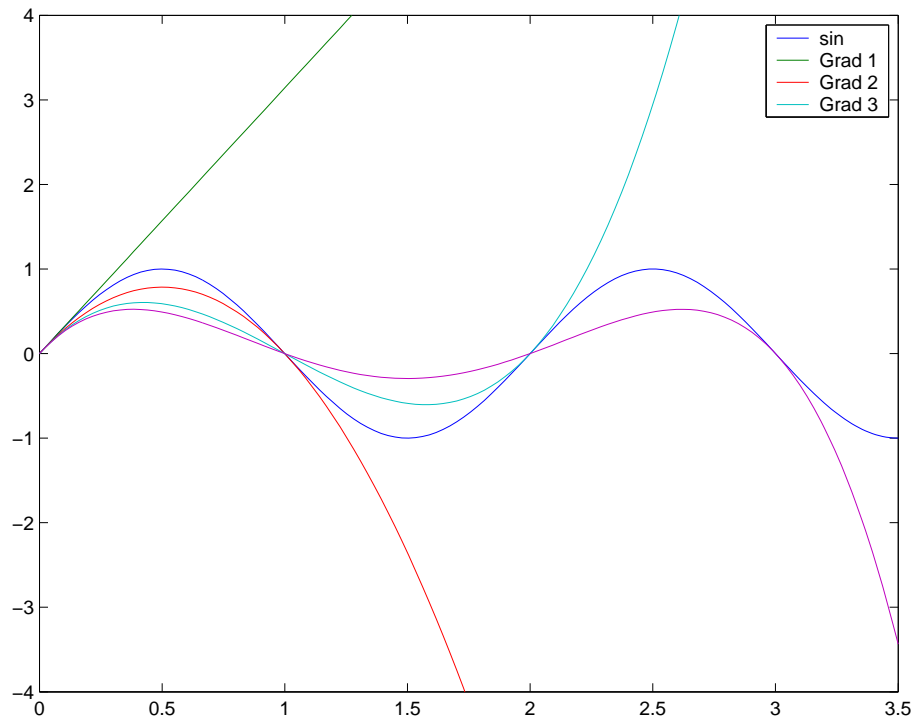
problemangepasste Gitter erforderlich !

Wellenapproximation

Hohe Frequenzen \leftrightarrow Kleine Wellenlängen



Diskretisierung auf extrem feinen Netzen erforderlich



Idee: Verwende Kantenelemente von **höherem Grad**

▶ Bessere Wellenapproximation

▶ Gröberes Netz ausreichend

Alternative: „Einbau“ von Wellen in diskrete Felder (**Modulationsansatz**)

Aussenraumprobleme

Potentialdarstellung für zeit-harmonische elektromagnetische Felder

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = -\operatorname{curl}_{\mathbf{x}} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{u}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) - k \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y}) - \frac{1}{k} \operatorname{grad}_{\mathbf{x}} \int_{\Gamma} G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\mu}(\mathbf{y}) \, dS(\mathbf{y})$$

auf Rand Γ mit **Randdaten** $\mathbf{u} := \mathbf{E} \times \mathbf{n}$, $\boldsymbol{\mu} := \operatorname{curl} \mathbf{E} \times \mathbf{n}$, $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{\exp(ik|\mathbf{x}-\mathbf{y}|)}{4\pi|\mathbf{x}-\mathbf{y}|}$

► Reduktion auf **Randintegralgleichungen** mit Unbekannten \mathbf{u} oder $\boldsymbol{\mu}$

\mathbf{u} = Tangentialkomponente von \mathbf{E}

$\boldsymbol{\mu}$ = Tangentialkomponente von \mathbf{H}

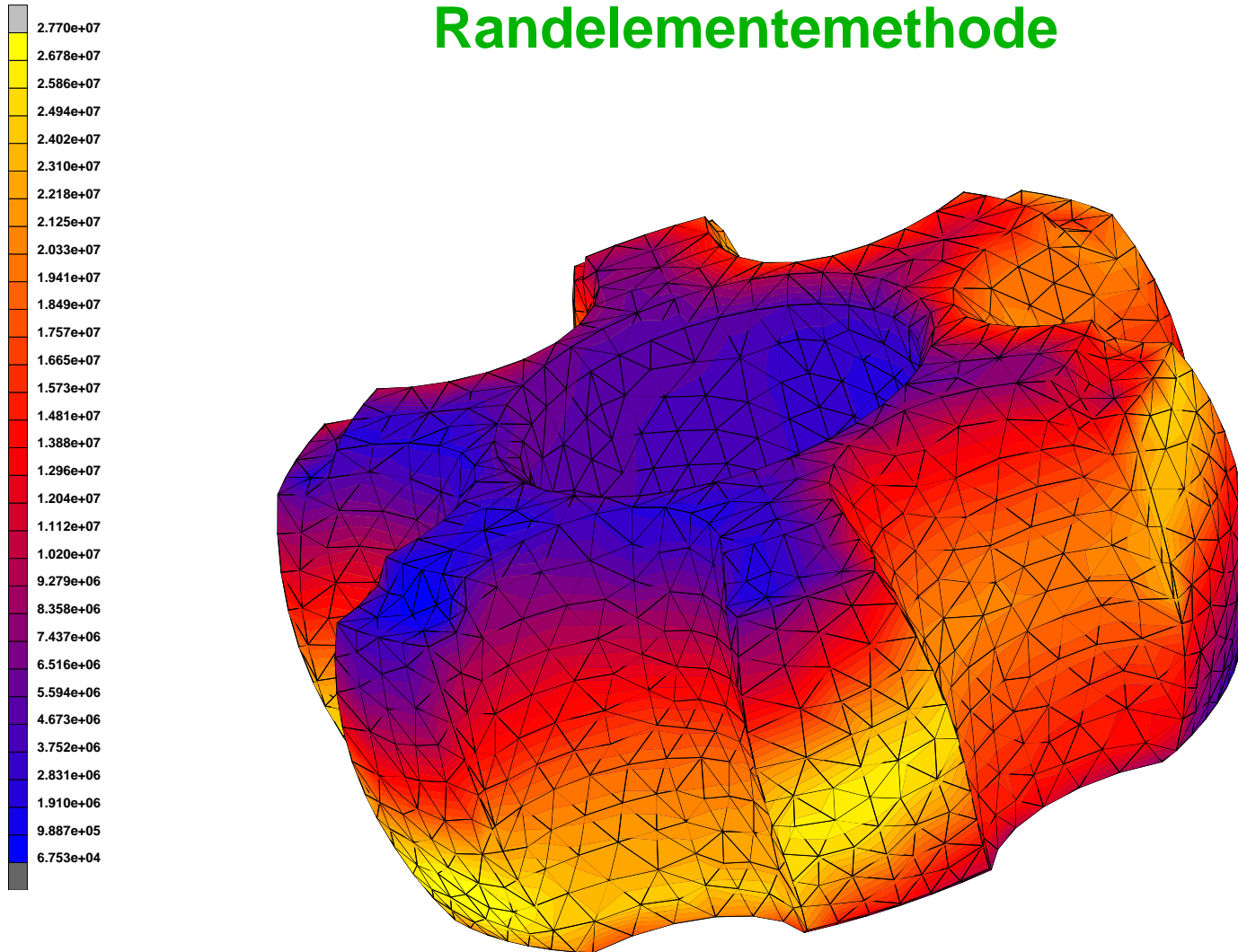
Approximation durch **Kantenelemente**

basierend auf **Oberflächengitter**

Randelementemethode

Time: 0.000e+00

Randelementemethode



Simulation induktiven Härtens (Wirbelstrommodell): Oberflächenstromverteilung auf Stahlwerkstück berechnet mit Hilfe der **Randelementemethode** (Dr. J. Ostrowski, Tübingen)