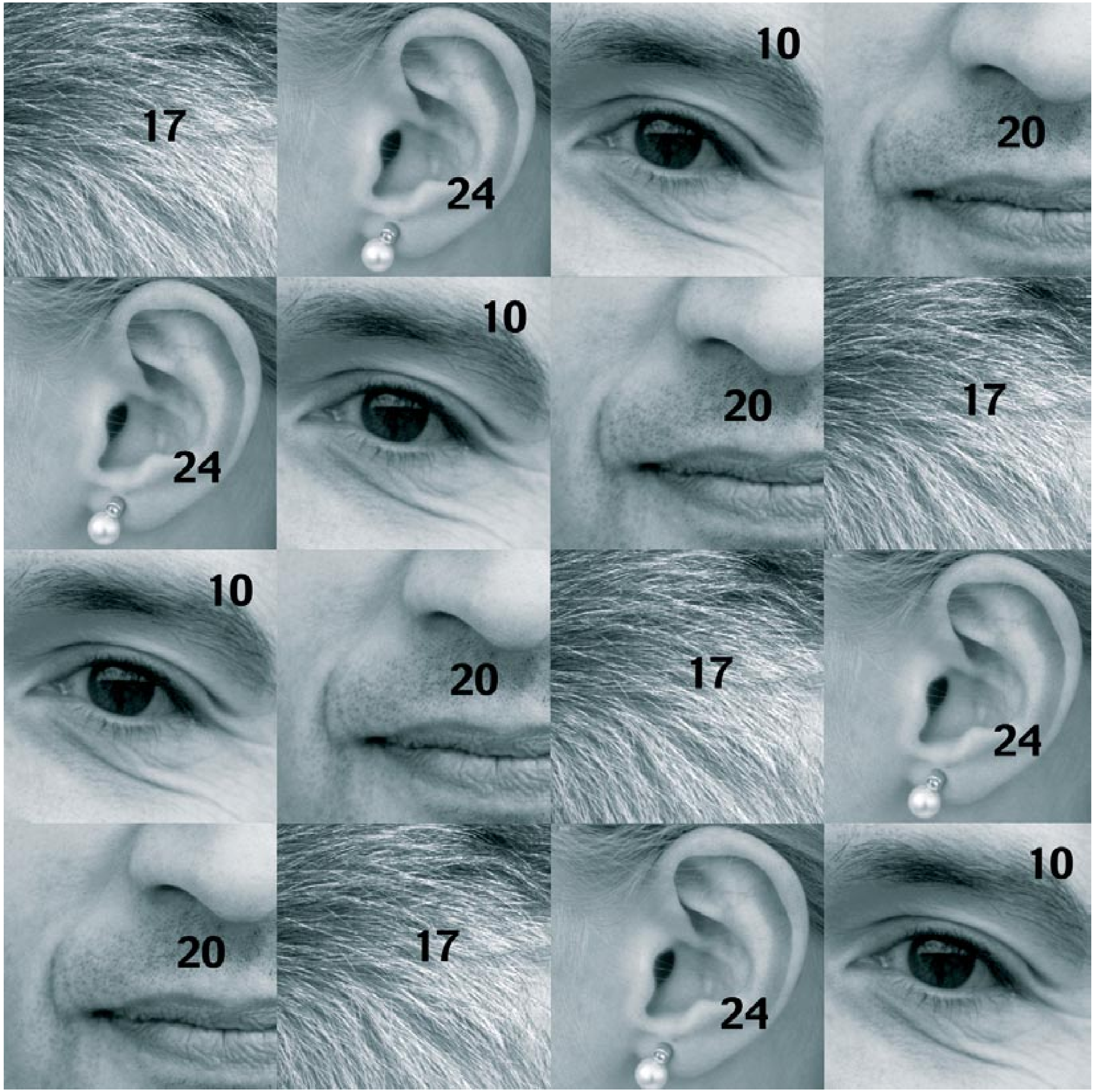
Departement Mathematik

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

# Mathematik

## das geistige Auge


17
24
10
20
24
10
20
17
10
20
17
24
20
17
24
10

# Mathematatik - das geistige Auge

*Gisbert Wüstholz, Prolog:*

Mathematik hat wie kaum eine andere wissenschaftliche Disziplin unsere kulturelle, geistige und wirtschaftliche Entwicklung beeinflusst und in hohem Maße ermöglicht. Oft ist dies jedoch nur beim genaueren Hinsehen zu erkennen. Diesen Blick etwas zu schärfen, ist eines der Anliegen des vorliegenden kleinen Bändchens.

Wir begegnen auf Schritt und Tritt Dingen, die wir nicht missen wollen und die ohne Mathematik niemals entstanden wären. Dass Brücken, Gebäude, Untertunnelungen und Transportmittel verschiedenster Art in der Regel stabil und sicher sind, gewährleisten komplizierte mathematische Berechnungen. Moderne medizinische Diagnosemethoden wie

Computer- und Kernspin-Tomographie basieren auf tiefgreifenden mathematischen Grundlagen. Aber auch die Übertragung von Informationen, die unser gegenwärtiges Zeitalter so prägt, steht auf mathematischen Fundamenten: Erst die moderne Mathematik, darunter vor allem die Zahlentheorie, hat die schnelle und sichere Datenübertragung durch Kompression und Verschlüsselung ermöglicht.

Das geht auf anderer Ebene noch weiter: Mathematik durchdringt heute praktisch sämtliche wissenschaftliche Disziplinen und erbringt einen erheblichen - nicht nur geistigen - Mehrwert. Die wissenschaftlich revolutionären Ideen der Quantenmechanik konnten nur deshalb formuliert werden, weil von den Mathematikern bereits im 19. Jahrhundert die adäquate mathematische Sprache und die nötigen Hilfsmittel entwickelt worden waren. Aus der Quantenmechanik, die zunächst nur eine theoretische Beschreibung der Wirklichkeit war, entwickelte sich die Halbleiterphysik mit ihren Mikrochips, die der wirtschaftliche Motor unserer heutigen Informationsgesellschaft ist. Viele andere Beispiele ließen sich anführen.

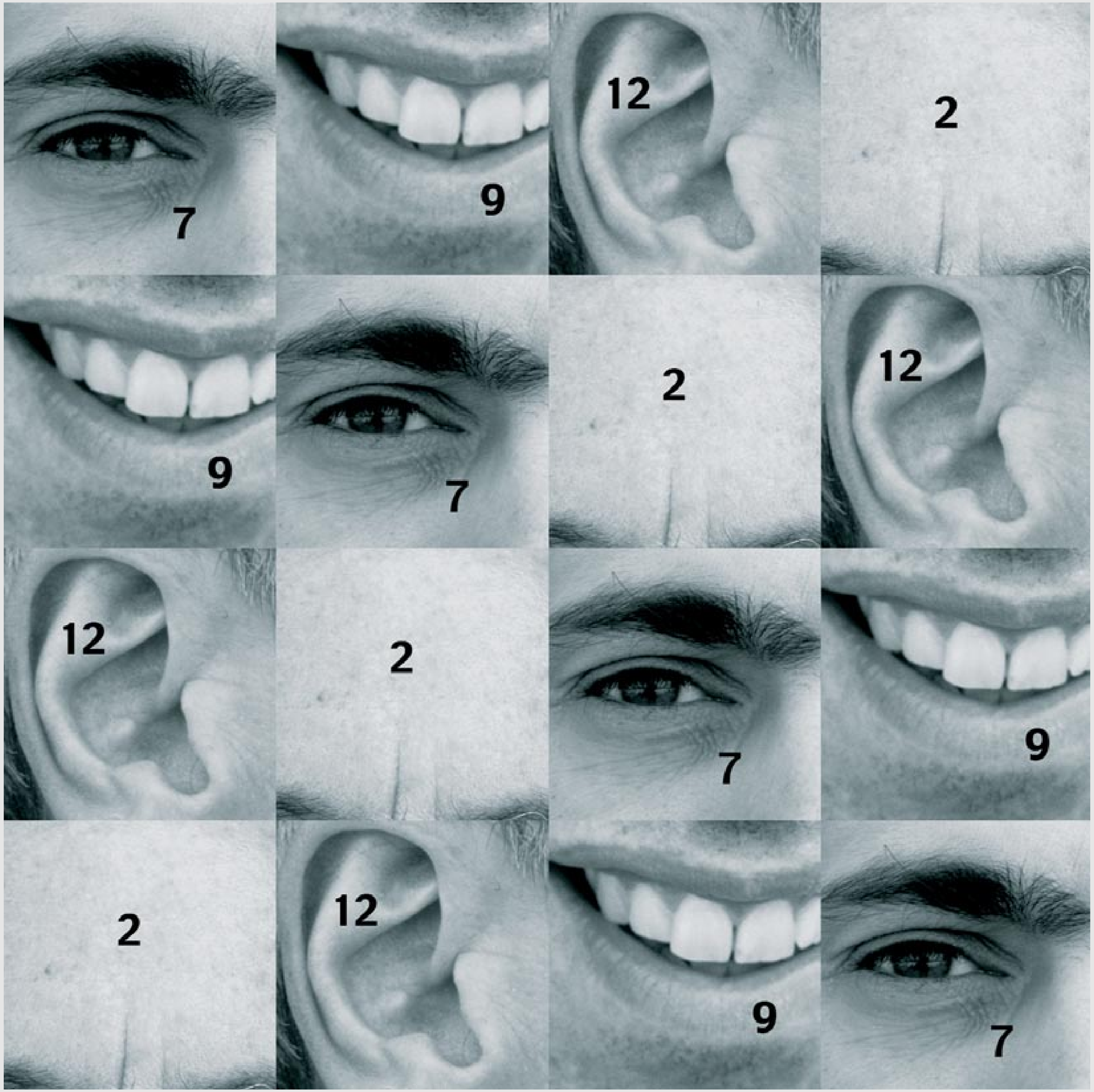
Es lässt sich aus diesen Beispielen aber noch etwas anderes ablesen, was für die Mathematik charakteristisch ist: Grundlegendes mathematisches Forschen ist langfristig angelegt und hat nicht in erster Linie die Anwendungen im Blick. Fortschritte ergeben sich hier aus der Evolution der mathematischen Wissenschaft: Indem Fragen gestellt und Antworten gesucht werden, ergeben sich oft wieder neue Fragen und neue Perspektiven.

Heute wird aber von der Wissenschaft immer stärker eingefordert, dass sie für Wirtschaft und Gesellschaft unmittelbar anwendbar ist. Das ist auf der einen Seite verständlich, auf der anderen Seite jedoch kurzsichtig: Es besteht die Gefahr, langfristig angelegte Forschung abzuwürgen und die Entwicklung der Grundlagenwissenschaften nachhaltig zu behindern. Grundlagenforschung, und dazu gehört die Mathematik in erster Linie, ist eine Investition nicht für morgen, sondern für übermorgen und danach.

Mit diesem kleinen Buch wollen wir zeigen, dass die Mathematik an der ETH aber nicht nur an übermorgen denkt, sondern auch die Erwartungen von heute und morgen im Auge behält.

Mathematik benötigt im Allgemeinen keine Laboratorien und teure Maschinen. Das Labor eines Mathematikers ist in erster Linie sein Geist und oft das Gespräch mit Kollegen. Wie ein Computer eine virtuelle Landschaft aufbaut, in der man umhergeht, so baut sich ein Mathematiker im Kopf ein Gebäude auf, in dem er sich mit Hilfe von logischen, intuitiven und nicht selten spontanen Schritten bewegt und alles, was er dabei sieht, sieht er mit seinem geistigen Auge.

Zu S.02 und S.05: >>>
Wie lautet die Spielregel, nach der die Gesichter angeordnet sind? *Auflösung: vgl. S. 38*


7
9
12
2
9
7
2
12
12
2
7
9
2
12
9
7

# Wie gerade ist die Wirklichkeit?

*Die Schulgeometrie muss nicht im Universum gelten, sagt Guido Mislin*

Vor über zweitausend Jahren schrieb der griechische Mathematiker Euklid (325 - 265 v. Chr.) sein grundlegendes Werk über die Gesetze der Geometrie. Die 13 Bücher der "Elemente" sind vielleicht das wichtigste mathematische Werk der Geschichte. Auf der euklidischen Geometrie basiert die Baukunst, die Landvermessung, ja sogar die Astronomie bis in das 20. Jahrhundert hinein. In den "Elementen" finden sich Postulate, Definitionen und Axiome, von denen alles weitere abgeleitet werden kann. Zum Beispiel: Die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist eine Gerade; die Winkelsumme in einem Dreieck beträgt 180 Grad und Parallelen schneiden sich - wenn überhaupt - im Unendlichen. Doch das gilt nur in der Ebene, eine Ameise, die auf der Oberfläche einer Kugel herumliefe, würde andere Gesetze finden.

Mathematikerinnen und Mathematiker bewegen sich heute nicht nur auf den zweidimensionalen Oberflächen einer Kugel. Sie arbeiten mit vieldimensionalen Räumen, die auch Löcher haben können. Und mit der Zahl der Löcher verändern sich ihre Eigenschaften.

Im letzten Jahrhundert zeigten sich überraschende Verbindungen zwischen der Mathematik gekrümmter Räume und der Kosmologie. "Man kann sich fragen, wie unser Universum eigentlich beschaffen ist", sagt Professor Guido Mislin, der sich mit den Algebren und der Topologie in sehr abstrakten Räumen beschäftigt. Vielleicht ist das Weltall endlich und doch unbegrenzt, so wie ein Möbiusband, ein Ring mit merkwürdigen Eigenschaften. Ein Möbiusband lässt sich leicht aus einem Streifen Papier basteln, man wendet ein Ende einmal um und klebt es mit dem anderen Ende zusammen. Während ein normaler Ring außen rot und innen blau angemalt werden könnte, müsste man bei einem Möbiusband immer die gesamte Oberfläche anstreichen, denn es gibt keine Grenze zwischen Außenseite und Innenseite. Ähnlich verhält es sich mit der Kleinschen Flasche, deren Hals scheinbar durch die Flaschenwand sticht und in den Boden mündet. Ihr Inneres stimmt mit ihrem Äußeren überein, so dass es schwierig wäre, sie mit einer Flüssigkeit zu füllen. Wenn nun eine Ameise ein Koordinatenkreuz über diese Oberfläche schleppte, könnte sich nach manchen Rundgängen die Orientierung des Kreuzes ändern. Ob sich der Raum des Universums analog verhält, ist eine offene Frage. Sicher ist jedoch, dass die Materie den Raum in einem gewissen Sinn in höhere Dimensionen krümmt, so wie beispielsweise die zweidimensionale Oberfläche einer Kugel in den Raum gekrümmt ist. Aus diesem Grund entwickeln Wissenschaftler heute sehr viel allgemeinere Geometrien und topologische Strukturen als die euklidische Geometrie, die in der Schule unterrichtet wird.

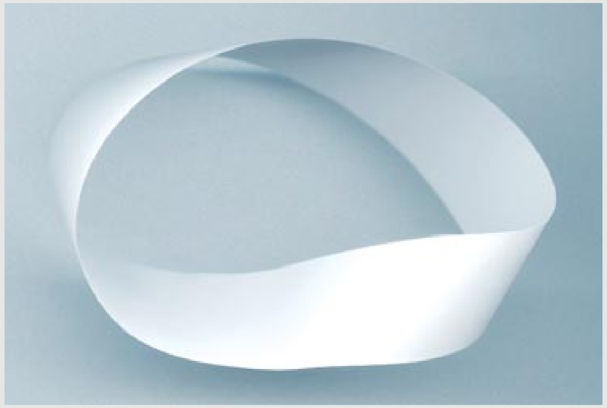
Schon auf der Kugeloberfläche gibt es erhebliche Abweichungen von der euklidischen Geometrie: Die Winkelsumme im Dreieck ist größer als 180 Grad und die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten ist ein Großkreisbogen. Doch die Topologie erlaubt auch, die Kugel zu verformen, sie zu verzerren, zu dehnen oder zu stauchen und sogar einzuschnüren, ohne dass sich die gültige Geometrie wesentlich ändert. Beim Einschnüren bekäme die Kugel eine Art Taille - einen Bereich mit negativer Krümmung, was sich an der Winkelsumme eines Dreiecks quantitativ zeigt: Sie ist kleiner als 180 Grad. Die Oberflächen einer Kugel und einer Teeschale ohne Henkel sind topologisch verwandte Objekte. Beide haben auch etwas mit der Ebene gemeinsam: Wenn man eine geschlossene Linie zeichnet und sie gedanklich immer kleiner zusammenschnurren lässt, so zieht sie sich auf beiden Flächen zu einem Punkt zusammen. Bei einem Reifen - einem Körper mit einem Loch - verhält sich das völlig anders. Zwar kann man auf seiner Oberfläche ebenfalls geschlossene Linien finden, die sich auf einen Punkt zusammenziehen lassen. Aber wenn man einen Kreis entlang der Felge zeichnet, funktioniert das nicht mehr, und auch eine Linie, die den Reifenquerschnitt umrundet, ließe sich nicht reduzieren. Wenn nun ein Fell auf der Kugel und auf der Reifenoberfläche wüchse, zeigte sich ein weiterer Unterschied: Der Reifen wäre in einer Richtung kämmbar, bei der schlichten Kugel dagegen würden die Haare Wirbel bilden.

"Was mich interessiert, sind die Zusammenhänge, die es zwischen der Topologie und der Physik der Elementarteilchen gibt", sagt Guido Mislin. Denn die

Grundbestandteile unserer Welt erwiesen sich nicht als harte punktförmige Objekte, sondern ähneln offenbar eher schwingenden Saiten. Doch die Topologie dieser so genannten Strings sei um ein Vielfaches komplexer als die der Kleinschen Flasche, erklärt Mislin. Nicht nur weil sich Strings in viele Dimensionen erstrecken, sondern auch, weil sie gewisse Symmetrien respektieren müssen. Glücklicherweise seien Mathematikerinnen und Mathematiker nicht nur auf die geometrische Anschauung angewiesen, sagt Mislin. "Ich glaube, es ist etwas Natürliches, dass Menschen einen mathematischen Sinn haben. Und wenn man die Augen schließt und nachdenkt, kann man ein Bild von der Welt bekommen, das konsistenter ist, als das, welches uns die Sinnesorgane vermitteln."

Topologische Zauberei:

Man fertige drei lange Bänder aus rotem Stoff an. Das eine wird ohne Verdrehung zu einem Ring zusammengenäht. Beim nächsten wird ein Ende des Bands gewendet (um 180 Grad) und dann an das andere Ende



genäht, es entspricht einem Möbiusband. Beim dritten Band wird ein Ende sogar um 360 Grad gedreht, bevor es an das andere Ende geheftet wird. Wegen der Länge der Bänder sind die Verdrillungen nicht sichtbar. Nun bittet man zwei Freiwillige auf die Bühne und gibt ihnen Scheren. Was passiert, wenn man die drei Bänder längs zerschneidet?

# Überraschende Komplexität im Spielzeugmodell

*Alain-Sol Sznitman untersucht zufällige Bewegungen in ungeordneter Umgebung*

Wenn ein Sonnenstrahl durch staubige Luft fällt, lässt sich mit bloßem Auge der ungeregelte Tanz der Staubkörnchen beobachten, die von den Luftmolekülen gestoßen werden. Ein Beispiel für die Brownsche Bewegung, die mathematisch durch den "Random Walk" beschrieben wird. In Büchern wird dieses Modell gerne an einem Mann erläutert, der so betrunken ist, dass er mit gleicher Wahrscheinlichkeit einen Schritt nach vorne wie zurück setzt. Der erste Gedanke "der kommt nie vom Fleck" erweist sich natürlich als falsch. Der Betrunkene ist nach N Schritten irgendwo im Abstand von Wurzel N vom Anfangsort zu finden, zumindest wenn N schon sehr groß ist.

Das einfachste Random Walk Modell läßt nur Schritte nach vorne oder nach hinten zu, ist also eindimensional. Albert Einstein hatte es um 1905 entwickelt, um Diffusion in Gasen zu beschreiben. Seine Idee erwies sich als sehr fruchtbar, sowohl für die Finanzmathematik als auch für die Physik ungeordneter Systeme. Doch sobald das Modell mehr Freiheitsgrade enthält und zum Beispiel Bewegungen in drei Raumrichtungen zulässt, wird es mathematisch extrem kompliziert.

Professor Alain-Sol Sznitman untersucht den Random Walk in einer unregelmäßigen, ungeordneten Umgebung. Solche ungeordneten Systeme spielen beispielsweise in der Geologie, Ozeanographie, Chemie, Physik und Biologie eine Rolle, denn die meisten Materialien sind nicht vollkommen regelmäßig, sondern haben Fehlstellen in ihrem Kristallgitter, die zufällig verteilt sind. Dies kann überraschende Konsequenzen haben und zum Beispiel die Bewegung eines Teilchens enorm verlangsamen, so als ob es sich in Honig bewegen würde. Es ist unmöglich, diese ungeordneten Systeme mathematisch exakt und vollständig zu beschreiben, aber in einigen Fällen gelingt es, wichtige Effekte schon an stark vereinfachten Modellen zu sehen.

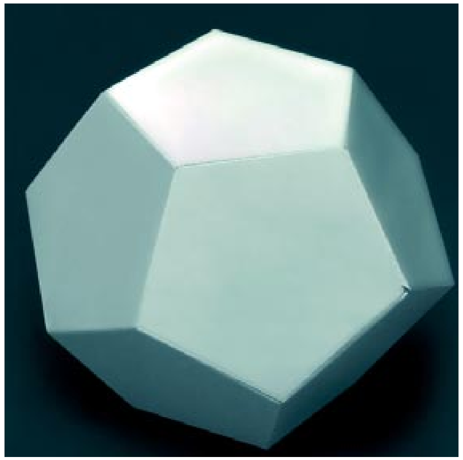
Zum Beispiel bei den so genannten Spingläsern, einer Gruppe von Halbleitermaterialien, deren magnetische Momente völlig ungeordnet sind. Für das Tieftemperaturverhalten von Spingläsern führten die theoretischen Physiker David Sherrington und Scott Kirckpatrick bereits 1975 eine Art Spielzeugmodell ein, das auf den ersten Blick bestechend einfach erscheint. Doch bei näherer mathematischer Betrachtung öffnen sich geradezu Abgründe der Komplexität. "Dass dieses Spielzeugmodell sich als so reich und kompliziert erwiesen hat, zeigt auch, dass wir die ungeordneten Systeme nicht besonders gut verstehen. Wir schlagen Vereinfachungen vor, und es wird komplizierter. Das ist geheimnisvoll", sagt Sznitman.

Einen Random Walk in einer ungeordneten Ebene zeigt http://www.math.ethz.ch

# Jedes Fragen ist ein Suchen

*Philosophie und Mathematik haben Gemeinsamkeiten, findet Eva-Maria Feichtner*

"Von Polytypen und torischen Verhältnissen" kündigte eine Lokalzeitung den Titel der Antrittsvorlesung von Professor Eva-Maria Feichtner an der ETH an. "Warum nicht gleich von Polytypen und törichten Verhältnissen?", spottet die Mathematikerin. Der Originaltitel lautete "Von Polytopen und torischen Varietäten", doch dies kam der Anzeigenabteilung der Zeitung offenbar so rätselhaft vor, dass jemand eigenmächtig die Wörter variierte, bis sie sinnvoll schienen. Wörter können leicht auf einen Irrweg führen, wenn man ihre Bedeutung nur vermeintlich kennt. Viele Wörter in der Mathematik sind solche "falschen" Vertrauten, zum Beispiel die Gruppe, der Ring, der Körper. Vielleicht wäre es eine gute Idee gewesen, diese Begriffe anders zu taufen, damit nicht immer wieder die falschen Assoziationen auftauchen. Ein Körper im Sinne der Algebra hat nichts mit einem dreidimensionalen räumlichen Gegenstand zu tun. Eine Gruppe im mathematischen Sinn ist kein Zusammenschluss von Menschen oder von Dingen, ein Ring nicht ein metallisches Schmuckstück für den Finger. Aber Mathematik beginnt immer mit präzisen Definitionen der Begriffe. In der Umgangssprache dagegen sind Begriffe notwendig unscharf. Doch auch Philosophen, die mit Sprache arbeiten, haben sich oft ganz eigene Auslegungen geschaffen.



Diese Erfahrung hat Eva-Maria Feichtner während ihres Mathematikstudiums an der Freien Universität Berlin gemacht, als sie im Nebenfach Philosophie studierte. Sie beschäftigte sich dabei auch intensiv mit dem Denken Martin Heideggers, einem der großen Philosophen des 20. Jahrhunderts. Die schillernde Gestalt des oberschwäbischen "Bäuerles", das auf seinen einsamen Wanderungen durch die Natur die tiefsten Fragen der Zeit betrachtete und andererseits bereitwillig die Richtlinien der nationalsozialistischen Hoch-schulpolitik als Rektor der Freiburger Universität umsetzte, ist vielen aus den Feuilletons vertraut. Doch die Lektüre seiner Werke ist abschreckend schwer. "Ich bin da mit einer sehr strukturellen, sagen wir mathematischen, Herangehensweise erstaunlich gut gefahren", erzählt Eva-Maria Feichtner. Einige Philosophiedozenten wollten sie sogar davon überzeugen, dass Philosophie das richtige Fach für sie sei, weil sie die Gedanken so klar herauskristallisierte und damit arbeiten konnte. Die ungewöhnliche Belegung der Worte verwirrte sie nicht.

"Ich war es aus der Mathematik gewohnt, mit Definitionen umzugehen. Und aus der Art, wie Heidegger einen Begriff verwendet und wie er ihn in Bezug setzt zu anderen Begriffen, die er benutzt, habe ich seine Definition verstehen gelernt oder mir meine eigene zusammengebastelt und konnte mich dann in diesem System aus Definitionen sehr gut bewegen." Aus Heideggers Hauptwerk "Sein und Zeit" ist Eva-Maria Feichtner besonders eine Stelle in Erinnerung hängengeblieben, bei der es um die Begriffsbestimmung der Frage geht. Heidegger fragt sich, was Fragen eigentlich bedeutet und schreibt schließlich ganz kurz und knapp: "Jedes Fragen ist ein Suchen." Und weiter im Text heißt es: "Und das Gefragte, das Gesuchte muss irgendwo vorgängig vorhanden sein." Für die Mathematikerin Feichtner heißt dies: "Ich kann die Frage nicht ins Leere stellen, sondern diese Übersetzung in den Begriff "Suchen" impliziert eigentlich schon viel mehr als das Wort "Fragen", nämlich dass da auch etwas ist, was ich suche. Das ist mir hängengeblieben, und ich denke, das spielt auch in der Mathematik eine große Rolle." In der Forschung geht es um Fragen, die noch keine Antwort haben. "Wenn es eine gute Frage ist, dann entsteht sie meist aus einem gewissen intuitiven Verständnis. Das kommt in diesem Suchen sehr schön zum Ausdruck. Gute Fragen zu formulieren heißt, im Prinzip schon die Antworten zu erahnen, sonst werden die Fragen irgendwo in der Luft hängen bleiben oder richtungslos sein."

Eva-Maria Feichtner geht ihre mathematischen Probleme mit geometrischer Intuition an. Von der Beschäftigung mit Knoten über Räume von Punktkonfigurationen bis hin zu Polytopen und deren Zusammenhang mit torischen Varietäten haben ihre Arbeitsfelder immer auch mit sichtbarer Geometrie zu tun. Konvexe Polytope sind zum Beispiel eigentlich einfache, kantige Objekte im (durchaus auch hochdimensionalen) Raum, die mit je zwei Punkten auch stets deren Verbindungsstrecke enthalten. Bekannt sind vor allem die regulären Polytope, von denen es im dreidimensionalen Raum genau fünf gibt: Tetraeder, Würfel, Oktaeder, Dodekaeder und Ikosaeder. Diese platonischen Körper galten lange Zeit als Inbegriff göttlicher Vollkommenheit. So baute Johannes Kepler seinen ersten Weltentwurf aus ineinander verschachtelten platonischen Körpern auf, um die Umlaufbahnen der damals bekannten Planeten um die Sonne zu erklären. Diese Idee erwies sich zu seinem Kummer als falsch. Und doch haben platonische Körper und ihre weniger gleichmäßig gestalteten Verwandten mathematisch viele interessante Aspekte, vor allem in mehr als drei Dimensionen. Torische Varietäten dagegen lassen sich nicht mehr so einfach in einem Satz erklären, meint die Mathematikerin. "Dennoch haben diese komplexen Objekte über die vermeintlich so anschauliche Welt der Polytope erstaunlich viel zu sagen."

Fahrplan:
Mit mathematischen Verfahren lassen sich Fahrpläne und Wegenetze optimieren. Experten beklagen, dass zur Zeit noch viel zu wenig Gebrauch vom mathematischen Know-How gemacht wird.

Computertomogramm:
Aus der Abschwächung des Röntgenstrahls berechnet ein Computerprogramm die Dichteverteilung des durchstrahlten Körperteils und produziert daraus eine dreidimensionale Karte des Gewebes. Die Bilder sind Scheibchen der 3-D-Karte.

Chromosomenpaar:
Ohne moderne statistische Verfahren kommt die Entschlüsselung des Genoms nicht voran.

Global Positioning System:
Ein GPS errechnet seinen aktuellen Standort, indem es Funkkontakt zu mehreren Satelliten hält.

Seifenblase:
Eine Seifenblase nimmt immer die Gestalt an, die unter gegebenen Randbedingungen die minimale Oberfläche besitzt. Der Architekt Frei Otto baute nach diesem mathematischen Prinzip das Zeltdach im Münchener Olympiastadion.

Finite Elemente:
Ein Objekt wird als dreidimensionales Gitter dargestellt, an dessen Kanten ein Computerprogramm die wirkenden Kräfte berechnet. Diese Methode wird bei der Konstruktion von Automobilen, Bauwerken und Maschinen eingesetzt.

Abakus:
Eine der ältesten Rechenmaschinen der Welt. Auf vielen Märkten in Asien wird sie auch heute noch verwendet. Geübte rechnen damit schneller als mit dem Taschenrechner.

Compact Disk:
Die nahezu perfekte Wiedergabequalität wird durch ein mathematisches Verfahren erreicht, das etwaige Fehler korrigiert.

Planetarischer Nebel:
Weitentfernte Objekte im Weltall können nur untersucht werden, indem Astrophysiker Hypothesen aufstellen und durchspielen: Das Werkzeug hierfür ist Mathematik.

MP3-Player:
Wissenschaftler des Fraunhofer-Instituts für integrierte Schaltungen in Erlangen haben ein mathematisches Verfahren zur Datenkompression entwickelt. Erst so konnte Musik vom Internet in kurzer Zeit heruntergeladen werden.

Wetterkarte:
Riesige Rechner und neueste mathematische Verfahren sind nötig, um alle gesammelten Wetterdaten zu einer verlässlichen Voraussage zu verarbeiten.

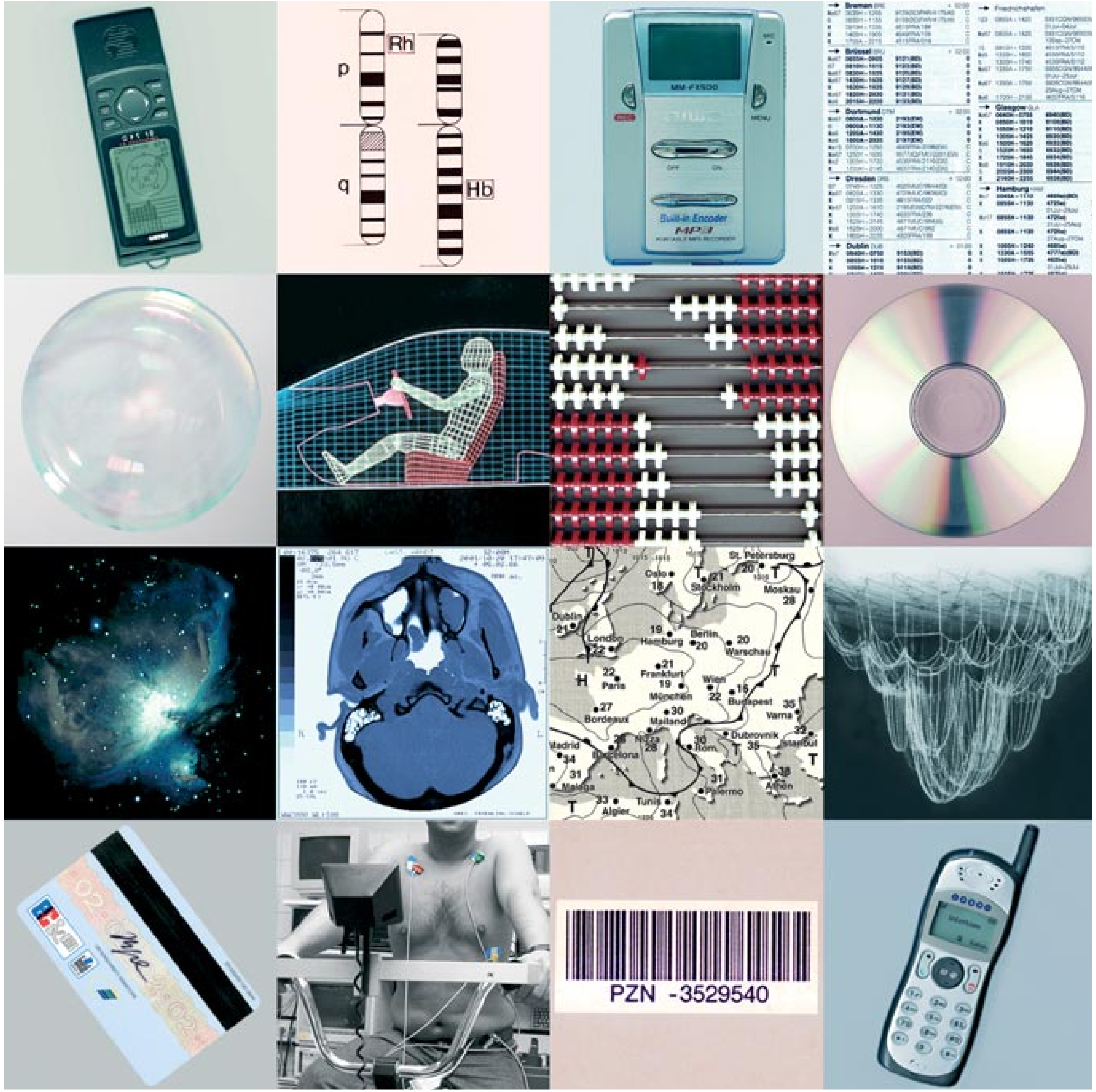
Kettenlinien:
Mit einem Modell aus hängenden Ketten entwarf Antonio Gaudi die tragende Struktur der Sagrada Familia, einer Kathedrale in Barcelona.

Kreditkarte:
Auf dem Magnetstreifen liegen die Kundeninformationen verschlüsselt vor.

Belastungs-Elektrokardiogramm:
Körperrhythmen werden mit einem Rechenprogramm analysiert und auf Abweichungen vom normalen Spektrum untersucht.

Strich-Code:
Das Balkenmuster entspricht einer Folge von 0 und 1 - einem binären Code - der vom Scanner in den Computer eingespeist wird und dort in die Produktinformation übersetzt wird.

Handy:
Damit möglichst viele Menschen gleichzeitig auf den zugelassenen Frequenzbändern telefonieren können, wird deren Nutzung mit ausgefeilten mathematischen Verfahren optimiert.


Rh
p
q
Hb
MM-FX500
Built-in Encoder
MP3
Bremen
Friedrichshafen
Brüssel
Dortmund
Glasgow
Dresden
Hamburg
Dublin
St. Petersburg
Oslo
Stockholm
Moskau
London
Hamburg
Berlin
Warschau
Paris
Frankfurt
München
Wien
Budapest
Bordeaux
Mailand
Varna
Madrid
Barcelona
Rom
Dubrovnik
Istanbul
Malaga
Palermo
Athen
Algier
Tunis
PZN -3529540

# Domino im RiskLab

*Abhängigkeiten dürfen nicht vernachlässigt werden, sagt RiskLab-Forschungsdirektor Uwe Schmock*

Versicherungen und Banken leben vom Risiko. Sie versuchen abzuschätzen, mit welcher Wahrscheinlichkeit verschiedene Entwicklungen eintreten und kalkulieren Verluste mit ein. Doch komplexe Zusammenhänge sind nur schwer adäquat zu modellieren: Eine Branche kann in ihrem Niedergang viele andere mit sich reißen, und ähnliche Effekte gibt es in der Versicherungswelt, wenn Erdbeben oder Naturkatastrophen gleichzeitig in mehreren Ländern zu großen Versicherungsschäden führen. Solche Dominoeffekte können katastrophale Verluste verursachen, mit denen vorher niemand gerechnet hat. Am RiskLab entwickeln zwölf Mathematiker und Mathematikerinnen neue mathematische Werkzeuge, um diese abhängigen und eventuell extremen Risiken besser in den Griff zu bekommen. Das RiskLab wird von der ETH Zürich gemeinsam mit den beiden Schweizer Großbanken und der Swiss Re finanziell getragen.

Selbst gut abgesicherte Anlagen wie ein Portefeuille aus kleinen Hypotheken für Eigenheime können von makroökonomischen Entwicklungen mitgerissen werden, sagt der Forschungsdirektor Dr. Uwe Schmock. Denn wenn beispielsweise Arbeitslosigkeit und Hypothekenzinsen steigen, können manche Häuslebauer ihre Raten nicht mehr zahlen. Gleichzeitig aber sinken die Verkaufspreise der Immobilien, weil es an Käufern mangelt. Klassische Modelle neigen dazu, diese Effekte systematisch zu unterschätzen. "In unseren verfeinerten Modellen führen wir Risiken zusammen und setzen sie mit makroökonomischen Daten wie dem Zinsniveau oder der Arbeitslosigkeit in Beziehung", erklärt Uwe Schmock.

Ein anderes Forschungsthema sind Verfahren, mit denen sich die Wertentwicklung von Finanzportefeuilles abschätzen lässt. Kommerzielle Verfahren bieten Prognosen bis zu 14 Tagen, doch gebraucht werden zusätzlich langfristige Vorhersagen für ein ganzes Jahr. Das ist auch deshalb extrem schwierig, weil die Zusammensetzung solcher Portefeuilles ständig der veränderten Marktsituation angepasst wird und somit Rückkopplungseffekte auftreten. Die Mathematiker vom RiskLab können allerdings auf große Datenmengen der Finanzinstitute zurückgreifen, um sie nach vielen Gesichtspunkten zu analysieren. So lässt sich feststellen, welche Modelle im Rückblick die besten Ergebnisse geliefert hätten und wie man sie in Zukunft verbessern kann. "Ein Roulettespiel, bei dem die exakte Zahl nicht vorhergesagt werden kann, wird das Finanzgeschäft auch in Zukunft bleiben", meint Uwe Schmock, "aber man möchte wenigstens wissen, wie die Chancen verteilt sind. Unser Ziel ist es, sicherzustellen, dass nicht völlig unbeabsichtigt Russisches Roulette gespielt wird."

http://www.risklab.ch


15
25
3
35
12
28
7
29
27
13
36

# Im Schwarzen Loch

*Tom Ilmanen schaut*
*hinter den Vorhang der kosmischen Zensur*

Schwarze Löcher zählen zu den rätselhaftesten Objekten des Universums. Dabei scheinen sie etwas ganz Gewöhnliches zu sein. Auch im Zentrum unserer Milchstraße vermuten Astrophysiker ein Schwarzes Loch von etwa einer Million Sonnenmassen. Doch wie es im Inneren eines Schwarzen Lochs aussieht, darüber lässt sich nur spekulieren, da sich das Zentrum mit dem Schwarzen Loch umhüllt wie mit einer kosmischen Zensurbehörde. Diese Formulierung, die auf den britischen Mathematiker Roger Penrose zurückgeht, ist physikalisch sehr wohl begründet: Ab einem gewissen Abstand vom Zentrum des Schwarzen Lochs, dem sogenannten Ereignishorizont, ist das Gravitationsfeld so gewaltig, dass es selbst Licht verschluckt und keine Information mehr nach außen gelangt. Mathematisch gesehen ist die kosmische Zensur jedoch nur eine Hypothese, die allerdings nun durch Arbeiten von Professor Tom Ilmanen und Professor Gerhard Huisken wesentlich gestützt wurde.

Aus der Hypothese von Penrose folgt unter anderem auch eine Ungleichung, die etwas über die Oberfläche eines beliebigen Schwarzen Lochs aussagt: Sie darf höchstens so groß werden wie das Produkt aus verschiedenen astronomischen Konstanten und dem Quadrat der eingeschlossenen Masse. Diese Ungleichung gilt während der gesamten Geschichte eines Schwarzen Lochs. Anfangs können sich in einer kollabierenden Masse theoretisch sogar mehrere Schwarze Löcher bilden. Mit der Zeit saugen sie alle Materie in sich auf, verschmelzen zu einem vorübergehend unrunden Objekt und nehmen im Endstadium eine vollkommen kugelsymmetrische Oberfläche an. Dann erst ist die maximale Oberfläche erreicht, die die Penrose-Ungleichung erlaubt. Ein Schwarzes Loch von der Masse der Erde müßte danach eine Oberfläche von weniger als 9 Quadratzentimetern besitzen und würde nur so groß wie eine Walnuss sein.

Mathematisch werden Schwarze Löcher von den Gleichungen beschrieben, die Albert Einstein in seiner Theorie der Allgemeinen Relativität für den Zusammenhang zwischen Raum, Zeit und Materie aufstellte. Doch diese hochkomplizierten, nichtlinearen Gleichungen sind extrem schwer zu handhaben. "Vor allem weiß man nie im voraus, wie sich die Raum-Zeit geometrisch verhält und welche Gestalt sie annimmt", erklärt Ilmanen. Zusammen mit Huisken entwarf er eine Hilfskonstruktion aus künstlichen Flächen, welche zunächst auf der Oberfläche des Schwarzen Lochs liegen, sich dann ablösen und ins Unendliche entschweben. Dadurch gelang es ihnen, die Penrose-Ungleichung zu beweisen und so ein starkes Argument für die Hypothese der kosmischen Zensur zu finden.

Ins Herz eines Schwarzen Lochs ist der weltbekannte Kosmologe Demetrios Christodoulou vorgedrungen, der

Wenn der Fusionsreaktor im Innern eines großen Sterns ausgebrannt ist, kann der Stern dem Gravitationsdruck nicht mehr genug Widerstand entgegensetzen und kollabiert. Sterne mit mindestens dreifacher Sonnenmasse können zum Schwarzen Loch zusammenschnurren und zwar mit einer gefürchteten Singularität im Innern. Um das zu veranschaulichen, kann man an ein Gummituch denken (der Weltraum in zwei Dimensionen), auf dem ein schwerer Ball liegt. Wenn dieser Ball schrumpft, dabei aber sein Gewicht behält, würde er einen immer tieferen Trichter in das Gummituch graben, bis es womöglich reißt - die Masse hat sich abgeschnürt von der Raum-Zeit. Im Zentrum herrscht die pure Ewigkeit. Doch solche "nackten" Singularitäten scheint es im Universum nicht zu geben, das Zentrum des Schwarzen Lochs versteckt sich hinter einem Ereignishorizont, der wie ein Vorhang alles verbirgt, was dahinter geschieht. Nur noch mit Mathematik lassen sich Vermutungen auf ihre Schlüssigkeit hin abklopfen. Es war ein großer Erfolg, als Mathematiker beweisen konnten, dass die Masse im Innern eines Schwarzen Lochs nicht negativ werden kann, sondern positiv bleibt. Darauf baute Penrose seine berühmte Vermutung über die Größe und Form der Oberfläche eines Schwarzen Lochs auf.

vor kurzem einen Ruf an die ETH angenommen hat. Tief im Inneren eines Schwarzes Lochs verbirgt sich in der Regel eine Singularität im Gewebe der Raum-Zeit - eine pathologische Stelle, an der Gleichungen keine eindeutigen Lösungen haben müssen. Christodoulou hat mathematisch gezeigt, wie im Zentrum eines Schwarzen Lochs die Kette aus Ursache und Wirkung reißen kann, so dass die Kausalität, auf der unsere Wissenschaft aufbaut, nicht mehr gelten muss. Eine Ursache kann mehrere mögliche Konsequenzen haben, die "Wirklichkeit" verzweigt sich. Doch diese Mehrdeutigkeiten dringen nicht in die physikalisch erfassbare Welt vor, sie werden abgeschirmt durch die kosmische Zensur, betont Ilmanen.

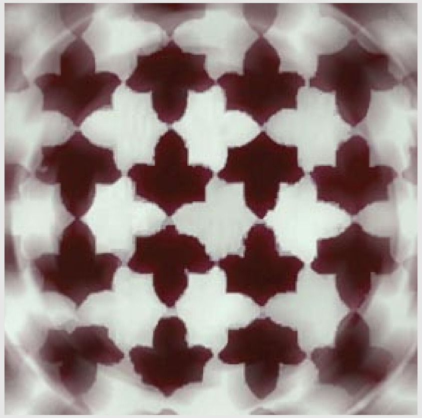
Auf intuitiven Vorstellungen über die Natur von Schwarzen Löchern haben Physiker schon lange weitere Spekulationen aufgebaut wie auf einem sicheren Fundament. Dass dieses Kartenhaus nicht zusammenstürzt, sondern in sich schlüssig ist, zeigen auch diese mathematischen Arbeiten.

# Tapetenmuster in N-Land

*Symmetrien faszinieren Brita Nucinkis*

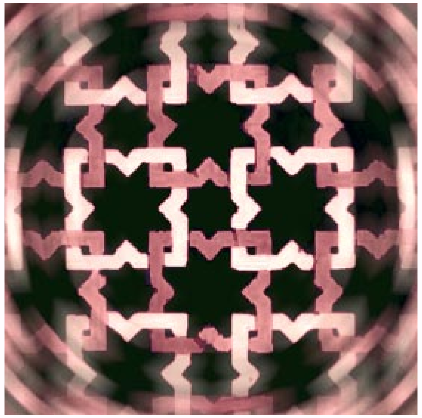
Die Alhambra in Granada ist eines der schönsten Denkmäler der maurischen Kultur, die im frühen Mittelalter in Spanien herrschte. Da der Koran gegenständliche Abbildungen verbietet, schmückten die Künstler die Wände mit geometrischen Mustern, die unter anderem auch eine mathematische Besonderheit haben: Denn alle siebzehn in der Ebene überhaupt möglichen Symmetrien sind an den Wänden der Alhambra vertreten. Das siebzehnte Muster blieb lange unentdeckt. Der Legende nach auf einem Türknauf verborgen, wurde es erst vor kurzem doch an einer Wand gefunden.

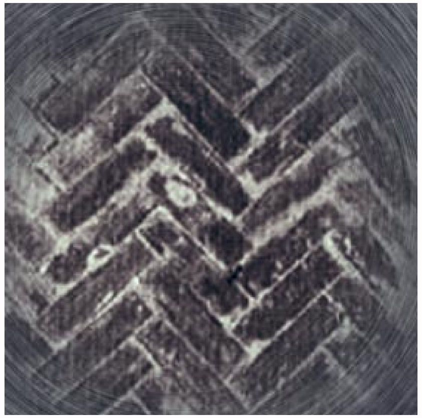
Die Professorin Brita Nucinkis zeigt die Tapetenmuster der Alhambra zum Beispiel bei den Mittelschülerinnentagen, zu denen die ETH jedes Jahr Schülerinnen einlädt, um sie für ein Mathematikstudium zu gewinnen. Eigentlich merkwürdig, dass es nur 17 wirklich unterschiedliche Muster gibt, ist oft die erste Reaktion. Denn natürlich lassen sich fast unendlich viele Motive für Kacheln, Parkett oder Tapeten erfinden, die ganz verschieden aussehen, aber doch auf derselben mathematischen Struktur beruhen. Um eine Wand regelmäßig und lückenlos zu überziehen, müssen die Muster auf Formen wie Dreieck, Viereck oder Sechseck basieren. Es ist dann sogar erstaunlich, dass sich mit dieser Einschränkung überhaupt 17 verschiedene Symmetrien finden lassen.



Brita Nucinkis erfindet keine weiteren Tapetenmuster, sondern arbeitet in höherdimensionalen Räumen. Hier kann sie die Symmetrien nicht mehr "sehen", sondern muß sie algebraisch erschließen - vorstellen kann sich auch eine Mathematikerin bestenfalls dreidimensionale Körper. In drei Dimensionen gibt es bereits 230 Kristallgruppen, in vier Dimensionen 4783, in fünf Dimensionen 222 018 und in sechs Dimensionen 28 927922 verschiedene Möglichkeiten für periodische Pflasterungen. Doch diese Zahlen, die erst vor kurzem mit Hilfe von Superrechnern ermittelt wurden, interessieren Nucinkis nur am Rande. "Ich finde es vor allem bemerkenswert, dass es auch in weit höheren Dimensionen immer nur endlich viele Pflasterungen gibt, auch wenn ihre Zahl rasant zunimmt." Sie sucht nach Drehungen, Spiegelungen, Verschiebungen oder anderen Operationen, die das geometrische Objekt unverändert lassen und betrachtet gleichzeitig, welche Punkte, Linien, Flächen oder Räume bei diesen Operationen festgehalten werden. Eine Drehung eines Dreiecks hält beispielsweise den Mittelpunkt fest, eine Spiegelung die Spiegelachse. Diese Bewegungen bilden Gruppen mit besonderen mathematischen Eigenschaften. "Wie man das Geometrische algebraisch beschreiben kann und umgekehrt aber auch aus algebraischen Formeln wieder einen geometrischen Inhalt bekommen kann, das beschäftigt mich", erklärt die Mathematikerin.

Wo aber landen ihre Studenten und Studentinnen, die nach einer Zeit im Land der N-Dimensionen wieder in der gewöhnlichen Raum-Zeit Fuß fassen müssen? "Die meisten finden sofort eine interessante Aufgabe in der Wirtschaft", sagt Nucinkis. Gefragt ist da vor allem ihre Kunst, eine Frage abstrakt zu betrachten, und den Wald trotz aller einzelnen Bäume deutlich zu sehen.





# Zuviel Ehrfurcht, zu wenig Vergnügen

*Wie läßt sich mathematisches Denken lehren, fragt Urs Kirchgraber*

Amateure gibt es in den meisten Künsten: Menschen, die Freude am Malen oder Musizieren haben, ohne jedoch ein professionelles Niveau anzustreben. Merkwürdig eigentlich, dass bei der Mathematik die meisten gleich abwinken. Ein Gespräch mit dem Mathematikdidaktiker Professor Urs Kirchgraber.

*Frage: Viele Menschen sagen, dass sie Mathematik nicht verstehen. Gibt es zuwenig Mathematikunterricht in der Schule?*

Kirchgraber: Die Schule ist eigentlich ein fantastisches Gefäß. Ein Gymnasiast, eine Gymnasiastin haben ja in den sechs Jahren etwa 1000 Mathematikstunden erlebt. Doch am Ende bleibt bei vielen nur eine Hochachtung vor dem Fach, die nicht selten mehr in Angst als auf Verständnis gegründet ist. Hans Magnus Enzensberger ist ein herausragendes Gegenbeispiel. Das ist ein Liebhaber der Mathematik, ein Dilettant im besten Sinn, der Freude daran hat und Verständnis, ohne dass er ein Experte ist. Eigentlich könnten viele Leute Dilettanten in diesem Sinne sein. Und mit den vielen Stunden ist es doch erstaunlich, dass wir dieses Ziel auch nicht andeutungsweise erreichen.

*Frage: Der Mathematikunterricht scheint einigen Kindern den Spaß am Überlegen sogar geradezu auszutreiben, anstatt ihnen geistiges Werkzeug mit auf den Weg zu geben. Was läuft schief im Mathematikunterricht?*

Kirchgraber: Wenn es so leicht wäre, hätte man den Königsweg sicher schon gefunden. Man muss sich zum Beispiel auf Mathematik erst einmal einlassen, bevor man zu verstehen beginnt, was daran so besonders interessant ist. Nur, was soll einen veranlassen, sich einzulassen? Und was hilft einem, es auszuhalten, wenn man ein Problem nicht lösen kann? Mathematisches Nachdenken kommt früher oder später immer an den Punkt, wo man absolut nicht weiter weiß: Rien ne va plus! Dort wird es zwar so richtig spannend, aber man muss die Ungewissheit und manchmal auch die Frustration ertragen können. Das Glücksgefühl über eine endlich gewonnene Einsicht aber ist unvergleichlich und lohnt alle Plackerei. Nur, wer dieses Gefühl noch nicht erlebt hat, wie soll der bereit sein, sich auf den Weg zu machen?

*Frage: Wie kann ein Schüler oder eine Schülerin dieses Hochgefühl erleben, etwas wirklich Mathematisches verstanden zu haben?*

Kirchgraber: Zum Beispiel mit dem Satz des Pythagoras. Das ist ein tiefliegender Satz, man kann ihn nicht "sehen"! Andere Sätze erschließen sich viel leichter, man kann sie quasi "experimentell" entdecken. Zum Beispiel der Satz von den drei Höhen im Dreieck, die - immerhin bemerkenswert! - alle durch einen Punkt gehen. Aber dass bei einem rechtwinkligen Dreieck genau diese berühmte Relation zwischen den Quadraten über den Seiten besteht, das entzieht sich dem direkten Augenschein. Der Witz der Mathematik ist natürlich, dass solche Sätze nicht mit drei oder vier Experimenten belegt werden, sondern dass man einen Beweis führen muss. Durch Überlegen! Es gibt sehr viele verschiedene Beweise des Satzes von Pythagoras. Keiner ist offensichtlich, jeder ist ein kleines Wunder. Hat man einmal einen Beweis, dann weiß man mit "absoluter" Sicherheit, dass es so ist und nicht anders, für alle rechtwinkligen Dreiecke und für alle Zeiten.... Und vor allem: Man versteht, warum es so ist!

*Frage: Welche Aufgaben regen Schüler zum Denken an?*

Kirchgraber: Gut sind Aufgaben mit einer Rampe. Solche Aufgaben haben einen einfachen Einstieg, beinhalten aber auch weitergehende Fragen. Denn eines wissen wir: Freude am Lernen haben die meisten Schüler nur, wenn sie dabei auch Erfolge erleben. Typische Mathematikaufgaben sind dagegen mehr wie eine Stufe aufgebaut, sie haben eine meist nicht einmal so große Hürde, die man aber nehmen muss: Auf eine Frage wird eine ganz bestimmte Antwort erwartet. Da bleibt nicht viel Spielraum, und leicht entsteht Frustration.

*Frage: Haben Sie ein Beispiel für eine offene Frage?*

Kirchgraber: Ja, hier ist ein Beispiel, das übrigens aus japanischen Unterrichtsmaterialien stammt: Stellen Sie sich eine quaderförmige Vase vor, die bis zu einer gewissen Höhe mit rotgefärbtem Wasser gefüllt ist. Wenn Sie diese Vase etwas kippen, vielleicht zuerst entlang einer Kante, aber in einem zweiten Schritt auch über Eck, verformen sich die roten Rechtecke an den Außenwänden und auch die Wasseroberfläche. Die Aufgabe ist nun, Eigenschaften und Größen zu entdecken, die sich nicht ändern, wenn man die Vase mehr oder weniger neigt.

*Frage: Können Laien und Schüler auch in aktuelle Gebiete der Mathematik hineinschauen und verstehen, worum es dabei geht?*

Kirchgraber: Oft natürlich nicht. Aber man kann immer wieder einzelne Themen und Wege finden. Ich bin zum Beispiel auf die Computertomografie gestoßen und habe gemerkt, dass man das in der Oberstufe machen kann.

*Frage: Die Computertomografie ist ein Röntgenverfahren, bei dem ein Computer aus der Abschwächung der Röntgenstrahlen die Dichteverteilung im Körper berechnet. Wo liegt das mathematische Problem?*

Kirchgraber: Das ist ein so genanntes schlecht gestelltes inverses Problem. Man hat eine Gleichung vom Typ: $Kx=y$. Und $x$ und $y$ sind nicht einfach Zahlen, sondern sie parametrisieren, sagen wir, Kurven. Und $K$ ist eine gewisse Vorschrift, die festlegt, wie man ausgehend von einer Ausgangskurve $x$ eine neue Kurve $y$ - man sagt: die Bildkurve von $x$ - erhält. Die Vorschrift $K$ hat bei einem schlecht gestellten inversen Problem die besondere Eigenschaft, dass sie glättend wirkt. Das heisst, sie hat die Tendenz "zittrige" Kurven in "glatte" zu verwandeln. Das ist prima, wenn man die Kurve $x$ kennt und daraus $y$ berechnen will. Aber es ist fatal, wenn man nur $y$ durch eine Messung näherungsweise bestimmen kann und daraus $x$ berechnen soll. Dann rächt sich das Glättungsbestreben von $K$! Die Computertomografie ist eine solche Aufgabe, $y$ steht hier für die Stärke der Röntgenstrahlung, die durch das unterschiedlich dichte Gewebe abgeschwächt wurde. Daraus muss der Computer dann die Dichteverteilung $x$ im Körper berechnen.

Mit diesem Problem kann man in die Schule! Schon Neuntklässler können ein einfaches Modell der Computertomografie verstehen, und sehen dabei, was ein schlechtgestelltes Problem ist. Und nebenbei erfahren sie auch, dass ein medizinisches High-Tech-Verfahren wie die Computertomografie ohne Mathematik schlicht und einfach nicht möglich wäre. Ein Umstand, der leider oft übersehen wird.

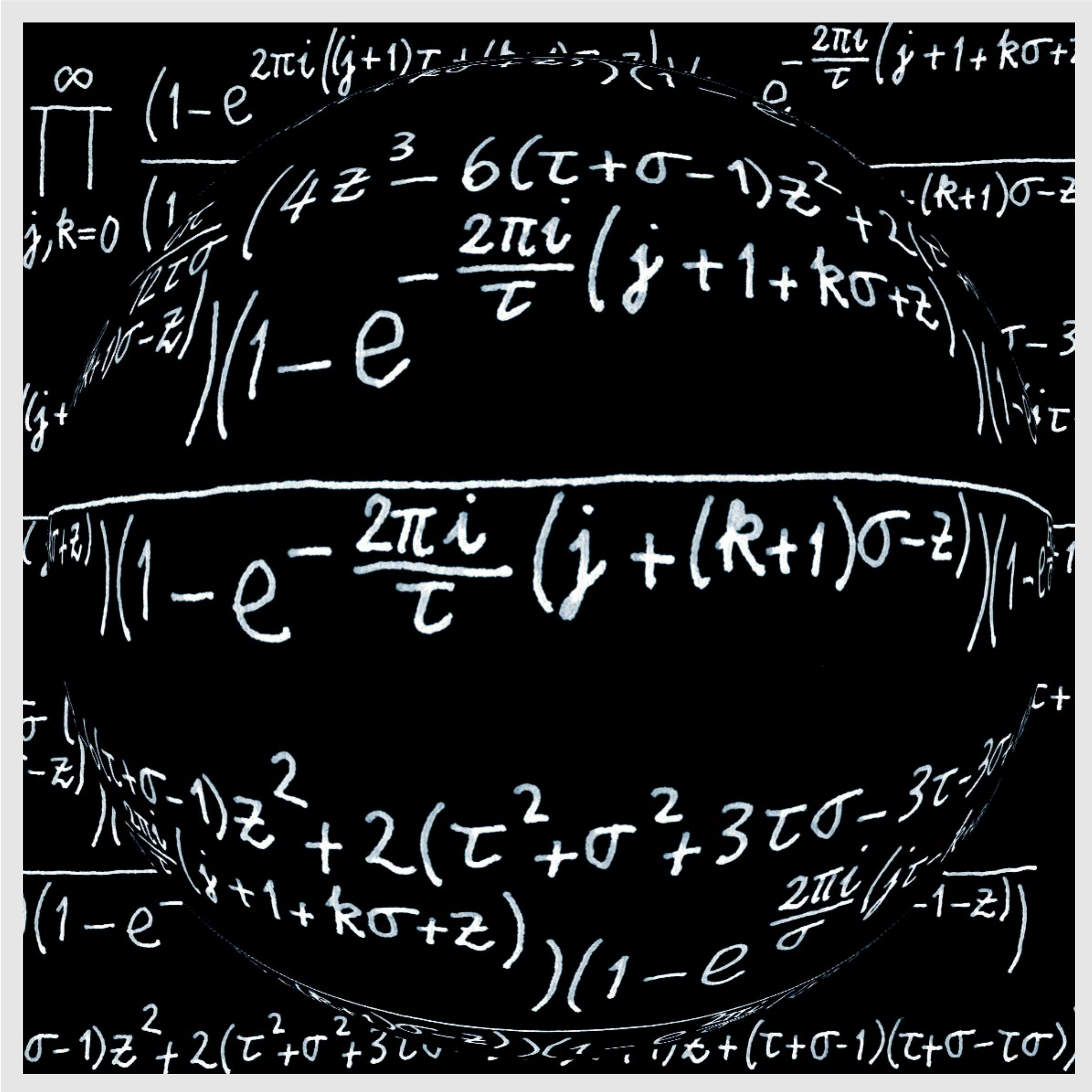
Das Gespräch in voller Länge finden Sie unter http://www.math.ethz.ch

Buchtipp: "Der Zahlenteufel - Ein Kopfkissenbuch für alle, die Angst vor der Mathematik haben", Hans Magnus Enzensberger, 1997, Carl Hanser Verlag

Anregende Internetangebote:

http://www.math.de
Viele Ideen für Lehrer und Lehrerinnen und ein Link zur mathematikdidaktischen Ausstellung von Alfred Beutelsbacher.

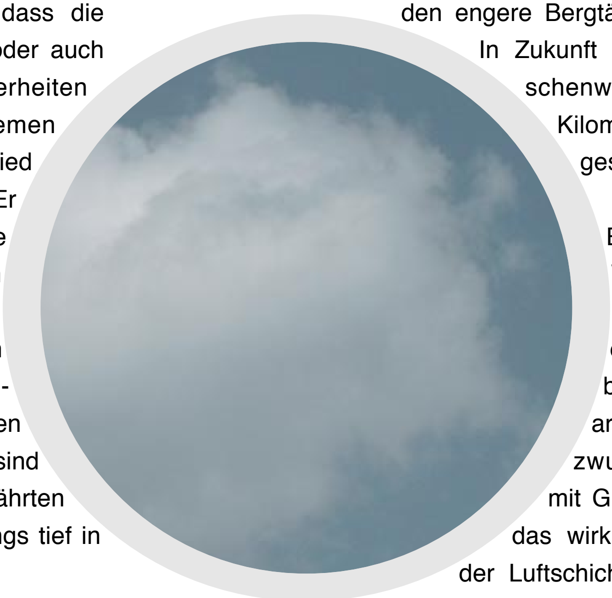
http://www.mathkang.org
Originelle und schöne Denkaufgaben für Schülerinnen und Schüler aus dem Wettbewerb "Känguru" (in französischer Sprache)


$(4z^3 - 6(\tau+\sigma-1)z^2$
$(1-e^{-\frac{2\pi i}{\tau}(j+1+k\sigma+z)})$
$(1-e^{-\frac{2\pi i}{\tau}(j+(k+1)\sigma-z)})$

# Reale Probleme

*Das Wetter entzieht sich der exakten Berechnung, weiß Rolf Jeltsch*

Viele alltägliche Phänomene sind nur durch Näherungsverfahren einigermaßen berechenbar - eine exakte Lösung gibt es nicht. Und selbst eine von Physikern immer wieder in Aussicht gestellte "Weltformel" würde nichts daran ändern, dass die Vorhersage von Erdbeben, Wirbelstürmen oder auch nur Regenschauern mit großen Unsicherheiten behaftet ist. Mit solchen realen Problemen beschäftigt sich Professor Rolf Jeltsch, Mitglied des Seminars für Angewandte Mathematik. Er und seine Kollegen entwickeln nicht nur neue numerische Verfahren für Anwendungen im Maschinenbau bis zur Klimaforschung, sondern sie arbeiten auch an Beweisen in diesem Zusammenhang. Sie können zum Beispiel zeigen, welche Annahmen und Randbedingungen in einem numerischen Verfahren notwendig sind und welche mit Sicherheit auf falsche Fährten führen. Dafür tauchen die Numeriker allerdings tief in die reine Mathematik ein.



Rolf Jeltsch arbeitet unter anderem auch an der numerischen Lösung von Wettermodellen. Seit über hundert Jahren sind die Differentialgleichungen bekannt, die Strömungen und Turbulenzen in Gasen oder Flüssigkeiten beschreiben und auch die Diffusion von Wärme und Wassergehalt ist physikalisch längst kein Rätsel mehr. Das Wetter müsste daher eigentlich berechenbar sein, doch bekanntlich ist dies nicht der Fall. "Im Prinzip haben wir bei der Wettervorhersage immer nur dann Fortschritte gemacht, wenn die Rechner schneller geworden sind", sagt Jeltsch. Früher musste man sich aus diesem Grund mit sehr groben Näherungen begnügen. Heute beruht die Wettervorhersage bereits auf etwas realistischeren Modellen. In der Schweiz liegt die Maschenweite des berechneten Wetters bei etwa zehn Kilometern, doch dadurch werden engere Bergtäler übersehen. In Zukunft soll diese Maschenweite auf zwei Kilometer heruntergesetzt werden.

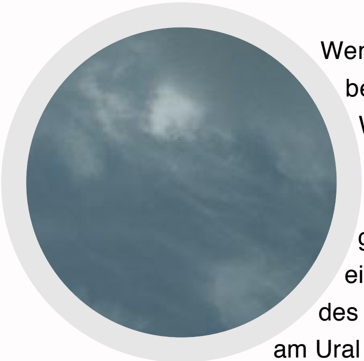
Eine fehlerlose Wetterberechnung bleibt jedoch unerreichbar. Zum einen arbeitet man gezwungenermaßen mit Gleichungen, die das wirkliche Verhalten der Luftschichten nur näherungsweise beschreiben. Zum anderen müsste auch das imaginäre Netz über der Landschaft unendlich fein sein. Unendlich viele Messstationen müssten einen unendlich schnellen Rechner mit exakten Information ohne den unvermeidlichen Fehlerbalken über Lage und Geschwindigkeit eines jeden einzelnen Luftmoleküls zu jeder Zeit versorgen. Diese Aufgabe könnte allenfalls der allwissende Dämon erfüllen, den sich der Mathematiker Pierre Simon Laplace (1749 - 1827) erdacht hat. In der Realität liefert zwar eine wachsende Anzahl von Wetterstationen Daten aus der Vergangenheit, aber erstens sind diese Messwerte keineswegs fehlerfrei und zweitens sind sie nicht deckungsgleich mit den präzisen Rand- und Anfangsbedingungen, welche in die Gleichungssysteme einfließen müssen. Die Informationen werden schließlich nicht an den Gitterpunkten des Modellnetzes gewonnen, das im Rechner die Erde gleichmäßig überzieht, sondern nur dort, wo es tatsächlich Wetterstationen gibt. "Man kriegt die Daten außerdem zu verschiedenen Zeiten und muss daraus erst einen Anfangszustand künstlich herstellen", erklärt Jeltsch. Diese Aufgabe kostet bereits 90 Prozent der Rechenzeit und ist extrem heikel. Für eine realistische Berechnung ist es wichtig, dass räumlich getrennte Orte sich nicht zeitgleich beeinflussen, da die Austauschprozesse in der Atmosphäre niemals schneller als mit Schallgeschwindigkeit ablaufen.

Um das Wetter einer Region im Voraus zu berechnen, wird die Atmosphäre in einzelne Volumenzellen aufgeteilt, in denen man Parameter wie Temperatur, Druck und Luftfeuchtigkeit zu bestimmten Zeiten ermittelt. Dieser Satz von Parametern ändert sich in jedem Zeitschritt. Ihre Entwicklung mit der Zeit wird von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen beschrieben, die sich beispielsweise an die Navier-Stokes-Gleichung anlehnen, die auch in der Strömungslehre eine große Rolle spielt.

Die meisten numerischen Verfahren greifen nur auf die Information des letzten berechneten Zeitpunkts zurück, um den neuen Zustand zu kalkulieren. Für vereinfachte Gleichungen zeigten Mathematiker bereits, dass numerische Lösungen umso schneller konvergieren, je mehr Datenpunkte aus dem vorhergehenden Zeitpunkt in die Berechnung einfließen. Jeltsch konnte aber erstmals die optimale Lage der verwendeten Datenpunkte mathematisch präzise angeben und dadurch beweisen, dass es keine bessere Position gibt, die die Rechenleistung steigern würde.

Doch im Prinzip hängt die Entwicklung des Wetters natürlich nicht nur vom Zustand eine Stunde zuvor ab, sondern es könnte sinnvoll sein, Informationen auch noch aus der entfernteren Vergangenheit in die Berechnung mit einzubeziehen. Wenn beispielsweise die Bodentemperatur um 6 Uhr früh bei 10 Grad Celsius liegt, um 7 Uhr bei 20 Grad und um 8 Uhr schon auf 30 Grad gestiegen ist, zeigt dieser dramatische Verlauf deutlich mehr als nur die letzte Temperaturmessung. Beweise für die optimale Lage der Datenpunkte bei Verfahren, die mehrere Zeitschritte benutzen, werden allerdings so schwierig, dass Jeltsch bislang kein Durchbruch gelungen ist. Schon der Beweis für den einfachen Fall baut auf Sätzen aus der Funktionentheorie auf, einem völlig anderen Gebiet der Mathematik. Bei zwei Zeitschritten fächert sich das Problem zu abstrakten blattartigen Gebilden in einem imaginären Raum auf, den so genannten Riemannschen Flächen.

Um genauere und längerfristige Wettervorhersagen zu erhalten, müßte man das globale Wetter berechnen. Dabei wird die Datenmenge jedoch so groß, dass heutige Rechenverfahren noch nicht in der Lage sind, die lokalen Wetterfronten aufzuzeigen. Erst mit den neuesten Rechnern lassen sich die sehr viel präziseren mathematischen Verfahren aus der Fluiddynamik einsetzen, die scharfe Fronten verfolgen können (Shock capturing schemes). Daran arbeitet zur Zeit ein Wissenschaftler bei Rolf Jeltsch.



Wenigstens löst sich bei der globalen Wetterberechnung das Problem mit den Randbedingungen auf, denn ein weltumspannendes Netz endet nicht am Ural oder an der amerikanischen Küste wie die regionalen Modelle. In der Höhe gibt es allerdings weiterhin künstlich festgesetzte "Ränder", denn der Einfluss von höheren Schichten der Atmosphäre wird aus Gründen der rechnerischen Ökonomie vernachlässigt. "Nur indem man sich die Probleme in einer künstlich einfachen Welt vorstellt, lassen sich Beweise für unsere Methoden finden", sagt Jeltsch. "Die Wirklichkeit ist jedoch so komplex, dass wir nichts mehr beweisen können."

# Die Zauberformel gibt es nicht

*Der Finanzmathematiker Paul Embrechts warnt vor zu einfachen Modellen für den Aktienmarkt*

"Die Finanzwelt ist die einzige Welt, wo die Leute noch immer glauben, dass sich Eisen in Gold verwandeln lässt", meint Professor Paul Embrechts. Sogar Nobelpreisträger können offenbar grandios scheitern: Im Sommer 1998 stürzte der Wert des Long-Term-Capital-Management-Hedge Funds (LTCM) ins Bodenlose ab und löste damit beinahe eine weltweite Wirtschaftskrise aus. Mit beteiligt an der Konzeption von LTCM waren Myron Scholes und Robert Merton, die 1997 für ihre mathematische Theorie zur Bewertung von Finanzinstrumenten mit dem Wirtschaftsnobelpreis ausgezeichnet wurden. Selbst mit den ausgefeiltesten Strategien gibt es keinen Gewinn ohne Risiko. Doch mit den Standardmodellen werden Risiken systematisch unterschätzt, kritisiert der Finanzmathematiker.

Das klassische Modell für den Börsenkurs basiert auf einer Formel aus der Molekülphysik. Sie beschreibt die Bewegung eines Moleküls durch die völlig ungerichteten Stöße, die Gasteilchen auf es ausüben. Der Aktienkurs wird - wie das Molekül von den Gasteilchen - von den Transaktionen der einzelnen Akteure bewegt. Ein Kaufangebot übt einen kleinen Druck auf den Kurs aus, so dass er sich nach oben bewegt. Bei einem Verkauf gibt es eine kleine Bewegung nach unten. Dieser Prozess läuft erratisch ab und kann relativ gut durch die Brownsche Bewegung beschrieben werden, solange es vorwiegend kleine Transaktionen sind, die den Gang der Börse bestimmen.

In Wirklichkeit gibt es zunehmend große Händler, die hebelartig den gesamten Markt bewegen können. Und auch die einzelnen kleinen Akteure verhalten sich nicht wie Gasteilchen unabhängig voneinander, sondern beobachten sich gegenseitig. Es gibt Dominoeffekte, Herdeneffekte, Überreaktionen und immer wieder bilden sich auch so genannte Blasen, überbewertete Bereiche wie im Fall der Internet-Unternehmen in den letzten Jahren, die dann plötzlich platzen und das Vermögen vieler Anleger vernichten. Noch immer wird in vielen Bereichen die Brownsche Bewegung als Standardmodell verwendet, bestenfalls mit ein paar empirischen Korrekturfaktoren. Wie Embrechts lakonisch feststellt: "Wenn es einmal programmiert ist, dann ist es programmiert." Aber ohne neue mathematische Konzepte geht es nicht mehr im Finanzbereich. Dies haben Ereignisse wie der Absturz von LTCM im Sommer 1998, aber auch schon der Konkurs der Barings-Bank 1995 deutlich gezeigt. In beiden Fällen glaubten die Akteure, den Markt voll im Griff zu haben, sie arbeiteten mit einer vermeintlichen "Zauberformel" und machten zunächst große Gewinne. Ein unvorhergesehenes Ereignis löste dann die Katastrophe aus - im Fall von LTCM hatte Russland plötzlich die Zahlung seiner Auslandsschulden ausgesetzt, ein "Null-Szenario", mit dem die Wirtschaftswis-senschaftler bei LTCM nicht gerechnet hatten.

Embrechts beschäftigt sich mit der Möglichkeit solcher Katastrophen im Finanzbereich und ihrer Absicherung. In seinem preisgekrönten Buch "Modelling extremal Events" hinterfragt er das konventionelle Maß für Risiko und stellt Ansätze zu einer robusteren Risikoberechnung vor, die auch noch extreme Entwicklungen mit einschließen können. "Sobald etwas in einem Markt schiefgeht, wird es mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auch andere Märkte beeinflussen. Doch wie kann ich extreme Bewegungen und ihre Abhängigkeiten modellieren?", fragt er.

Dass die Modelle stimmen, wird immer wichtiger, denn organisierte Märkte basieren zunehmend auf computergesteuerten Tradingsystemen und der menschliche Einfluss verschwindet. "Da möchte ich schon wissen, wie diese Tradingsysteme programmiert sind", sagt Embrechts, "denn wenn sie zum Beispiel das Value-at-Risk-Konzept falsch anwenden, dann wird es schiefgehen."

Das Value-at-Risk-Konzept ist ein einfaches Maß, um ein Risiko quantitativ zu bestimmen. Ein Value-at-Risk von 20 Millionen CHF bei 99 Prozent würde bedeuten, dass man mit nur einem Prozent Wahrscheinlichkeit einen Verlust macht, der mehr als 20 Millionen CHF beträgt. Doch würde man diese einfache Schranke weltweit für die Verwaltung von Portfolios programmieren, dann müsste das ganze System kollabieren, erklärt Embrechts. Denn ein Value-at-Risk sagt nicht, wie groß der Verlust über die Schwelle von 20 Millionen CHF hinaus ist, ob es sich nur um einen Rappen handelt oder um 100 Millionen CHF. "Das nicht zu berücksichtigen, kann zu sehr gefährlichen Entscheidungen führen", sagt Embrechts. Doch der Trend geht eindeutig dahin, Menschen durch Programme zu ersetzen. Als Embrechts vor fünf Jahren am Chicago Board of Trade (CBOT) zu Gast war, fuchtelten im Börsensaal noch die aufgeregten Händler mit ihren Händen in der Luft und mehreren Telefonen herum, sie hatten Blickkontakt zueinander und entschieden oft nach Gespür. "Heute ist das fast vorbei. Damals konnten sich selbst die Topleute dort nicht vorstellen, dass diese Computerisierung auch an ihrem CBOT funktionieren würde. Was sind die Konsequenzen? Das werden wir sehen."

Das Gespräch in voller Länge finden Sie unter http://www.math.ethz.ch

# Transzendente Welten

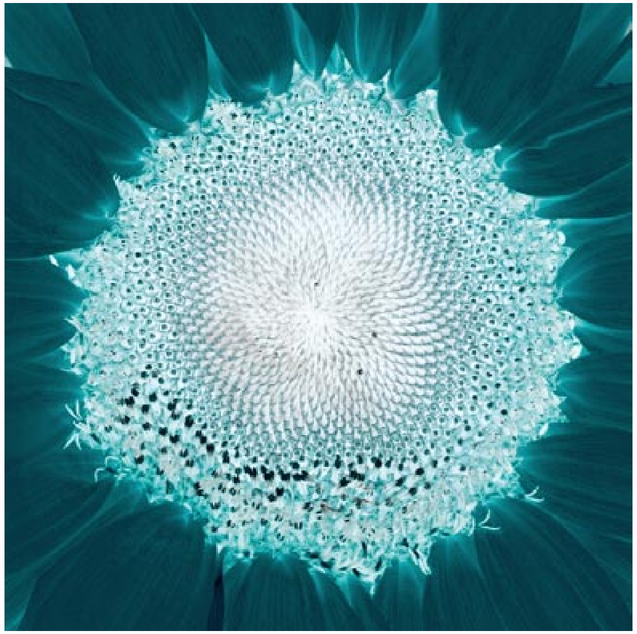
*Gisbert Wüstholz erforscht die Natur der Zahl*

Ein Spielzeugauto verschwindet hinter einem Schirm und gleich darauf fährt der Experimentator ein zweites Auto hinterher. Doch als der Schirm entfernt wird, steht nur noch ein Auto da. Der Beobachter, ein vier Monate alter Säugling, ist verblüfft und nuckelt heftiger an seinem Schnuller: Er hatte zwei Autos erwartet. Rechnen mit kleinen Zahlen scheint eine angeborene Fähigkeit zu sein. Auch von Schimpansen weiß man, dass sie blitzschnell das Zahlenverhältnis zwischen dem eigenen und dem gegnerischen Clan ermitteln und so entscheiden, ob sie besser fliehen oder angreifen.

Der Begriff der Zahl ist vielleicht mit den ersten Lebewesen zur Welt gekommen. Und dennoch geben die Zahlen und ihre Eigenschaften noch immer Rätsel auf. Schwere Rätsel, von denen manche trügerisch einfach klingen und Mathematiker seit Jahrhunderten in Atem halten. "Und wenn man ein Problem gelöst hat, dann tun sich zehn andere auf", sagt der Zahlentheoretiker Professor Gisbert Wüstholz.

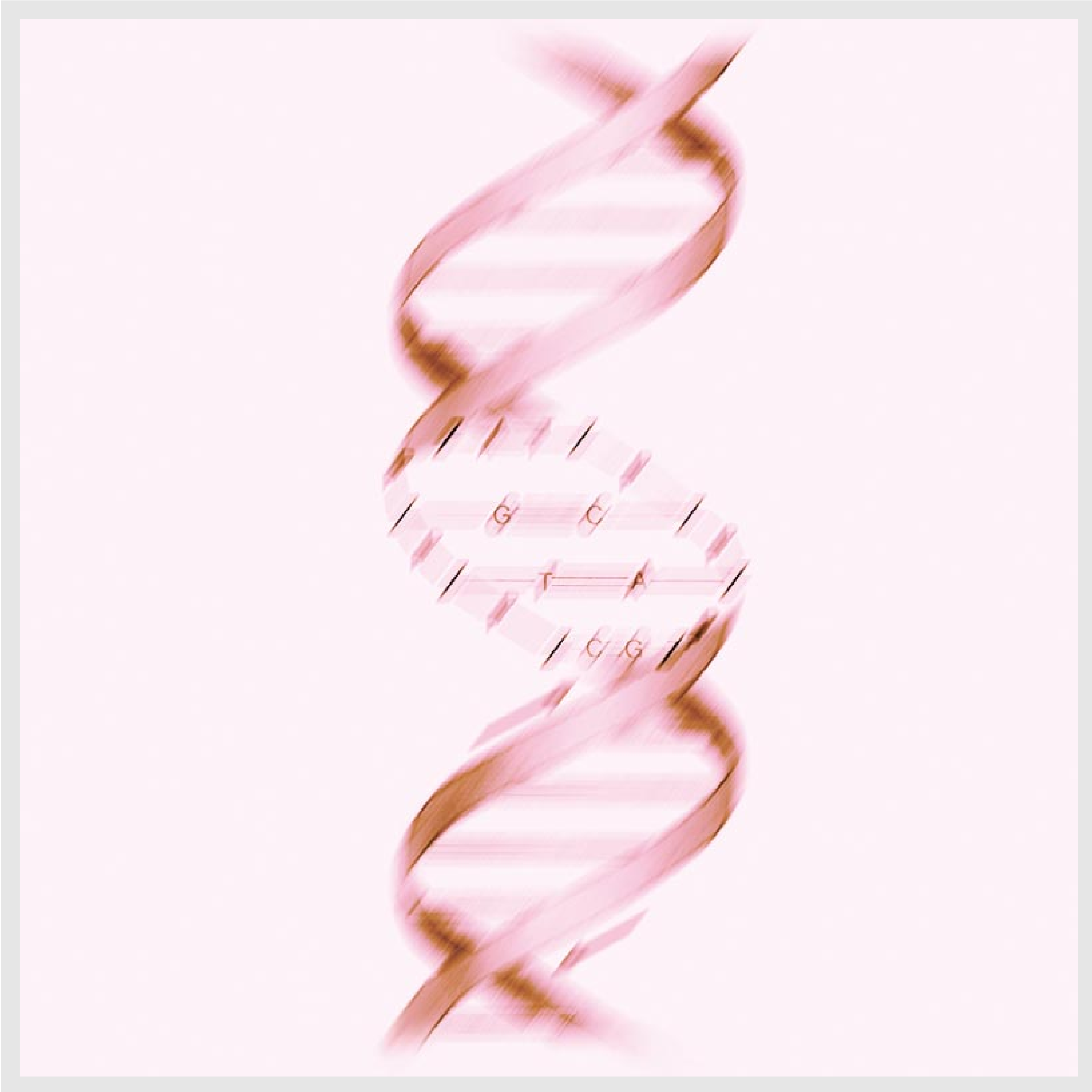
Die Zahlentheorie gilt als die reinste der mathematischen Disziplinen. Aus der fast weltfremd anmutenden Kunst sind Ableger wie die Kryptografie und schnelle Computeralgorithmen gesprossen, deren wirtschaftlicher Wert heute sehr beträchtlich ist, wie Wüstholz betont. Doch die Zahlentheoretiker selbst treibt tatsächlich weniger die Suche nach einem besseren Kodierungsverfahren für den Mobilfunk, als vielmehr der Wunsch nach Einsicht. Zahlen ordnen die Welt, sie finden sich überall in der Natur: in den Spiralen einer Nautilus-Muschel, dem Fruchtstand einer Sonnenblume oder den Nachkommen eines Kaninchenpaars.

Pythagoras entwarf im sechsten Jahrhundert vor Christus ein mystisches Weltbild, das von Zahlen und ihren Verhältnissen geprägt war. Jede Zahl war mit Bedeutung beladen und die Umlaufbahnen der Planeten verhielten sich wie die Saiten einer Lyra zueinander, so dass das Universum von himmlischen Sphärenklängen durchströmt wurde. In dieser Welt hatten nur die "schönen" Zahlen einen Platz: die natürlichen, ganzen Zahlen und die Brüche. Als einer seiner Schüler entdeckte, dass die Diagonale eines Quadrats der Seitenlänge 1 nicht als Verhältnis zweier ganzer Zahlen darstellbar ist, brach der Orden der Pythagoräer auseinander. Platon regte die Kunde von der Existenz solcher irrationalen Zahlen so auf, dass er schrieb: "Es kam mir vor, als wäre das nicht bei Menschen möglich, sondern nur etwa bei Schweinevieh." (Die Gesetze, 819 d). Doch während sich manche irrationalen Zahlen wie die Quadratwurzeln auf die klassische Weise mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen, gibt es auch Zahlen, bei denen dies nicht mehr möglich ist. Zum Beispiel die Kreiszahl $\pi$. Zwei Jahrtausende lang mühten sich die Mathematiker vergeblich um die Quadratur des Kreises, bis Ferdinand Lindemann 1883 bewies, dass $\pi$ eine so genannte transzendente Zahl ist. Er zeigte, dass es keine endliche algebraische Gleichung mit ganzzahligen Koeffizienten geben kann, die durch die Kreiszahl $\pi$ gelöst wird. Allerdings fanden Mathematiker viele verschiedene unendliche Reihen, die gegen $\pi$ konvergieren. $\pi$ und e, die Basis des natürlichen Logarithmus sind die berühmtesten transzendenten Zahlen, und beide spielen in der Natur eine große Rolle. Gisbert Wüstholz hat sich zu Beginn seiner Laufbahn den Eigenschaften dieser transzendenten Zahlen gewidmet und ist dadurch auf die diophantischen Gleichungen und Approximationen ge-stoßen: "Die diophantischen Approximationen sind eng mit diesen transzendenten Zahlen verknüpft", sagt er.



Das prominenteste Beispiel für eine diophantische Glei-chung ist die Vermutung, die Fermat im 17. Jahrhundert an den Rand einer Schrift gekritzelt hatte: Eine Sum-me aus n-ten Potenzen kann keine n-te Potenz sein, sobald n größer oder gleich 3 ist. Natürlich gilt diese Behauptung nur für ganze Zah-len und auch nur dann, wenn keine der Potenzen gleich Null ist. Drei Jahrhunderte bissen sich die begabtesten Mathematiker die Zähne an der Fermatschen Vermutung aus, die bereits ein Schulkind erfassen kann. Erst 1995 konnte Andrew Wiles nach zehnjähriger konzentrierter Forschung diese Vermutung beweisen - in einem 200-seitigen Artikel unter Zuhilfenahme der modernsten Mathematik. "Da gibt es sehr schöne Zusammenhänge mit analytischen Funktionen, mit zahlentheoretischen Problemen, mit Vermutungen über Primzahlen, also zwischen ganz verschiedenen Gebieten, und genau das zeichnet gute Mathematik aus", sagt Wüstholz. Auch aus der Riemannschen Vermutung, die im Zusammenhang mit der Frage nach der Häufigkeit von Prim-zahlen steht, ist wunderbare Mathematik entstanden. Und ebenso fruchtbar er-wies sich die Vermutung, die Christian Goldbach im Jahr 1742 in einem Brief an Leonhard Euler formulierte und die besagt, dass sich jede gerade Zahl als Summe zweier Primzahlen schreiben lässt. Beide Ver-mutungen sind bis heute nicht bewiesen. Die Rie-mannsche Vermutung ge-hört sogar zu den berühmten Jahrtausendproblemen, auf deren Lösung ein hoher Preis ausgesetzt ist. "Das sind hochaktuelle For-schungsfragen und vielleicht muss man ganz neu denken. Ich glaube, das wird eine Überraschung geben", meint Wüstholz.

Mehr zu den Jahrtausendproblemen
http://www.claymath.org/prizeproblems/index.htm


G C
T A
C G

# Genfischerei

*Peter Bühlmann*
*filtert relevante Informationen heraus*

Das menschliche Genom ist grob entziffert, aber über die Funktion und die Wechselwirkung der einzelnen Gene herrscht noch weitgehend Unklarheit. Biologen rufen in letzter Zeit hörbar nach mathematischer Unterstützung, um aus den kartierten Chromosomenabschnitten verwertbare Informationen herauszufiltern, denn moderne statistische Methoden können das biologische Verständnis erheblich erweitern. Professor Peter Bühlmann vom Seminar für Statistik der ETH beschäftigt sich mit solchen Fragestellungen und vergibt Teilaspekte als Diplom- oder Dissertationsthemen an seine Studenten.

Ein Beispiel für den medizinischen Nutzen solcher Untersuchungen sind Ergebnisse aus der Leukämieforschung. Bei dieser krankhaften Vermehrung der weißen Blutkörperchen kommt es für die Wahl der optimalen Therapie darauf an, ob es sich um eine Leukämie vom Typ A oder vom Typ B handelt. Bisher war dies leider erst im fortgeschrittenen Stadium der Erkrankung zu erkennen. Doch in den Genkarten von Chromosomenabschnitten der Blutzellen fanden amerikanische Genetiker vor kurzem für die beiden Leukämietypen leicht voneinander abweichende Muster. Bei ihrer Analyse kamen sie zu einem ersten optimistisch stimmenden Ergebnis. Bühlmann hat die Genkarten dieser Patientengruppe mit komplexeren statistischen Methoden analysiert und konnte dadurch harte Kriterien für die Diagnose aufstellen: Orientiert sich der Mediziner an den Genkarten, so könnte er in 973 von 1000 Fällen die richtige Diagnose stellen.

"Von jedem Patienten gab es eine Genkarte mit 3571 Genen", berichtet Bühlmann. Wie seine Arbeit zeigte, genügen aber schon zwei bestimmte Gene aus dieser großen Zahl, um die hervorragende Diagnosegüte zu erzielen. Dies weist darauf hin, dass diese beiden Gene an der Enstehung des Krankheitsbildes maßgeblich beteiligt sind. Doch als Bühlmann und seine Studenten diese beiden Gene aus dem Datensatz entfernten und die Genkarte erneut den statistischen Analysen unterwarfen, fanden sie wieder zwei oder drei andere Gene, die zu einer ähnlich guten Diagnosegüte führten.

"Vermutlich arbeiten diese Gene irgendwie zusammen und sind gemeinsam an der Entstehung der Erkrankung beteiligt", sagt Bühlmann. Biologen vergleichen die Gene manchmal mit einem Kochrezept in einer unbekannten Sprache, das die Anweisung zur Produktion bestimmter Substanzen gibt. Sie können mit ihren Methoden zwar das Rezept entziffern, aber verstehen oft noch nicht seine Bedeutung. Die statistischen Analysen sind eine vielversprechende Methode, um die Entschlüsselung des genetischen Codes voranzutreiben.


2
5
14
4
17
23
22
1
6
21
11
14
19
12
9
16
18
4
20
13
18
3
22
24
1
3
7
13
10
16
19
23
21
5
6
11

# Gespräche statt Maschinen

*Gäste am Forschungsinstitut Mathematik der ETH*

"Wir brauchen keine Maschinen, sondern Gespräche, die Menschen sind für einen Mathematiker die wichtigste Apparatur", sagt Professor Marc Burger, Direktor am Forschungsinstitut Mathematik (FIM) der ETH. Denn die Veröffentlichungen der Mathematiker zeigen nur die Ergebnisse ihrer oft langjährigen Arbeit - Satz, Beweis - eine dürre Lektüre, die auch den Eingeweihten oft nichts von den tieferen Gedanken und den vielen Schritten bis hin zu einer Einsicht verrät. Die wirklich spannende Mathematik findet oft im Kopf statt, in Form von vagen Gedanken, von Vermutungen und gewagten Spekulationen. So orientieren sich die Wissenschaftler auf dem terrain vague der mathematischen Forschung und finden neue Pfade, stellen aber zunächst kaum Wegweiser auf.

Deshalb gibt es an der ETH eine Einrichtung wie das FIM, das Gäste aus aller Welt nach Zürich holt. Hier ergeben sich Gelegenheiten für Gespräche und informelle Treffen, bei denen die Mathematiker beim Abendessen möglicherweise auch einmal unausgegorene aber fruchtbare Ideen auf eine Papierserviette kritzeln. Die Doktoranden am Departement für Mathematik können so auch wertvolle Kontakte für ihre wissenschaftliche Laufbahn knüpfen.

Zusammen mit anderen europäischen Forschungsinstituten arbeitet Marc Burger nun auch an einem Postdoktorandenprogramm für Nachwuchswissenschaftler. Sie sollen an mindestens zwei der beteiligten Institute mitarbeiten und als reisende Boten auch Wissen und Methoden von einem Ort zum anderen bringen.

abgebildete Professoren:

| | |
|---|---|
| 1 | Sznitman, Alain-Sol |
| 2 | Gutknecht, Martin |
| 3 | Kirchgraber, Urs |
| 4 | Embrechts, Paul |
| 5 | Struwe, Michael |
| 6 | Zehnder, Eduard |
| 7 | Ilmanen, Tom |
| 9 | Bühlmann, Peter |
| 10 | Pink, Richard |
| 11 | Knus, Max Albert |
| 12 | Mislin, Guido |
| 13 | Schwab, Christoph |
| 14 | Waldvogel, Jörg |
| 16 | Hampel, Frank |
| 17 | Jeltsch, Rolf |
| 18 | Lanford III, Oscar E. |
| 19 | Salamon, Dietmar |
| 20 | Felder, Giovanni |
| 21 | Knörrer, Horst |
| 22 | Künsch, Hans |
| 23 | Wüstholz, Gisbert |
| 24 | Feichtner, Eva-Maria |

Auflösung:

S. 02 $\mathbb{Z} / 4 \mathbb{Z}$
S. 05 $\mathbb{Z} / 2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} / 2\mathbb{Z}$:
Beide Strukturen sind lateinische Quadrate, in denen 4 Objekte immer so angeordnet werden, dass sie in jeder Spalte und jeder Zeile jeweils genau einmal vorkommen.

# Impressum


TEXT
Antonia Rötger

KOORDINATION
Gisbert Wüstholz

GESTALTUNG
Yotta Kippe



ETH ZÜRICH
Departement Mathematik
ETH-Zentrum

CH- 8092 Zürich
Telefon + 41 +1 632 - 0
Fax + 41 +1 632 - 15 70
www.math.ethz.ch



© Gisbert Wüstholz