

## TecDay@KSW

Kantonsschule Willisau, 27. Februar 2013

### Wieviele Gleichungen braucht der Mensch ? (\*)

Jörg Waldvogel

Seminar für Angewandte Mathematik SAM

ETH, 8092 Zürich

(\*) Titel frei nach Leo Tolstoj (1828 - 1910):

Wieviel Erde braucht der Mensch ? In: Volkserzählungen, 1887

## Zusammenfassung

Der Vortrag spricht den Problembereich der großen linearen Gleichungssysteme an und demonstriert, dass die Größe von in Technik und Wissenschaft interessanten Gleichungssystemen keine Grenzen hat. Als Modellproblem verwenden wir den Wärmeausgleich in leitenden Medien (Stäbe, Platten, räumliche Gebiete). Für eine approximative Lösung beschreiten wir einen vollständig elementaren Weg.

Grundlage ist die Diskretisation mit einem regelmäßigen Cartesischen Gitter und die verschwindende Wärmebilanz in jedem inneren Gitterpunkt. Die Mittelwerts-Eigenschaft der Lösung liefert ein einfaches, praktikables, ein sogenannt iteratives Lösungsverfahren. Für Rechtecksbereiche kann dessen Konvergenz unter Verwendung trigonometrischer Additionstheoreme bewiesen werden. Zum Schluss wird ein Ausblick auf analoge Problemstellungen gegeben.

## Überblick

1. Einleitung
2. Wärmeleitung in einer Metallplatte
  - Mittelwertssatz für den leitenden Stab
  - Verallgemeinerung auf die Platte
3. Die Mittelwerts-Iteration
  - Konvergenz für den Stab
  - Die leitende Platte
  - Zeitlicher Verlauf der Erwärmung
4. Ausblick
  - Einige analoge Probleme
  - Schlussfolgerungen
  - Wieviel Erde – Wieviele Gleichungen braucht der Mensch?

## 1. Einleitung

Eines der Grundprobleme der angewandten Mathematik:

### Aufstellen und Lösen von Gleichungen

gemäß dem grundlegenden Vorgehen der (berechnenden) Mathematik:

1. Unbekannte Größen einführen
2. Bedingungen formulieren, ergibt ein Gleichungssystem (S) für die Unbekannten
3. Diskussion, Beweis der Lösbarkeit von (S)
4. Berechnung der Lösungen von (S)

## Beispiel aus der volkstümlichen Mathematik:

Sagt der Lastesel zum Pferd:

“Nimm 2 von meinen Säcken, dann trage ich, der  
Kleinere und Schwächere, halb so viele wie du. (1)

Das Pferd zum Esel:

“Wir sind doch gleich stark: Nimm 2 von meinen  
Säcken, dann tragen wir gleich viele.” (2)

Wie viele Säcke trägt jedes Tier?

## Lösung

2 Unbekannte,  $x$ ,  $y$ . Jede der Aussagen (1), (2) liefert eine Gleichung:

Esel:  $x$  Säcke      Pferd:  $y$  Säcke      Eliminationsgewichte

$$x - 2 = \frac{1}{2} (y + 2) \quad -1 \quad (1)$$

$$x + 2 = y - 2 \quad 1 \quad (2)$$

$$\implies 4 = \frac{y}{2} - 3$$

Dieses System von  $n = 2$  linearen Gleichungen für die 2 Unbekannten  $x, y$  hat genau **eine Lösung**:

$$y = 14, \quad x = 10.$$

## Das lineare Gleichungssystem (1), (2)

$$x - \frac{1}{2}y = 3$$

$$x - y = -4$$

schreibt man – tabellarisch abgekürzt – auch als

$$\begin{array}{cc|c} x & y & 1 \\ \hline 1 & -\frac{1}{2} & 3 \\ 1 & -1 & -4 \end{array}$$

Hinweis auf die Einführung von Matrizen und Vektoren in Abschnitt 4:

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} \quad (3)$$

## Wieviele Gleichungen ?

Welche Werte  $n$  der Anzahl von Gleichungen muss man betrachten?

$n = 2$ ,  $n = 3$ ,  $n = 10$ ,  $n = 1\,000$ ,  $n = 1\,000\,000$ , oder noch mehr ?

Wir betrachten nun eine Klasse von Aufgaben, die so genannten

### Wärmeleitungsprobleme

Diese

- sind in Technik und Wissenschaft relevant,
- führen auf Gleichungssysteme mit beliebig großem  $n$ ,
- haben in vielen Wissensgebieten analoge Problemstellungen.

Dazu präsentieren wir Ideen, die für sehr große  $n$  noch praktikable Lösungsverfahren ergeben.



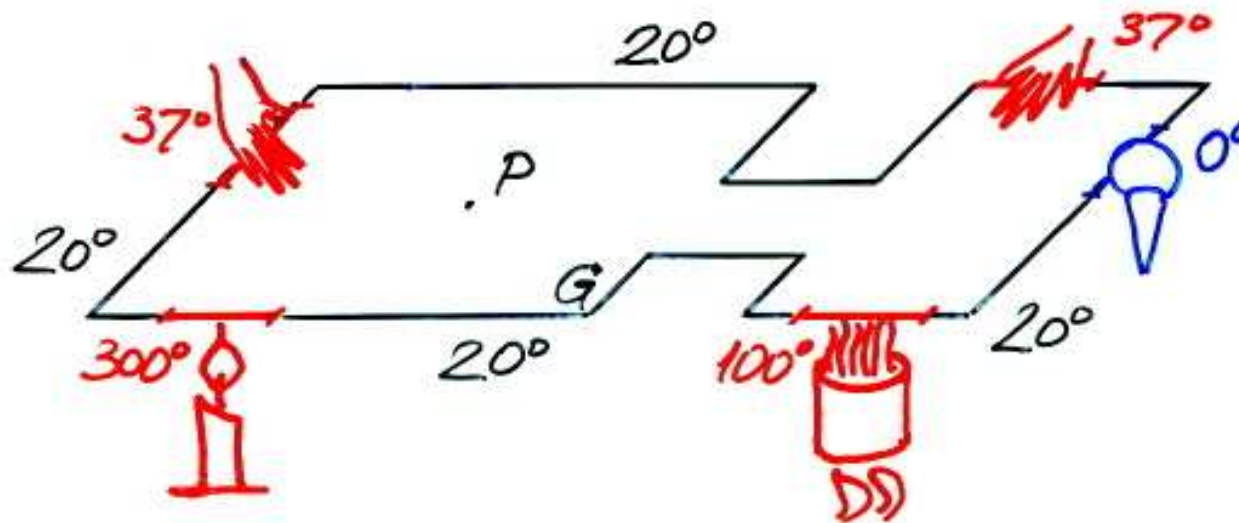
## 2. Wärmeleitung in einer Metallplatte

Vereinfachungen und Idealisierungen

- Platte  $G$  sei **homogen**, d.h. überall gleich beschaffen
- Oberfläche sei isoliert, Wärmefluss nur durch den Rand
- Randbedingung: Temperatur  $u$  auf dem ganzen Rand vorgegeben (und gehalten)
- Gesucht: Temperaturverlauf  $u(P)$  in Abhängigkeit des Punktes  $P \in G$  nach langer Zeit (**Gleichgewichtstemperatur**).

**Siehe Figur 1**

Figur 1. Eine wärmeleitende Platte G mit vorgeschriebener Randtemperatur



Temperatur in P:  
 $u(P)$

## Analoge – vielleicht relevantere– Probleme

- Wärmeleitung in Häusern
- Druckverteilung in der Atmosphäre
- Elektrische Potentiale
- Torsionsspannung in Antriebswellen
- Aufgeblasene Membranen

Analog, aber komplizierter sind etwa

- Wärmeleitung (und Konvektion) in Häusern mit “Durchzug”
- Wettermodelle: Nebst Temperatur auch Wind, Luftfeuchtigkeit, etc.

## 2.1. Mittelwertssatz für den leitenden Stab, $x_0 \leq x \leq x_n$

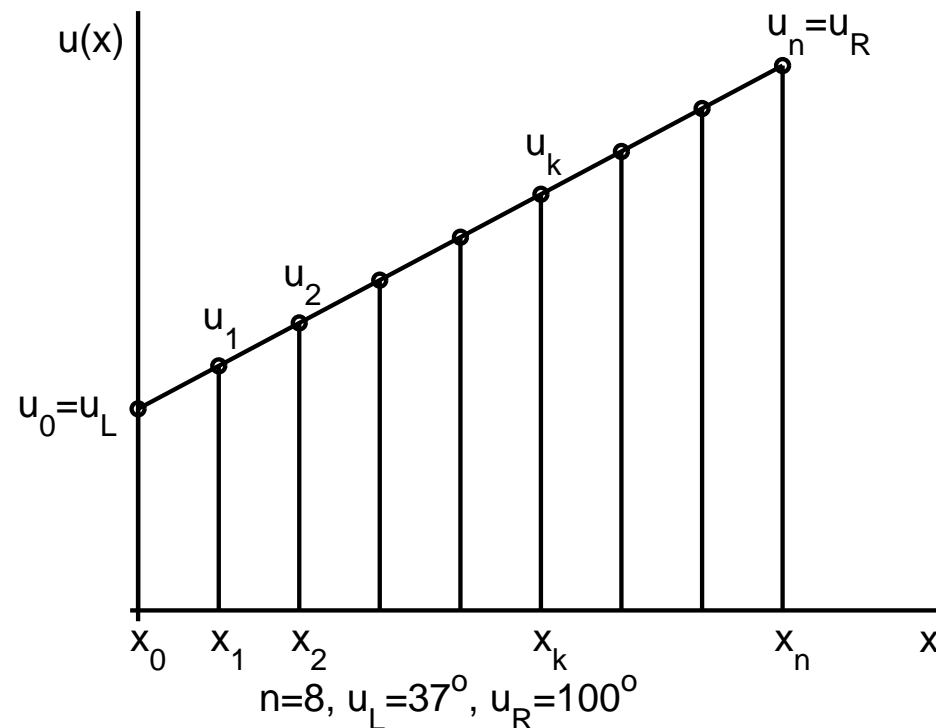
**Diskretisation:** Gleichmäßige Einteilung,  $n$  Teilintervalle

Teilpunkte:  $x_k, \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad n > 1$

Temperatur in  $x_k$ :  $u_k, \quad k = 0, 1, \dots, n$

Randbedingungen:  $u_0 = u_L := 37^\circ, \quad u_n = u_R := 100^\circ$

Fig. 2. Linearer Temperaturverlauf im Stab



## Physik

In jedem inneren Punkt fließt gleich viel Wärme hinaus wie herein.

Wärmebilanz = 0

Es gibt keine Gratis-Heizungen und keine Gratis-Kühlschränke !

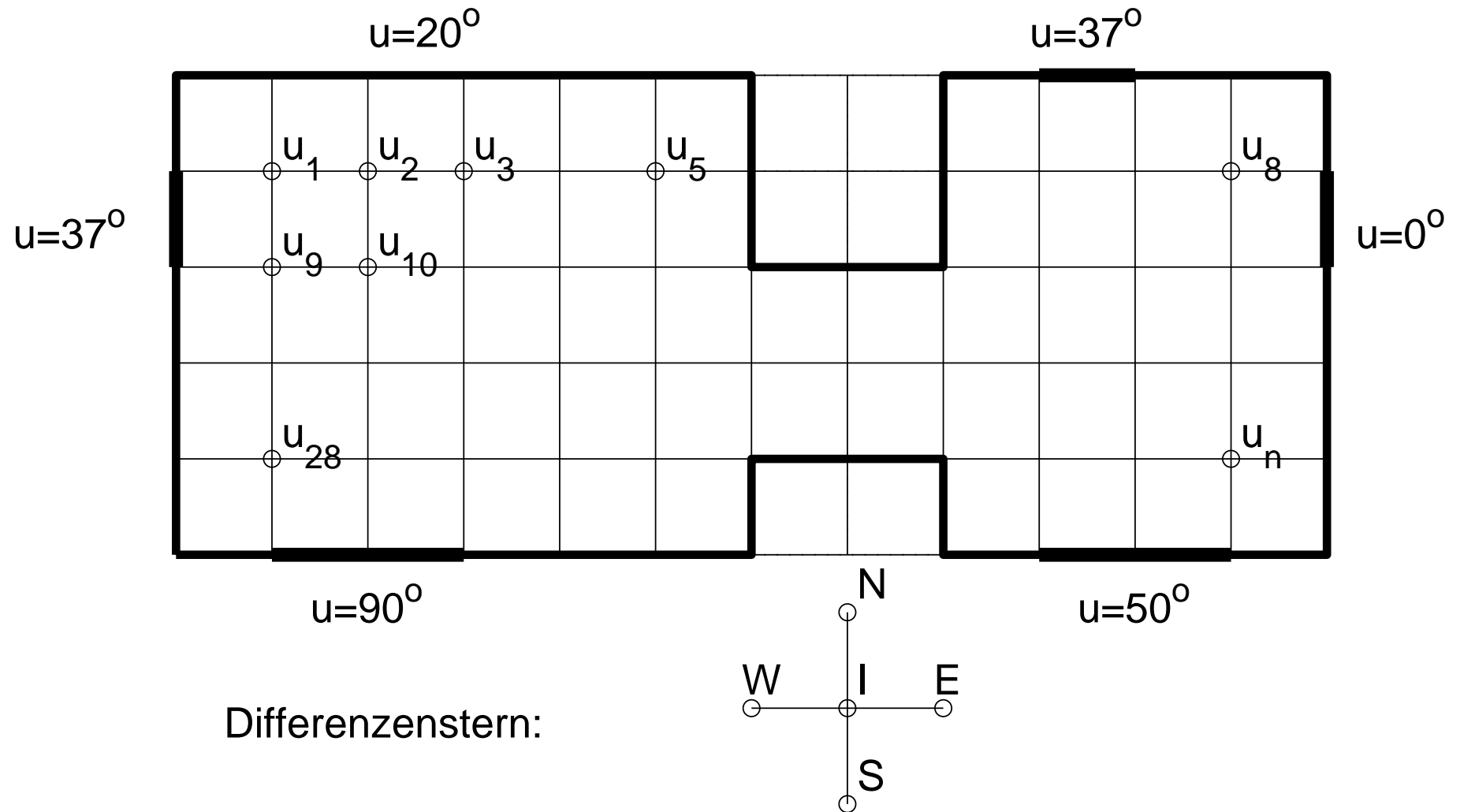
$$(u_{k+1} - u_k) + (u_{k-1} - u_k) = 0, \quad k = 1, 2, \dots, n - 1$$

Daraus folgt der **Mittelwertssatz**:

$$u_k = \frac{1}{2} (u_{k+1} + u_{k-1}), \quad k = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (4)$$

## 2.2. Verallgemeinerung auf die Platte

Fig.3. Beispiel einer Platte mit  $n=35$  Gitterpunkten



## Mittelwertssatz für die Platte

In jedem **inneren** Gitterpunkt  $I$  gilt: **Wärmebilanz = 0**,

$$(u_E - u_I) + (u_W - u_I) + (u_N - u_I) + (u_S - u_I) = 0.$$

Daraus folgt durch Auflösung nach  $u_I$ :

$$u_I = \frac{1}{4} (u_E + u_W + u_N + u_S) \quad (5)$$

Die Gleichgewichtstemperatur in jedem inneren Gitterpunkt  $I$  ist gleich dem Mittelwert der Gleichgewichtstemperaturen in den vier Nachbarpunkten  $E, W, N, S$  von  $I$  (Bezeichnung nach den 4 geographischen Himmelsrichtungen).

## Gleichungssystem im Beispiel von Seite 14

$n = 35$  Gleichungen für die Unbekannten  $u_1, u_2, \dots, u_{35}$ ,  
Gleichungen in der Reihenfolge der Gitternummern.

$$\begin{array}{rcccccccc}
 4u_1 & - & u_2 & & & & & - & u_9 & & & & = & 57 \\
 -u_1 & + & 4u_2 & - & u_3 & & & & & & - & u_{10} & = & 20 \\
 \dots & & & & & & & & & & & & & & 
 \end{array}$$

Tabellarische Darstellung:

$u_1$	$u_2$	$u_3$	$\dots$	$u_9$	$u_{10}$	$\dots$	$u_n$	1
4	-1			-1				57
-1	4	-1			-1			20
	-1	4	-1			-1		20
		-1	4	$\ddots$			$\ddots$	$\dots$

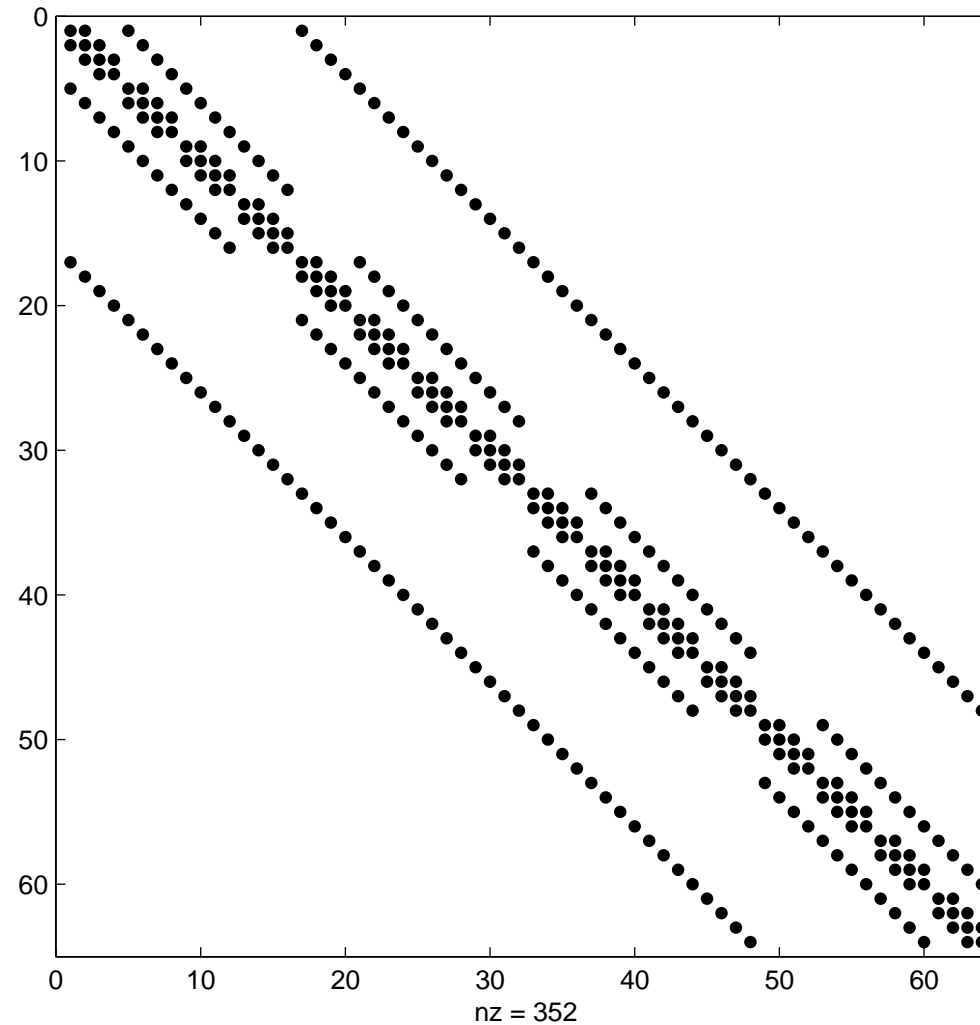


## Bemerkungen

- Der Zahlenblock unten links mit  $n^2$  Elementen heißt **Matrix** des Gleichungssystems.
- Wärmeleitungsprobleme mit Quadratgitter: Matrix **bandförmig**.
- Typischerweise **schwach besetzt**, d.h. viele Nullen.
- $n$  kann sehr groß sein, z.B.  $n > 10^4$  für die Temperaturverteilung im Hauptgebäude der Kantonsschule,  $n > 10^9$  für das globale Wetter.
- Die klassischen Eliminationsalgorithmen (z.B. Gauß) brauchen bis zu  $n^2$  Speicherplätze, zu viel für ganz große Probleme.
- Iterative Löser (siehe Kapitel 3) brauchen nur  $n$  Speicherplätze.
- Was ist noch behandelbar? – Jedes Jahr etwas mehr!

## Fig. 4. Die schwach besetzte Matrix des 5x5x5-Würfels

64 innere Gitterpunkte, 4096 Matrixelemente, davon 352 Nichtnullen



### 3. Die Mittelwerts-Iteration

#### Problemstellung (Randwertproblem):

- Gegeben: Temperaturen  $u_R$  in allen Randpunkten eines in ein Quadratgitter passenden Gebietes  $G$ .
- Gesucht: Gleichgewichtstemperaturen  $u_I$  in allen inneren Gitterpunkten von  $G$ .

#### Idee:

- Initialisierung: Wähle Startwerte  $u_I^{(0)}$  für die Temperaturen in den inneren Gitterpunkten.  $u_I^{(0)}$  können Näherungen der Gleichgewichtstemperaturen  $u_I$  sein, dürfen aber auch beliebig gewählt werden, z.B.  $u_I^{(0)} = 0$ .
- Iteration: Ersetze (wiederholt) jede innere Temperatur durch das Mittel aus allen Nachbartemperaturen (alle Punkte auf einmal).

## Mittelwerts-Iteration, Fortsetzung

In Formeln (für die Platte):

$$u_I^{(i+1)} = \frac{1}{4} \left( u_E^{(i)} + u_W^{(i)} + u_N^{(i)} + u_S^{(i)} \right), \quad i = 0, 1, \dots, \quad (6)$$

wobei  $I$  über alle inneren Gitterpunkte läuft, und alle  $u_I^{(i)}$  simultan nachgeführt werden (simultaneous updating).

### Fragen:

- Konvergenz: Ob gilt  $\lim_{i \rightarrow \infty} u_I^{(i)} = u_I$  ?
- Abhängigkeit von den Startwerten

### 3.1. Konvergenz für den Stab $0 \leq k \leq n$

Startwerte:  $u_0^{(0)} = u_L$ ,  $u_1^{(0)} = \dots = u_{n-1}^{(0)} = 0$ ,  $u_n^{(0)} = u_R$ ,  $n \geq 2$

$$\text{Iteration: } u_k^{(i+1)} = \frac{1}{2} (u_{k+1}^{(i)} + u_{k-1}^{(i)}), \quad k = 1, \dots, n-1. \quad (7)$$

$$\text{Exakte Lösung (lineare Funktion): } u_k = u_L + k \frac{u_R - u_L}{n} \quad (8)$$

$$\text{Fehlerfunktion: } \Delta_k^{(i)} := u_k^{(i)} - u_k; \quad (9)$$

diese erfüllt

$$\Delta_k^{(i+1)} = \frac{1}{2} (\Delta_{k+1}^{(i)} + \Delta_{k-1}^{(i)}) \quad (10)$$

#### Beobachtungen:

- Fehlerfunktion wird für große  $i$  immer **glatter** (bezüglich  $k$ )
- Verlauf (als Funktion von  $k$ ): **sinusförmig**, für große  $i$  ist der qualitative Verlauf unabhängig von den Startwerten

Fig. 5. Beispiel: Stab mit Randwerten  $u_L = 1$ ,  $u_R = 2$

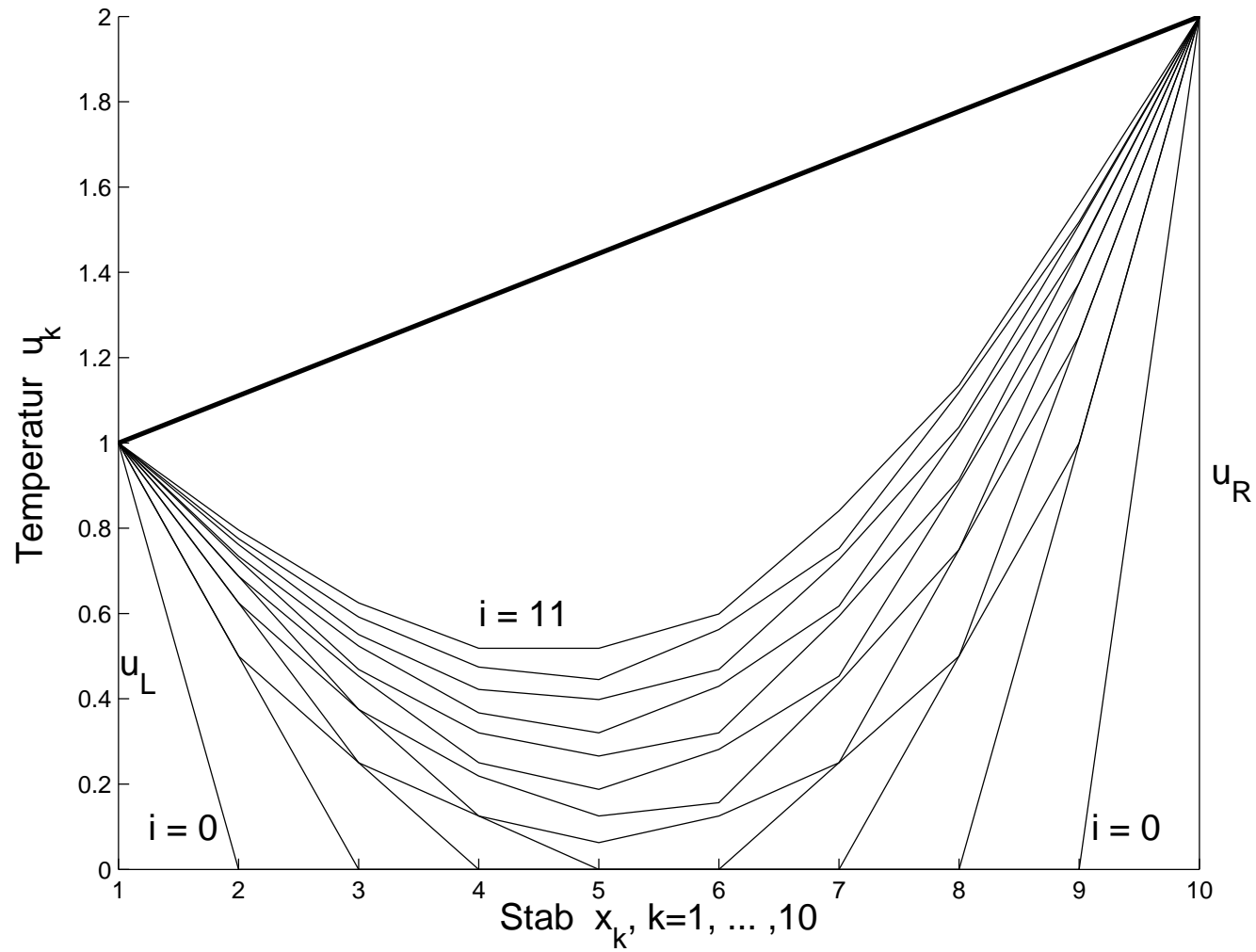
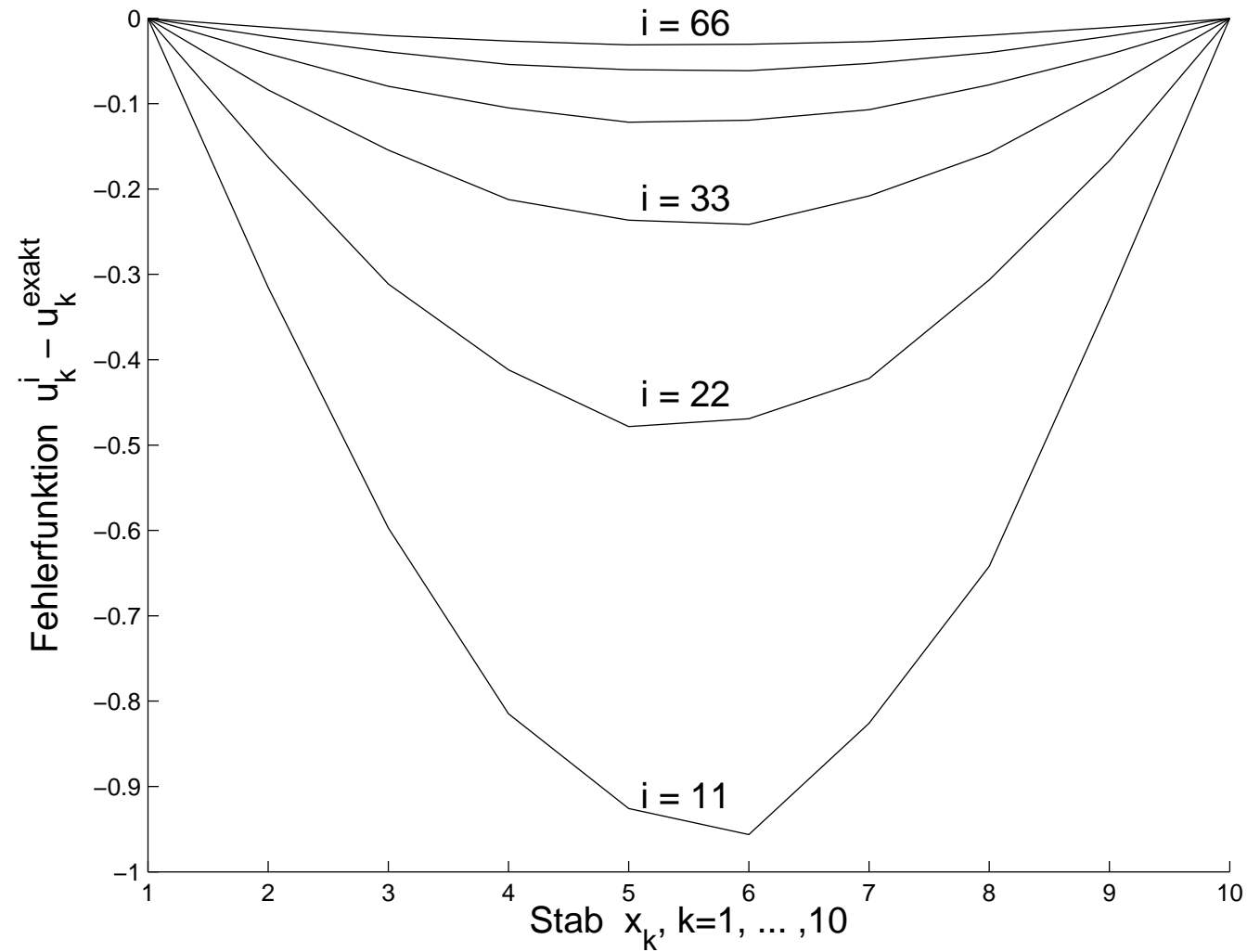


Fig. 6. Fehlerfunktion nach  $i = 11, 22, \dots, 66$  Iterationen

## Ansatz für die Fehlerfunktion

$$\Delta_k^{(i)} = c_i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n \quad (11)$$

Mit dem Additionstheorem der Sinusfunktion,

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin(\alpha) \cos(\beta) + \cos(\alpha) \sin(\beta),$$

ergibt sich mit Gleichung (10) von Seite 21:

$$\Delta_k^{(i+1)} = \frac{c_i}{2} \left( \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) - \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right).$$

Vereinfachung und Verwendung von (11) ergibt

$$\Delta_k^{(i+1)} = \Delta_k^{(i)} \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (12)$$



## Konvergenzsatz für den Stab

Seien  $u_k^{(0)}$ ,  $k = 0, 1, \dots, n \geq 2$  beliebige Startwerte für die Mittelwertiteration (7) in einem Stab. Dann konvergiert die Folge  $u_k^{(i)}$  für  $i \rightarrow \infty$  und jedes feste  $k$  gegen die lineare Verteilung (8). Die Konvergenzgeschwindigkeit ist die einer geometrischen Folge mit Quotient

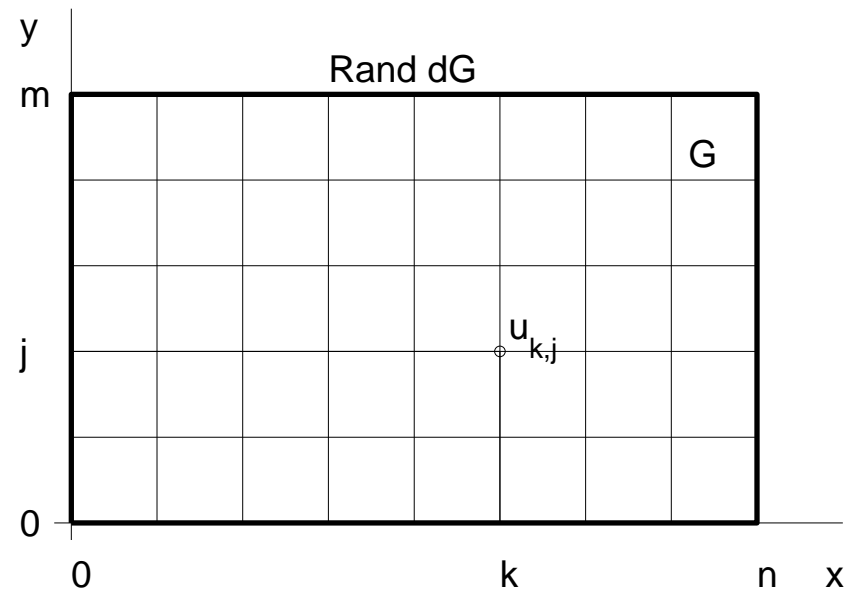
$$q = \cos\left(\frac{\pi}{n}\right), \quad 0 \leq q < 1.$$

### Bemerkungen

- Langsame Konvergenz für große  $n$ . Verfahren trotzdem praktikabel.
- Die Betrachtungen auf Seite 24 beweisen den Satz noch nicht vollständig. Es fehlt der Nachweis, dass die Fehlerfunktion gegen die Sinusform strebt.

## 3.2. Die leitende Platte (am Beispiel des Rechtecks G).

Gitterpunkte durch zwei Indizes  $j, k$  beschrieben. Temperaturen:  $u_{k,j}$ .



- Randwerte  $u_R$  ringsum, auf ganz dG, vorgeschrieben
- Startwerte  $u_{k,j}^{(0)}$  im Innern gegeben, z.B. Näherung oder Null
- Gesucht: Gleichgewichtstemperatur  $u_{k,j}$  mit den vorgeschriebenen Randwerten  $u_R$

## Der Algorithmus

$$u_{k,j}^{(i+1)} = \frac{1}{4} \left( u_{k+1,j}^{(i)} + u_{k-1,j}^{(i)} + u_{k,j+1}^{(i)} + u_{k,j-1}^{(i)} \right), \quad (13)$$
$$1 \leq k \leq n-1, \quad 1 \leq j \leq m-1, \quad i \geq 0$$

### Beobachtungen:

- Konvergenz unabhängig von den Startwerten,  
 $u_{k,j}^{(i)} \longrightarrow u_{k,j}$  (für  $i \rightarrow \infty$ ), wie eine geometrische Folge
- Fehlerfunktion  $\Delta_{k,j}^{(i)} := u_{k,j}^{(i)} - u_{k,j}$ : Für große  $i$  hat der “Buckel” (bei unterschiedlicher Höhe) immer etwa dieselbe Gestalt

## Ein Modell-Beispiel

- Gebiet  $G$ : Rechteck wie Seite 26,  $n = 9$ ,  $m = 6$
- Randwerte von rechts unten im Uhrzeigersinn linear ansteigend,  
 $u_R = 1, 2, \dots, 30$
- Startwerte:  $u_I = 0$  in allen inneren Gitterpunkten

Iteration  $i=0$ , Randwerte sowie Startwerte=0 im Innern

16.0000	17.0000	18.0000	19.0000	20.0000	21.0000	22.0000
15.0000	0	0	0	0	0	23.0000
14.0000	0	0	0	0	0	24.0000
13.0000	0	0	0	0	0	25.0000
12.0000	0	0	0	0	0	26.0000
11.0000	0	0	0	0	0	27.0000
10.0000	0	0	0	0	0	28.0000
9.0000	0	0	0	0	0	29.0000
8.0000	0	0	0	0	0	30.0000
7.0000	6.0000	5.0000	4.0000	3.0000	2.0000	1.0000

16.0000	17.0000	18.0000	19.0000	20.0000	21.0000	22.0000	Iteration i=1
15.0000	8.0000	4.5000	4.7500	5.0000	11.0000	23.0000	
14.0000	3.5000	0	0	0	6.0000	24.0000	
13.0000	3.2500	0	0	0	6.2500	25.0000	
12.0000	3.0000	0	0	0	6.5000	26.0000	
11.0000	2.7500	0	0	0	6.7500	27.0000	
10.0000	2.5000	0	0	0	7.0000	28.0000	
9.0000	2.2500	0	0	0	7.2500	29.0000	
8.0000	3.5000	1.2500	1.0000	0.7500	8.0000	30.0000	
7.0000	6.0000	5.0000	4.0000	3.0000	2.0000	1.0000	
16.0000	17.0000	18.0000	19.0000	20.0000	21.0000	22.0000	Iteration i=2
15.0000	10.0000	7.6875	7.1250	8.9375	13.7500	23.0000	
14.0000	6.3125	2.0000	1.1875	2.7500	10.3125	24.0000	
13.0000	4.8750	0.8125	0	1.5625	9.3750	25.0000	
12.0000	4.5000	0.7500	0	1.6250	9.7500	26.0000	
11.0000	4.1250	0.6875	0	1.6875	10.1250	27.0000	
10.0000	3.7500	0.6250	0	1.7500	10.5000	28.0000	
9.0000	3.7500	0.8750	0.2500	2.0000	11.0000	29.0000	
8.0000	4.3750	2.3750	1.5000	3.0000	10.0000	30.0000	
7.0000	6.0000	5.0000	4.0000	3.0000	2.0000	1.0000	

16.0000	17.0000	18.0000	19.0000	20.0000	21.0000	22.0000	Iteration i= 63
15.0000	16.2295	17.4849	18.7869	20.1457	21.5570	23.0000	Drei Ziffern
14.0000	15.4359	16.9280	18.5224	20.2440	22.0850	24.0000	korrekt
13.0000	14.5912	16.2777	18.1412	20.2317	22.5444	25.0000	
12.0000	13.6584	15.4628	17.5470	20.0095	22.8678	26.0000	
11.0000	12.5877	14.3817	16.5906	19.4052	22.9256	27.0000	
10.0000	11.3185	12.8997	15.0442	18.1093	22.4371	28.0000	
9.0000	9.7938	10.8665	12.5916	15.5625	20.7208	29.0000	
8.0000	7.9953	8.1901	8.9034	10.8375	15.8889	30.0000	
7.0000	6.0000	5.0000	4.0000	3.0000	2.0000	1.0000	
16.0000	17.0000	18.0000	19.0000	20.0000	21.0000	22.0000	Iteration i=126
15.0000	16.2366	17.4972	18.8011	20.1581	21.5641	23.0000	Alle Ziffern
14.0000	15.4493	16.9512	18.5492	20.2672	22.0984	24.0000	korrekt
13.0000	14.6093	16.3090	18.1773	20.2630	22.5625	25.0000	
12.0000	13.6790	15.4983	17.5881	20.0451	22.8884	26.0000	
11.0000	12.6082	14.4173	16.6317	19.4409	22.9461	27.0000	
10.0000	11.3366	12.9310	15.0804	18.1406	22.4552	28.0000	
9.0000	9.8072	10.8898	12.6184	15.5858	20.7343	29.0000	
8.0000	8.0024	8.2025	8.9177	10.8499	15.8960	30.0000	
7.0000	6.0000	5.0000	4.0000	3.0000	2.0000	1.0000	

# Graphiken der Zustände nach 3, 6, 12, 24, 48 Iterationen

Fig 8. Rechteck 6x9 mit linear ansteigenden Randwerten

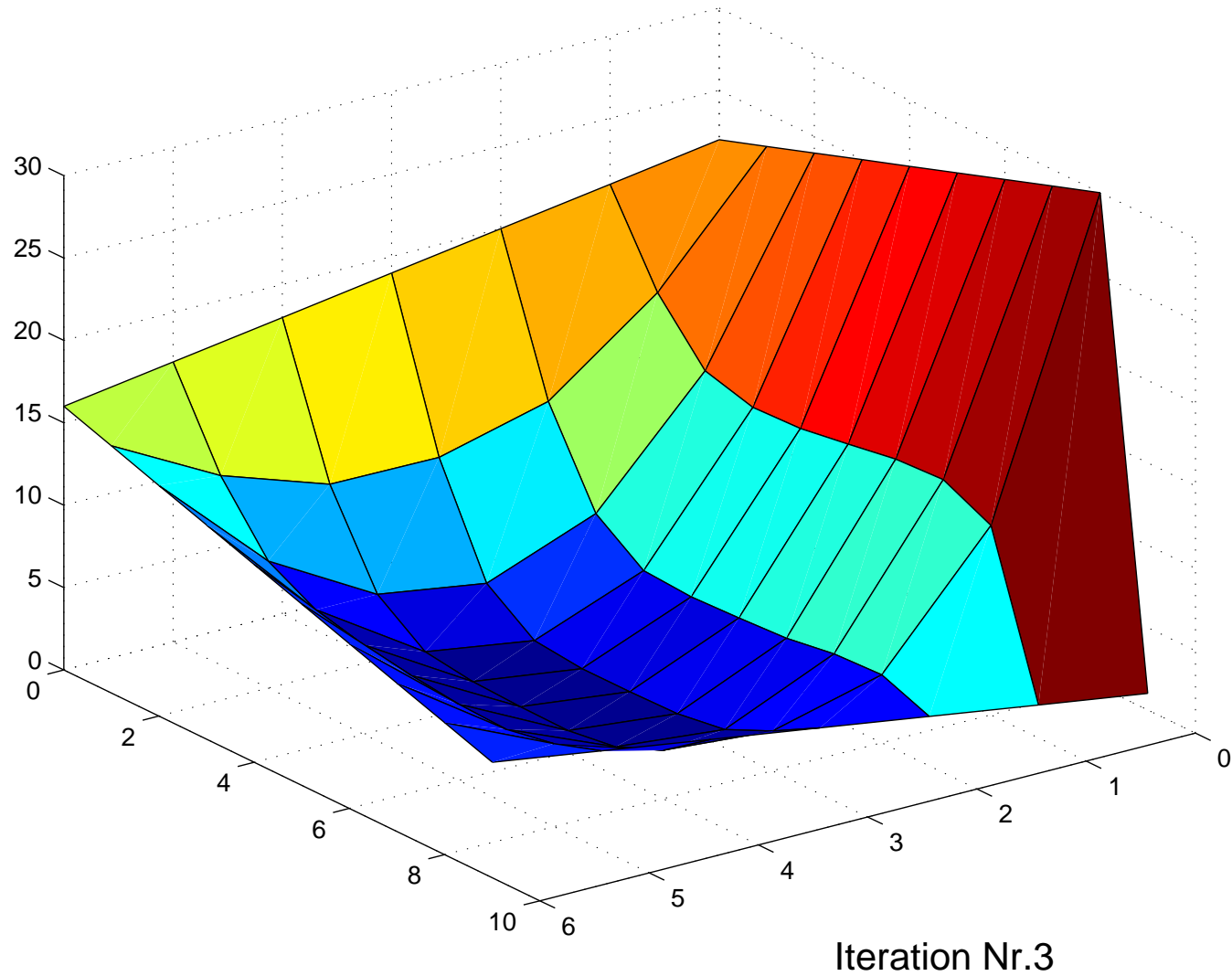


Fig 9. Rechteck 6x9 mit linear ansteigenden Randwerten

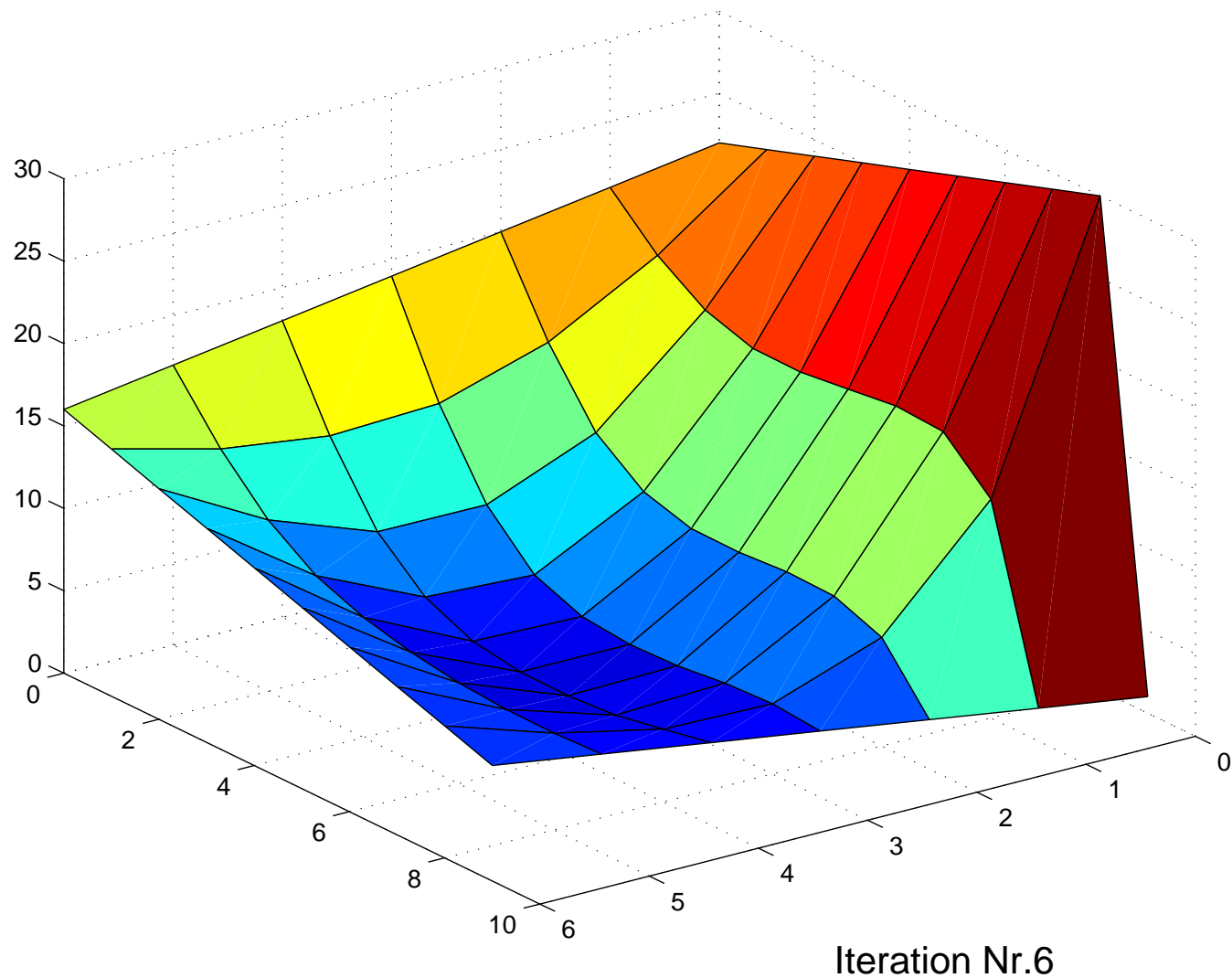




Fig 10. Rechteck 6x9 mit linear ansteigenden Randwerten

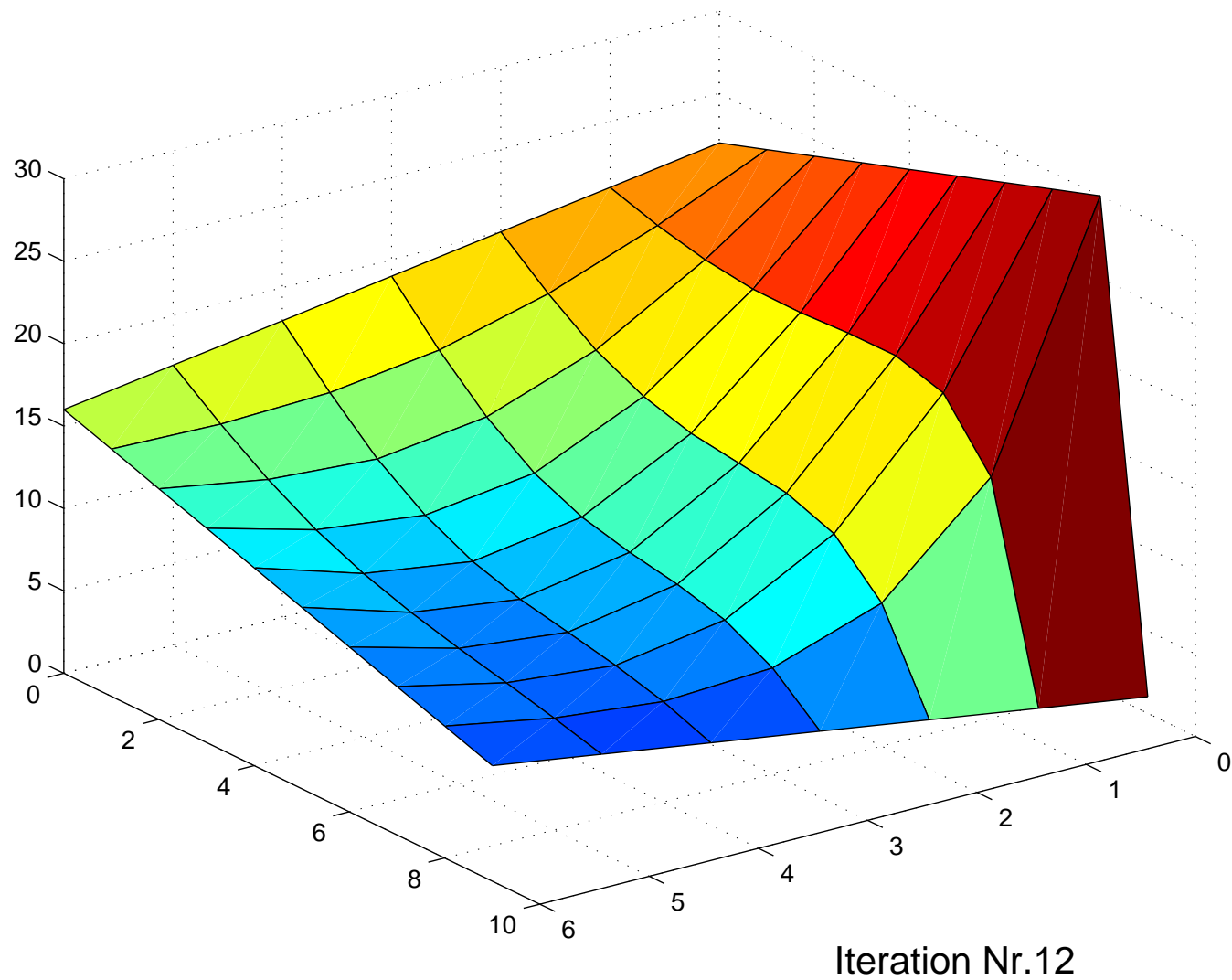


Fig 11. Rechteck 6x9 mit linear ansteigenden Randwerten

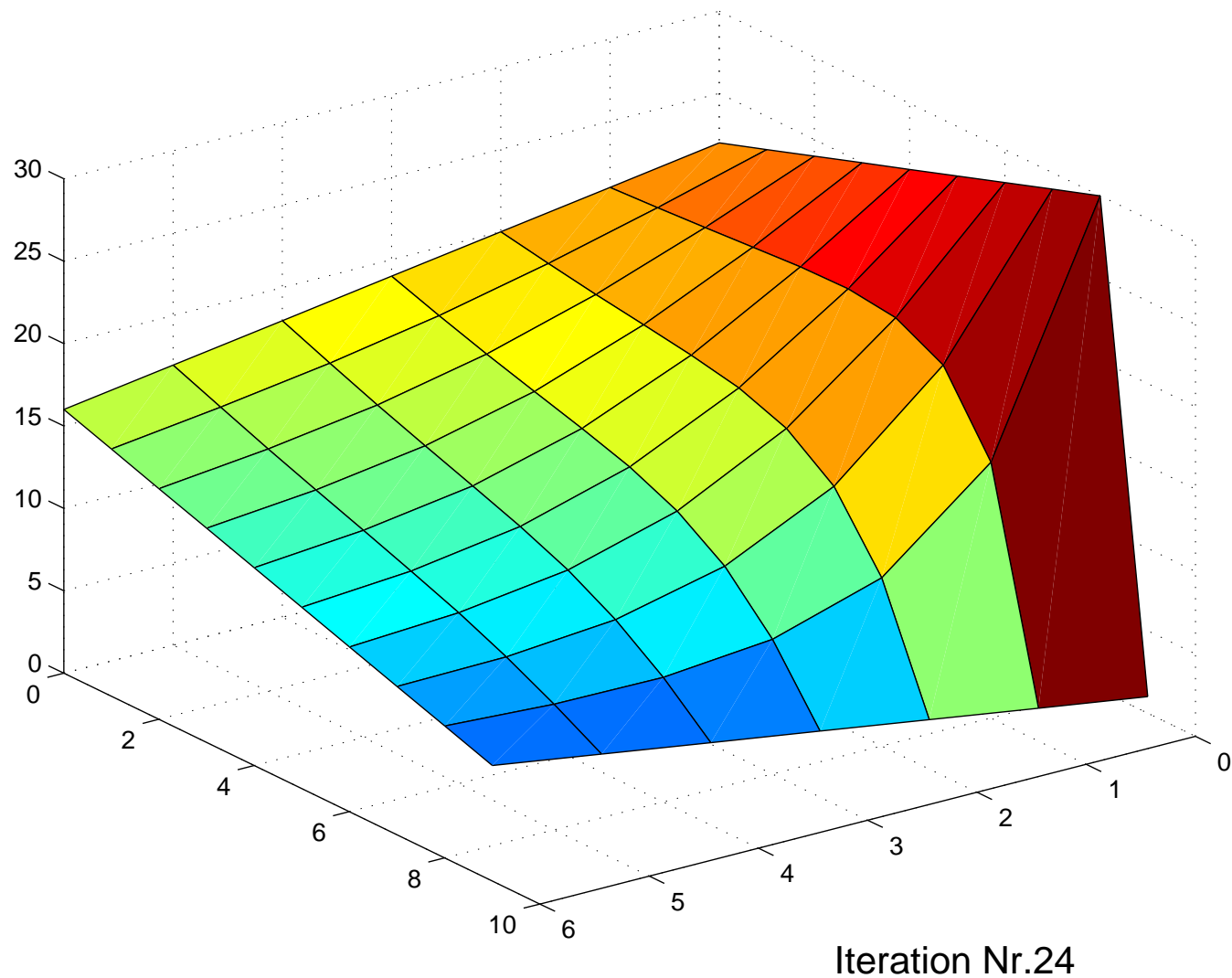


Fig 12. Rechteck 6x9 mit linear ansteigenden Randwerten

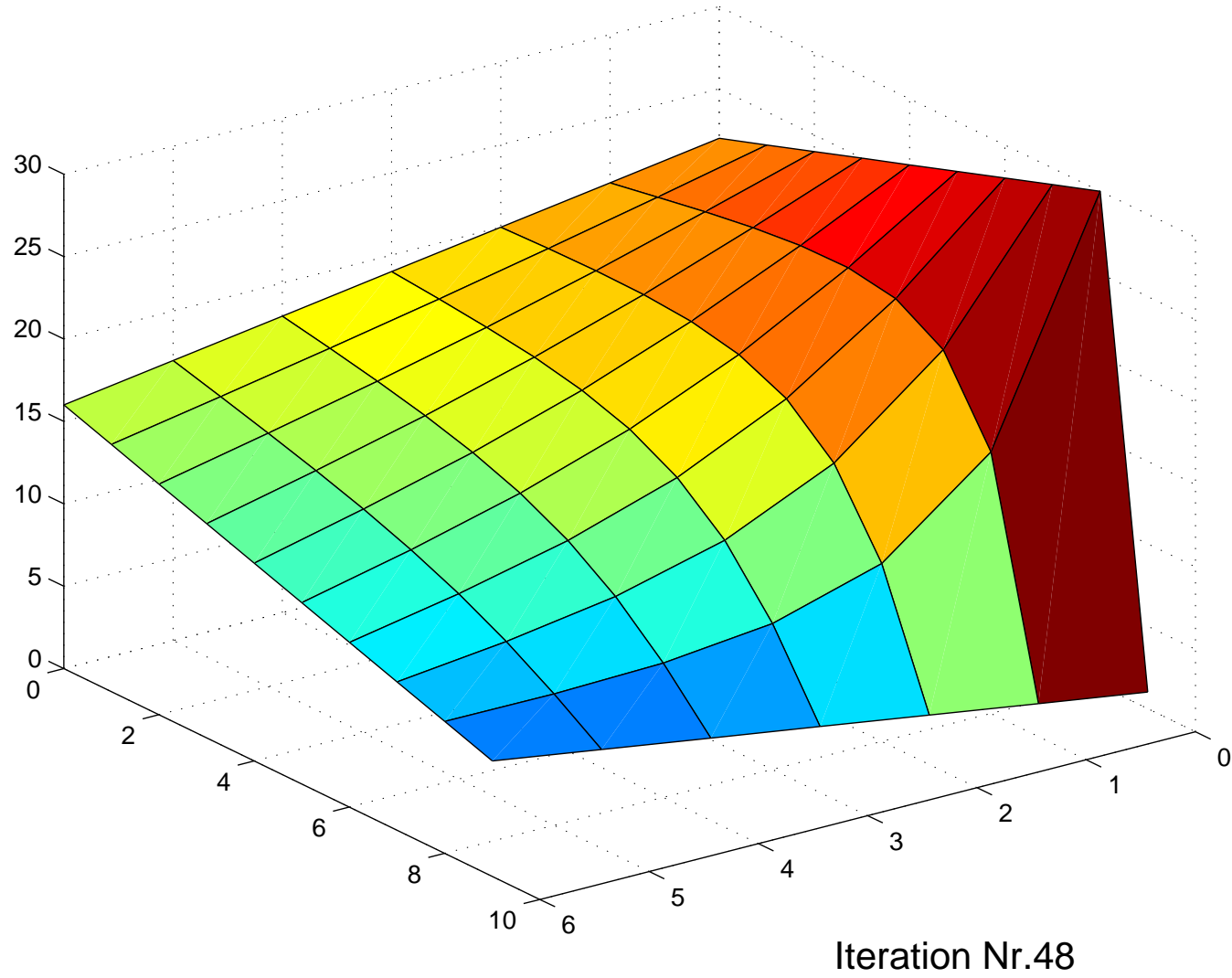
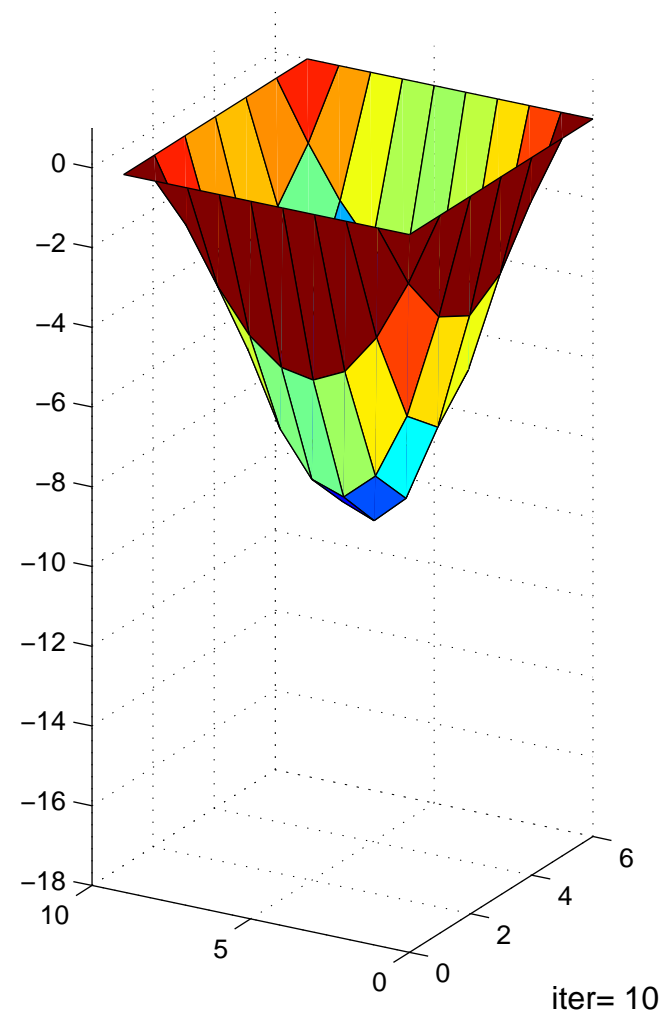
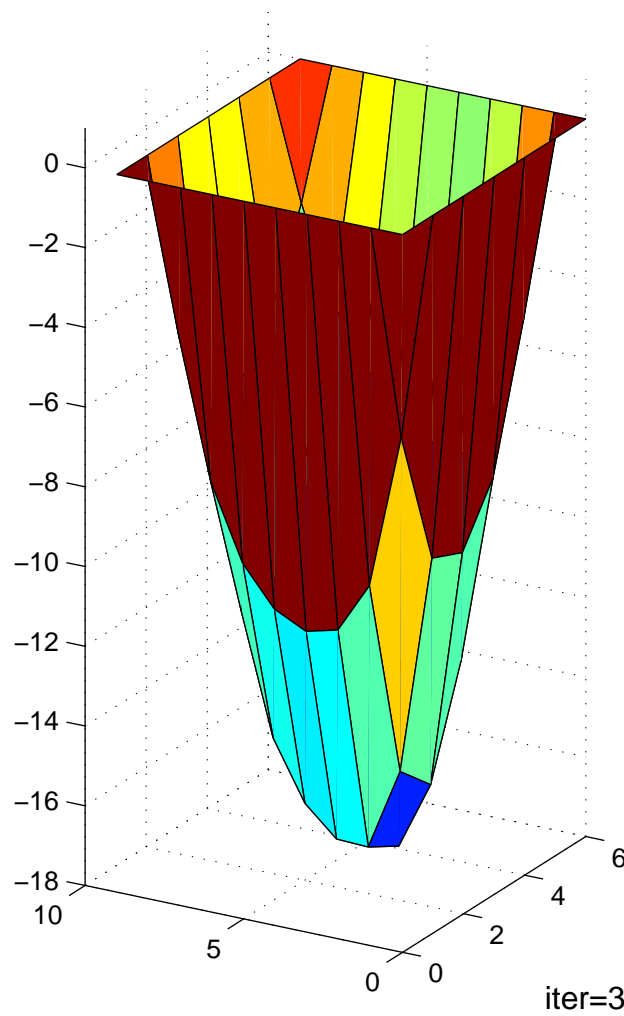


Fig. 13, 14. Die Fehlerfunktion

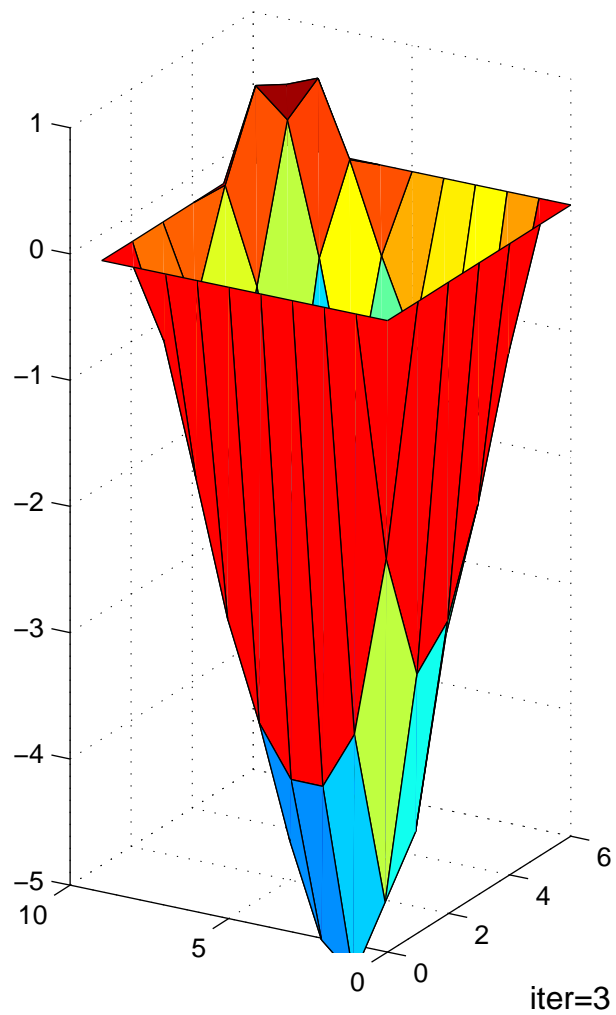
Fehlerfunktion mit Anfangs

–

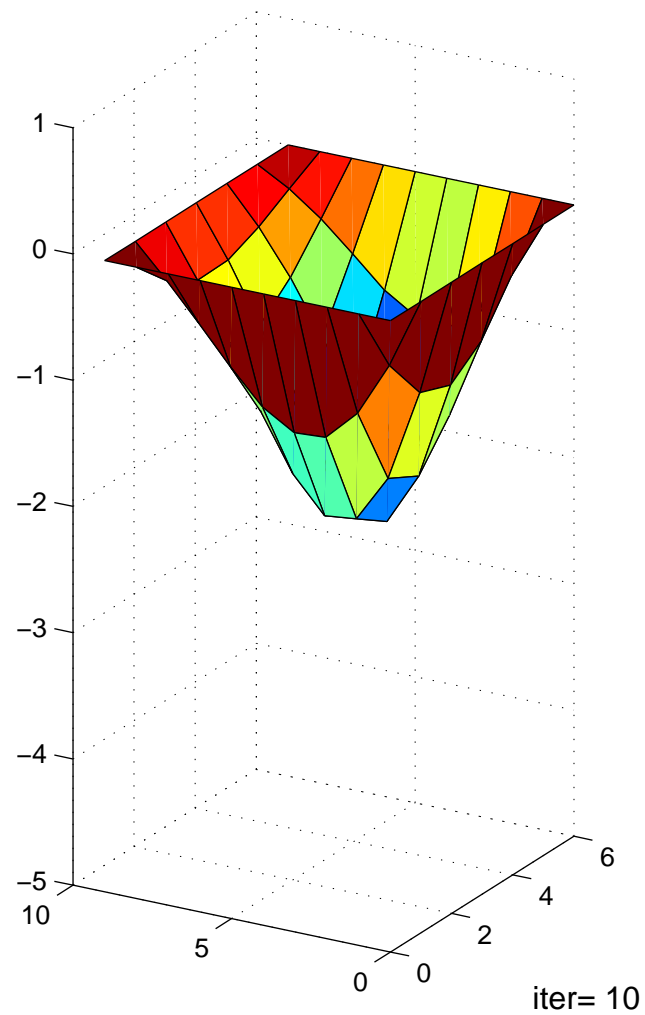
Werten  $u=0$  im Innern



Fehlerfunktion mit Anfangs



– Werten  $u=13$  im Innern



## Konvergenzgeschwindigkeit

Ansatz für die Fehlerfunktion:

$$\Delta_{k,j}^{(i)} = c_i \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{j\pi}{m}\right), \quad k = 0, 1, \dots, n, \quad j = 0, 1, \dots, m. \quad (14)$$

Aus dem Algorithmus (13) von Seite 27 folgt

$$\Delta_{k,j}^{(i+1)} = \frac{1}{4} \left( \Delta_{k+1,j}^{(i)} + \Delta_{k-1,j}^{(i)} + \Delta_{k,j+1}^{(i)} + \Delta_{k,j-1}^{(i)} \right). \quad (15)$$

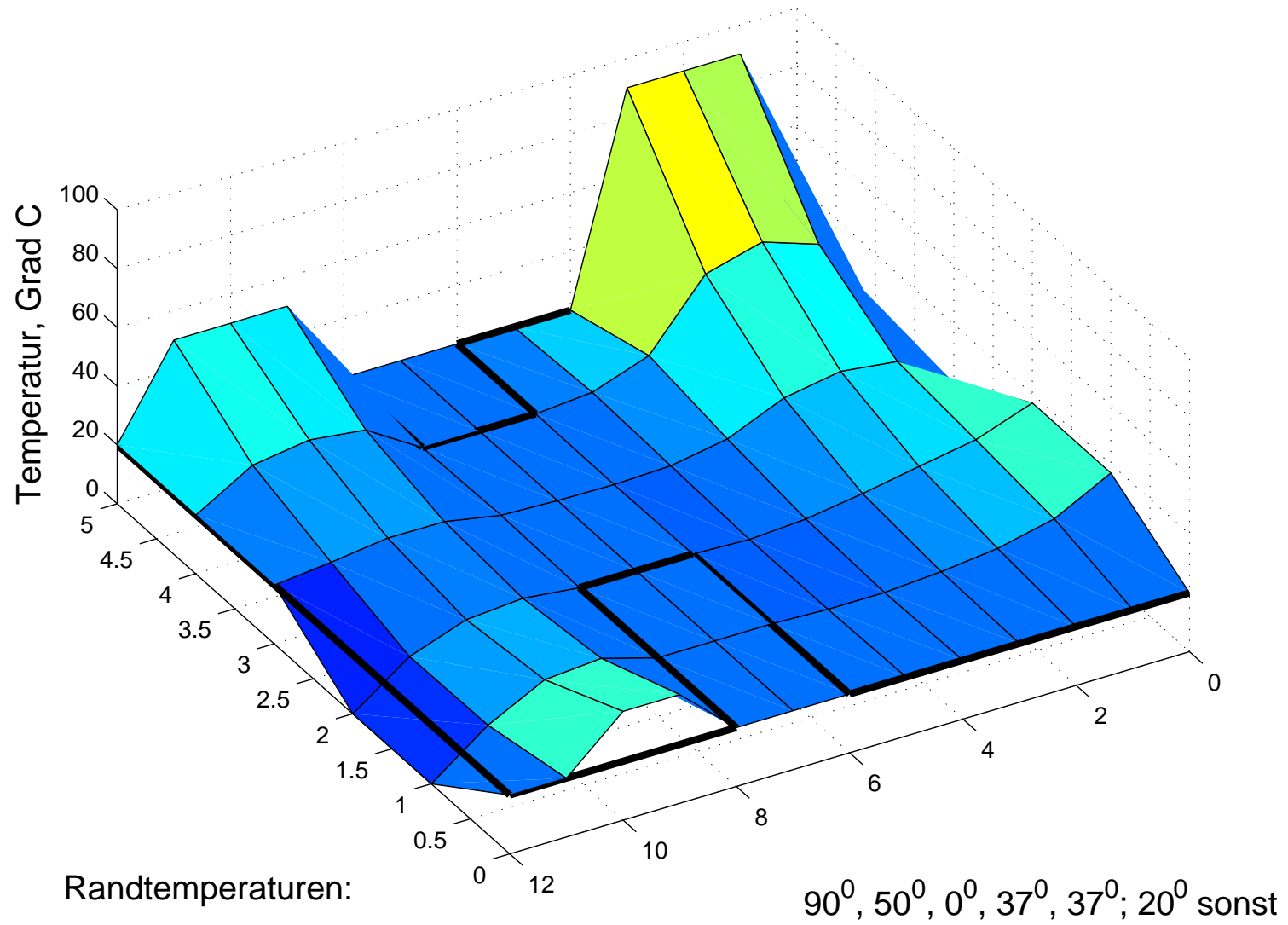
Durch Einsetzen von (14) unter Verwendung des Additionstheorems folgt mit der Umformung von Seite 24:

$$\Delta_{k,j}^{(i+1)} = \frac{c_i}{2} \left( \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{j\pi}{m}\right) + \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \cdot \sin\left(\frac{j\pi}{m}\right) \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \right).$$

Verwendung von (14) ergibt schließlich

$$\Delta_{k,j}^{(i+1)} = \Delta_{k,j}^{(i)} \cdot q \quad \text{mit} \quad q := \frac{1}{2} \left( \cos\left(\frac{\pi}{n}\right) + \cos\left(\frac{\pi}{m}\right) \right) < 1 \quad (16)$$

Fig. 15. Gleichgewichtstemperatur in der Platte von Seite 14



### 3.3. Zeitlicher Verlauf der Erwärmung

Die langsame Konvergenz hat auch Vorteile!

**Die Folge der Iterierten im Algorithmus (7) oder (13) stellt den zeitgerechten Ablauf der Erwärmung aus dem Anfangszustand dar.**

Die aufeinander folgenden Stadien entsprechen dem Zeitschritt

$$\delta t = \frac{(\delta x)^2}{4D} .$$

Dabei ist  $\delta x$  die Maschenweite des Gitters, und

$$D = \frac{k}{c\rho} \quad (\text{in Einheiten } \text{m}^2 \text{ s}^{-1})$$

ist die **Diffusionskonstante** des Plattenmaterials.  $k, c, \rho$  stehen für dessen Wärmeleitfähigkeit, spezifische Wärmekapazität und Dichte.



## Zeitlicher Verlauf, Fortsetzung

**Beispiel:** Aluminium

$$\begin{aligned} k &= 237 \text{ W m}^{-1} \text{ K}^{-1}, & c &= 897 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1} \\ \rho &= 2700 \text{ kg m}^{-3}, & D &= 0.98 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \end{aligned}$$

ergibt mit  $\delta x = 0.1 \text{ m}$  :  $\delta t = 25.5 \text{ s}$  (25.5 Sekunden).

**Bemerkung:** Die Begründung übersteigt diesen Rahmen. Sie stützt sich auf eine partielle Differentialgleichung, die **Wärmeleitungsgleichung**

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \cdot \Delta u, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{Laplace-Operator}).$$

Hier bedeuten  $x, y, t$  die räumlichen Koordinaten auf der Platte bzw. die Zeit, und  $u(x, y, t)$  ist die Temperatur im Punkt  $(x, y)$  zur Zeit  $t$ .

## Exkurs: Exakte Lösung der Laplace-Gleichung $\Delta u = 0$

Grenzfall eines unendlich feinen Gitters im Quadrat

$$Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x < \pi, 0 < y < \pi\}$$

mit von 0 bis 1 linear ansteigenden Randwerten.

Die exakte Lösung  $u(x, y)$  lässt sich als unendliche Fourier-Reihe schreiben. Sei  $c := \frac{2}{\pi}$ , dann gilt

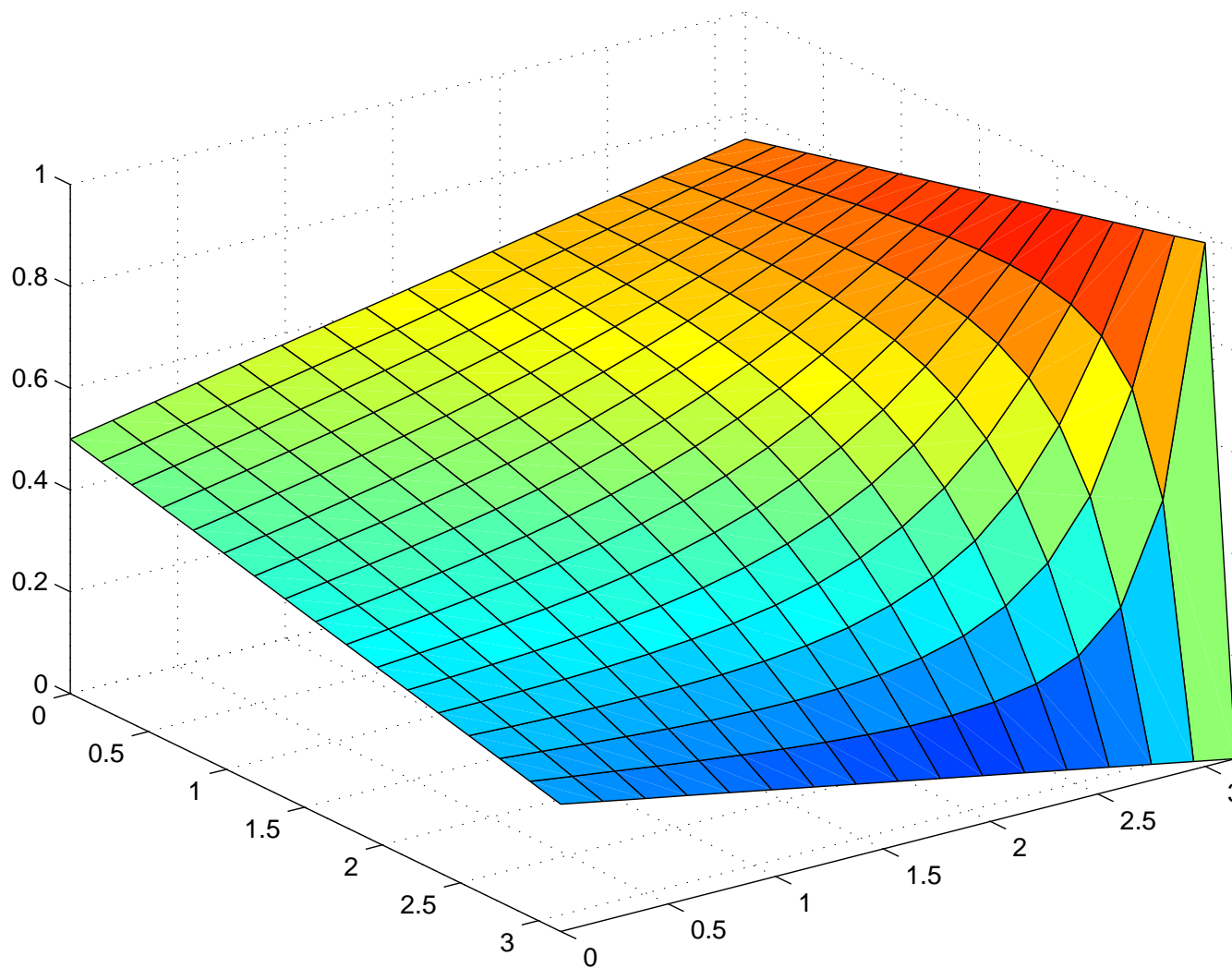
$$u(x, y) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} (1 - cx)(1 + cy) + c \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n(\pi - x)) \sinh(ny)}{n \sinh(n\pi)} .$$

Dabei steht **sinh** für die Funktion **sinus hyperbolicus**,

$$\sinh(z) = \frac{1}{2} (e^z - e^{-z}) .$$

Die Reihe konvergiert im Innern des Quadrates wie eine geometrische Reihe.

Infinitely fine grid. Solution plotted with  $16^2$  panels



## Das Mehrgitterverfahren (Multigrid)

Beobachtungen betreffend die Mittelwerts-Iteration:

- Bessere Konvergenz, d.h. weniger Schritte, bei gröberem Gitter. Sogar nur 1 Schritt bei einem  $2 \times 2$ -Gitter.
- Die Mittelwerts-Iteration glättet den (möglicherweise noch ungenauen) Temperaturverlauf.

**Leider:** In der Praxis braucht man meist relativ feine Gitter; dies bewirkt langsame Konvergenz.

**Idee:** Mit einem groben Gitter eine Anfangsnäherung für ein feineres Gitter beschaffen.

## Der Multigrid-Algorithmus

1. Beginn mit einem groben Gitter, z.B. ein einziges Quadrat im Problem von Seite 42/43.
2. Verfeinerung durch Halbierung der Maschenweite. Am Rand des Gebietes die dazwischen liegenden Randwerte einfügen, sonst in jedem Gitterquadrat die Mittelwerte von 2 bzw. 4 Werten einfügen, z.B.:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{3} & 6 & \mathbf{9} \\ 5 & 8.5 & 12 \\ \mathbf{7} & 11 & \mathbf{15} \end{array}$$

3. Die (noch rauhen) Werte auf dem verfeinerten Gitter durch Mittelwerts-Iteration glätten, bis die gewünschte Genauigkeit erreicht ist. Dann zurück nach 2.

## 4. Ausblick

### 4.1. Analoge Probleme

Drei willkürlich gewählte, aber typische, technisch relevante Probleme:

Figur 16: Modellierung von Zuleitungsdrähten

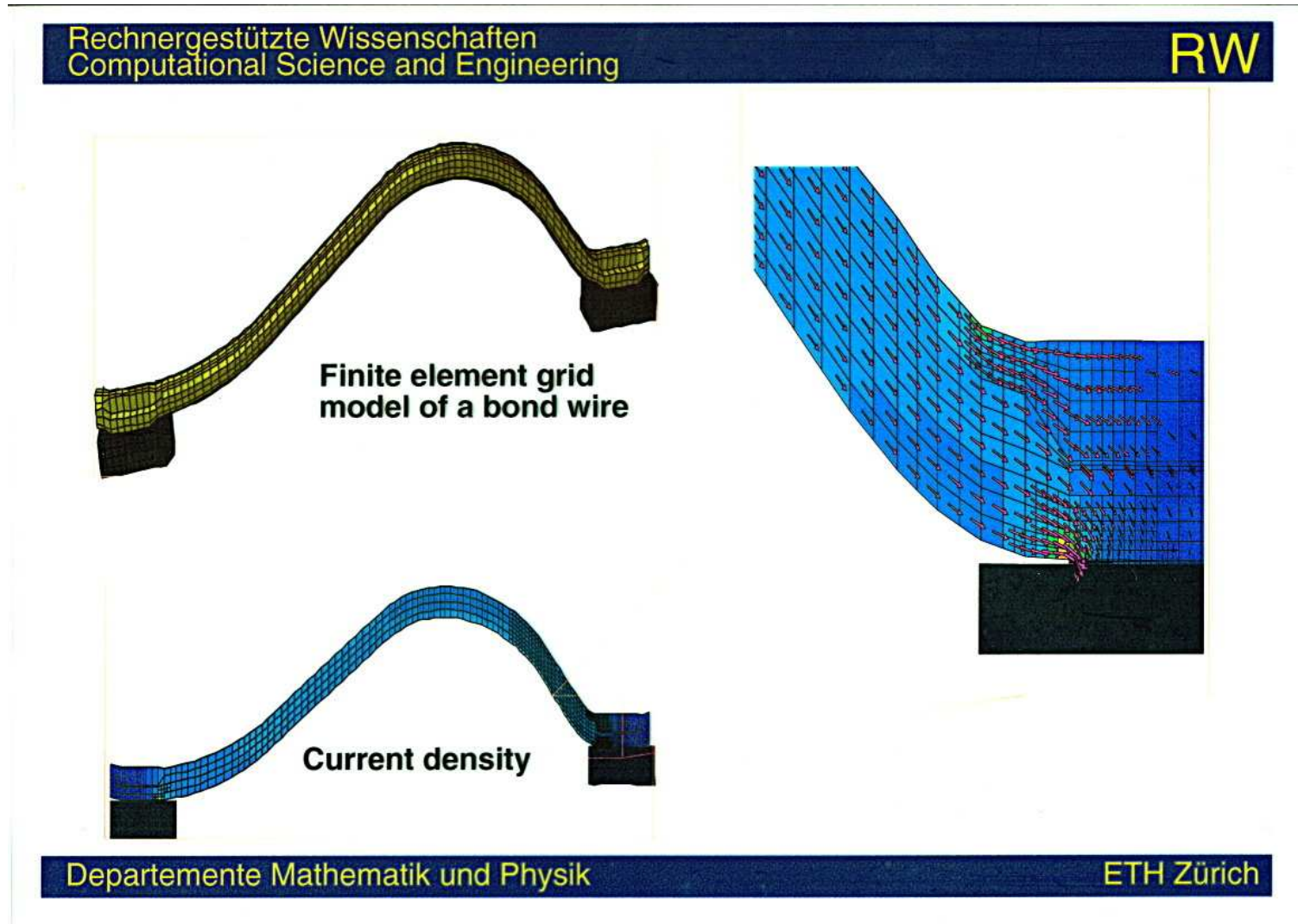
Figuren 17, 18: Design von Halbleiter-Bauelementen

Figuren 19, 20: Strömung in Turbomaschinen

Alle zeigen das gleiche, immer wiederkehrende Grundprinzip:

- Gitter-Einteilung des Arbeitsgebietes in (viele) einfache Grundgebiete
- Daten in den Gitterpunkten als Unbekannte einführen
- Physikalische Gesetze für die Grundgebiete formulieren (einfach!)
- Lösen der (meist riesigen) Gleichungssysteme

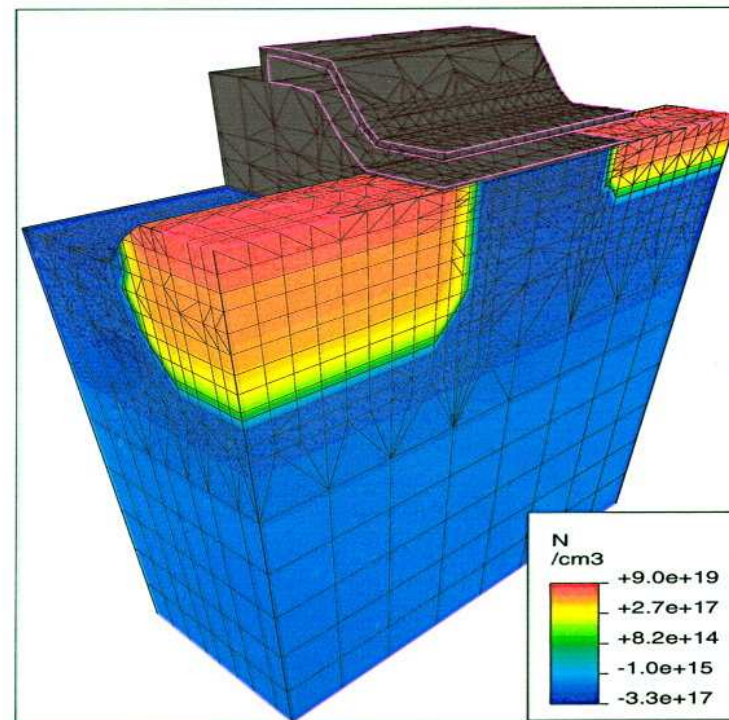
## Fig. 16. Modellierung von Zuleitungsdrähten



## Fig. 17. Halbleiter-Bauelement

Rechnergestützte Wissenschaften  
Computational Science and Engineering

RW



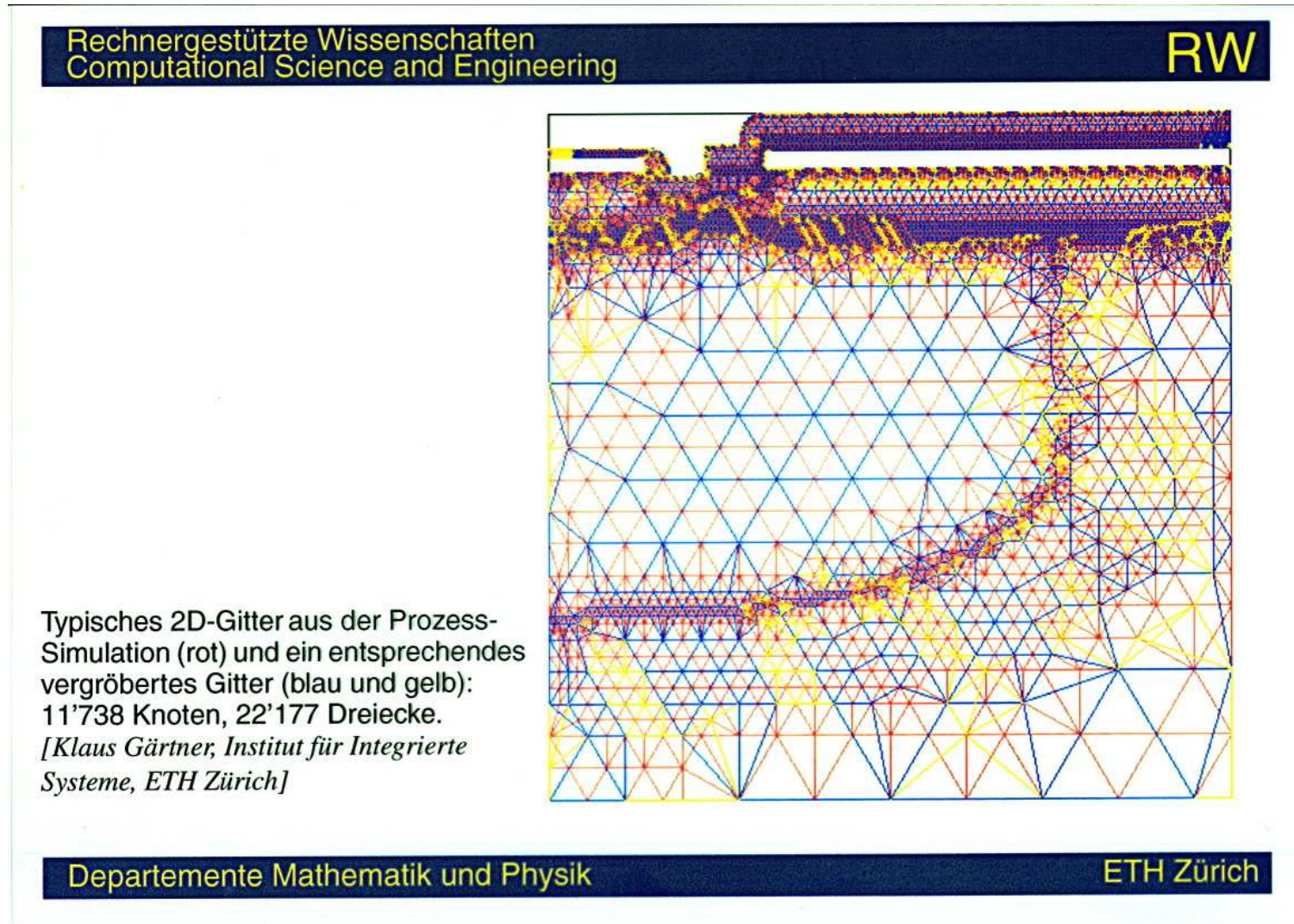
Semiconductor device simulation of EEPROM (Institute for Integrated Systems, ETH Zurich)

Departemente Mathematik und Physik

ETH Zürich



## Fig. 18. Adaptives Gitter im Halbleiter-Bauelement



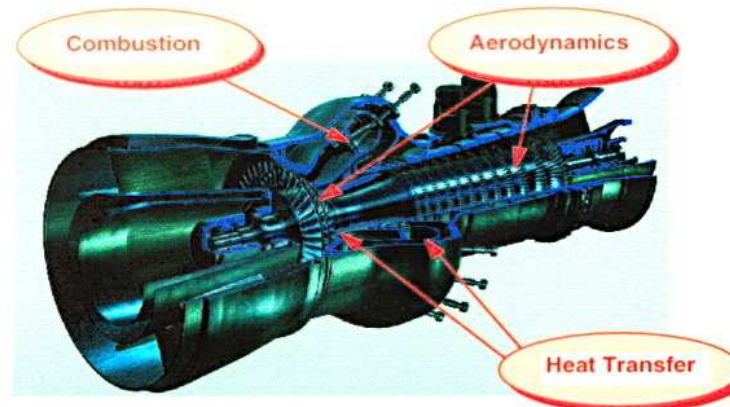
## Fig. 19. Turbomaschine

Rechnergestützte Wissenschaften  
Computational Science and Engineering

RW

### Computational Fluid Dynamics: Strömung in Turbomaschinen

Dr. E. Benz, Dr. A. Steiner  
ABB Corporate Research Ltd., Baden-Dättwil



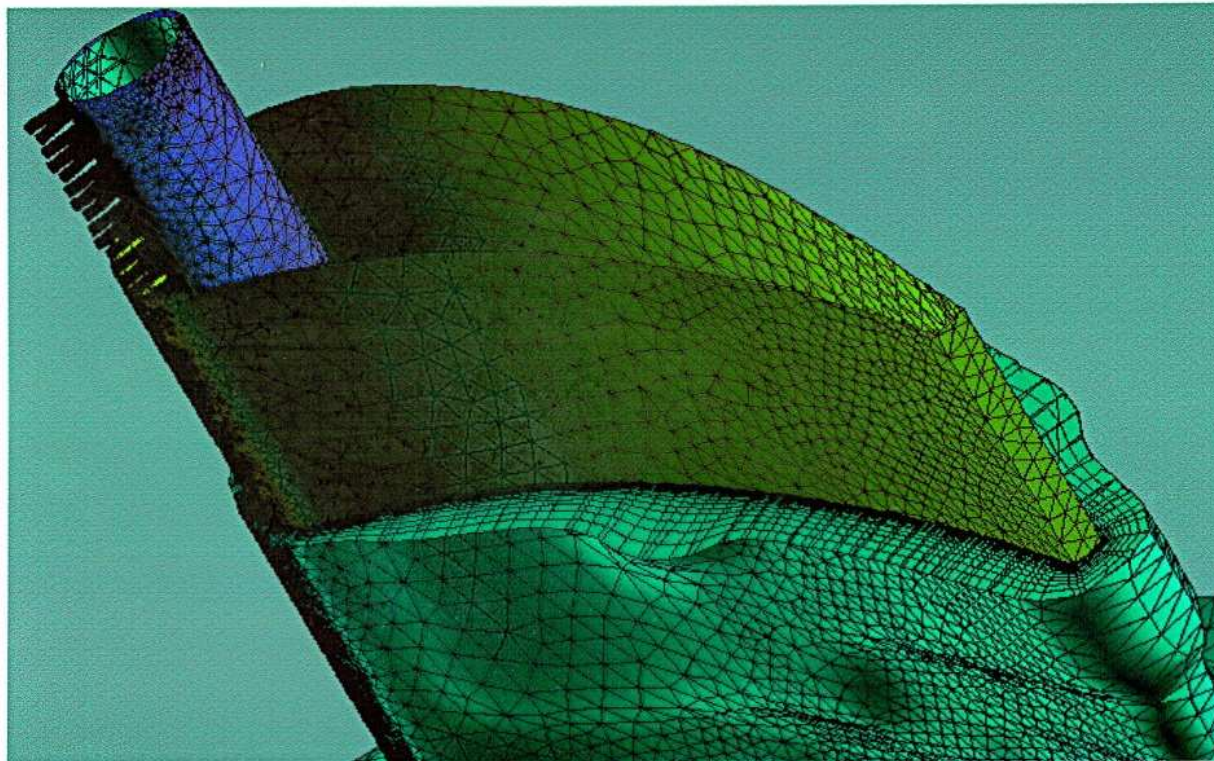
Departement Mathematik

ETH Zürich

## Fig. 20. Gitter auf einer Turbinenschaufel

Rechnergestützte Wissenschaften  
Computational Science and Engineering

RW



Mesh for turbine blade with an internal cooling system (ABB Corporate Research Ltd.)

Departement Mathematik

ETH Zürich

## 4.2. Schlussfolgerungen

- Die Größe der in Technik und Wissenschaft zu lösenden Gleichungssysteme hat keine Grenzen. Heute möglich:  $10^6 \dots 10^9$  Unbekannte.
- Es gibt Lösungsverfahren, die mit Speicherplatz in der Größenordnung der für das Problem relevanten Datenmenge auskommen.
- Es gibt "schnelle" Algorithmen, welche gigantische, **schwach besetzte** lineare Gleichungssysteme in vernünftiger Zeit lösen können.
- Dazu gehören Weiterentwicklungen (ab ca. 1950) der hier diskutierten Ideen:
  - Mehrgitterverfahren (Multigrid)
  - Allgemeine **iterative** Verfahren für lineare Gleichungssysteme: Verfahren der konjugierten Gradienten, Krylovraum-Verfahren, ...

### 4.3. Wieviel Erde – wieviele Gleichungen braucht der Mensch?

**Leo Tolstoj 1887**

Wieviel Erde braucht der Mensch?

**Angewandte Mathematik**  $n$  Gleichungen,  $n=?$

Gemeinsam in beiden Fällen: **Man ist unersättlich**

Anzahl  $n$  von Gleichungen beliebig groß,  $n = 10^6$ ,  $n = 10^9$  und mehr.

**Tabellarisch:**

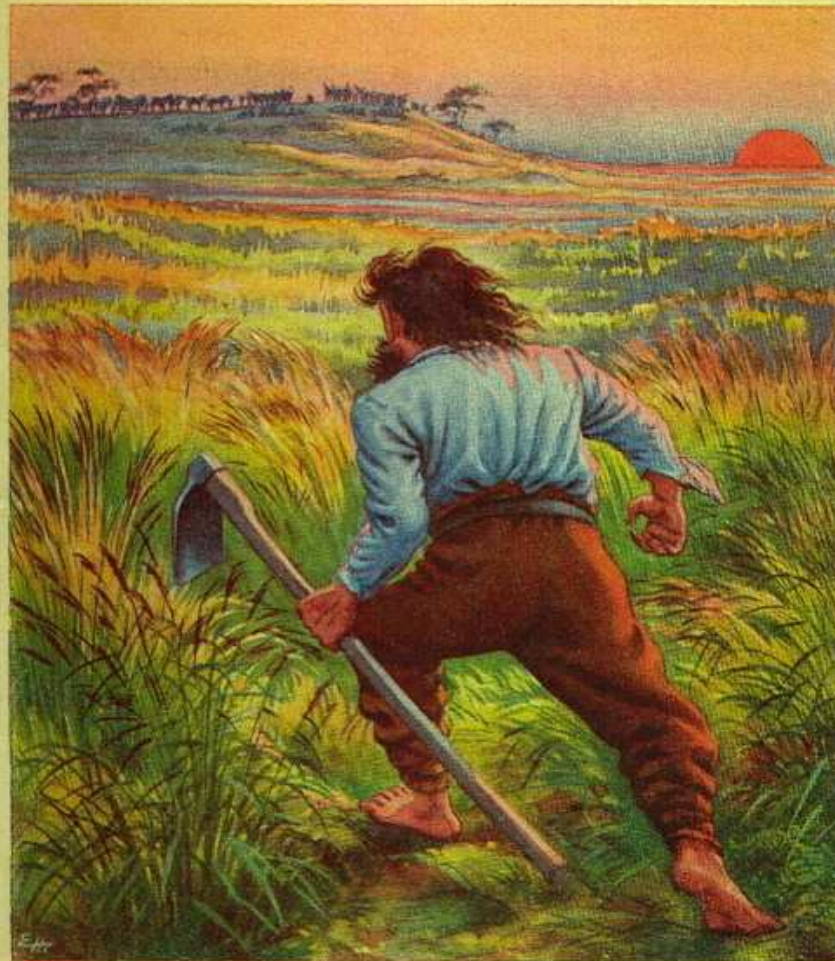
$$\begin{array}{cccc|c}
 x_1 & x_2 & \cdots & x_n & 1 \\
 \hline
 a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\
 a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\
 \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
 a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n
 \end{array}$$

**Mit Summenzeichen:**

$$\boxed{\sum_{k=1}^n a_{jk} x_k = b_j, \quad j = 1, 2, \dots, n} \quad (17)$$

# Wieviel Erde braucht der Mensch?

von Leo N. Tolstoj



Gute Schriften Zürich

Heft Nr. 128. Preis 70 Rp.

## Vektoren und Matrizen

Mathematiker haben sich etwas ausgedacht, um dieses Monstrum einfach zu schreiben (und um eine übersichtliche Theorie zu entwickeln).

**Definition:** Kolonnen-Matrizen (auch **Kolonnenvektoren** genannt) und quadratische Matrizen

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Die Matrix  $A$  ist ein quadratisches Schema von  $n \times n$  Zahlen.

## Operationen

(i) **Addition** gleichartiger Matrizen (oder Vektoren): **elementweise**

(ii) **Produkt:** **Matrix  $A$  mal Vektor  $\vec{x}$**

Resultat ist ein gleichartiger Vektor

**Definition** für  $n = 3$ :

$$A \cdot \vec{x} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 \end{pmatrix}$$

Der links stehende Faktor  $A$  wird zeilenweise durchlaufen, der rechts stehende Faktor  $\vec{x}$  kolonnenweise; die Teilprodukte werden summiert.

**Man kann mit Matrizen rechnen (fast) wie mit Zahlen.**



## Zum Schluss

Damit schreibt sich das Gleichungssystem (17) als **eine einzige** Gleichung,

$$\boxed{A \cdot \vec{x} = \vec{b}} \quad (18)$$

**Der (moderne wissenschaftliche) Mensch braucht zwar Systeme von **sehr vielen** Gleichungen, aber er schreibt sie meist als **eine einzige (Vektor-)Gleichung.****

**Nicht tragisch wie bei Tolstoj, aber analog !**