

Was ist Mathematik ?

Jörg Waldvogel, ETH Zürich
Seminar für Angewandte Mathematik

5. September 2012
Flying Science, Amt für Statistik, Basel

Übersicht

1. Was ist Mathematik ?
2. Zählen
3. Rechnen
4. Mathematik als universelle Sprache
5. Unbekannte und Gleichungen
6. Geometrie
7. Beschreibung von Natur und Technik

1. Was ist Mathematik ?

Einige Zitate aus dem Alltag:

- Da war ich nie gut, ich war nicht so gescheit.
- Es hätte mich schon interessiert, aber ich hab's nie begriffen.
- Im Restaurant: Du bist Mathematiker, zähl' doch rasch zusammen.
- Mein Professor (Heinz Hopf): $16 + 27$? Dies kann ich nicht, sagen Sie es mir doch bitte rasch.

Zusammengefasst:

- Mathematik erscheint offenbar häufig als ganz schwierig, kompliziert, unerreichbar, Ehrfurcht erweckend.
- Mathematik hat etwas mit Zahlen und Rechnen zu tun; sonst ist aber nicht klar, wo man ihre Ergebnisse brauchen kann.
- Mathematiker nehmen es immer sehr genau, übertrieben genau.

Die Geschichte vom Ballonfahrer

Ein Ballonfahrer gerät in den Nebel. In einem Nebelloch entdeckt er einen Wanderer und senkt die Flughöhe.

Ballonfahrer (ruft):

Wo bin ich ?

Wanderer (nach kurzer Pause):

In einem Ballon.

Ballonfahrer:

Danke. Gewiss sind Sie Mathematiker.

Wanderer:

Stimmt. Woher wussten Sie dies so sicher ?

Ballonfahrer:

1. Sie haben die Antwort gut überlegt.
2. Die Antwort ist zweifelsfrei richtig.
3. Die Antwort ist total unnütz.

Ziele: Korrektur dieser Vorstellungen

- Ich bin Mathematiker, aber sonst normal.
- Mathematik ist eine Wissenschaft wie viele andere auch, nicht komplizierter.
- Die Mathematik ist sogar einfacher, übersichtlicher als manch andere Wissenschaft, z.B. Humanmedizin.
- Die Mathematik versucht, für scheinbar komplizierte Dinge einfache Darstellungen zu finden.
- Mit sehr komplizierten Vorgängen (z.B. Berechnung des globalen Wetters) hat auch die Mathematik Mühe.
- Voraussetzungen: Interesse, besser noch Faszination für zahlenmäßige und logische Zusammenhänge, Neugier, Ausdauer, sprachliche Kompetenz.

2. Zählen

Die ganzen Zahlen: Vorwärts und rückwärts zählen

... -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 ...

- -1 heißt **minus eins**, volkstümlich **eins unter Null**
- Links von Null stehen die **negativen (ganzen) Zahlen**
- Addition: von 5 aus um 3 nach rechts: $5 + 3 = 8$
- Einführung von Symbolen, z.B. a für 5, b für 3: $a + b = 8$
- Man kann auch von 3 aus um 5 nach rechts gehen : $3 + 5 = 8$
- Gleich viele Zählsschritte, also: $a + b = b + a$ (kommutatives Gesetz)
- Subtraktion: $a - b$: von a aus um b Schritte nach **links**
- Also: $8 - 3 = 5$, aber $3 - 5 = ?$ Der Erstklässler: **Geht nicht!**
- Mit negativen Zahlen ist jede Subtraktion ausführbar: $3 - 5 = -2$

Geschichte der negativen Zahlen

- China: 100 BC - 50 BC , Konzept vorhanden
- Indien: 628 AD, Brahmagupta führt negative Zahlen ein
- Araber: 800 AD - 1000 AD, Gebrauch von negativen Zahlen
- Griechen, Römer, Europa: Strikte Ablehnung der negativen Zahlen

Noch 1759 schreibt der namhafte englische Mathematiker **Francis Maseres** (1731-1824):

“Negative numbers darken the very whole doctrines of the equations and make dark of the things which are in their nature excessively obvious and simple.“

Erst im 19. Jahrhundert begannen sich die negativen Zahlen langsam durchzusetzen. Im Buchhaltungswesen und bei den Historikern sind sie bis heute nicht wirklich akzeptiert.

Negative Zahlen im Buchhaltungswesen ...

... 6 5 4 3 2 1 -.- 1 2 3 4 5 6 ...

Gebräuchliche Notationen zur Vermeidung von negativen Zahlen:

Positive Zahlen: Haben credit schwarze Farbe rechte Kolonne

Negative Zahlen: Soll debit rote Farbe linke Kolonne (....)

... und bei den Historikern (BC = v.Chr., AD = n.Chr.)

... 4 BC 3 BC 2 BC 1 BC 1 AD 2 AD 3 AD 4 AD ...

Das Jahr Null fehlt! Man hatte vergessen, dieses einzuführen. Eine Gelegenheit wäre vielleicht die Kalenderreform von Papst Gregor XIII im Jahr 1582 gewesen.

Altersberechnung auf Jahre genau

G = Geburtsjahr, T = Todesjahr, A = Alter in Jahren

Gaius Julius Caesar	100 BC	bis	44 BC	$A = G - T = 56$
---------------------	--------	-----	-------	------------------

Sulpicius Quirinius	51 BC	bis	21 AD	$A = G - 1 + T = 71$
---------------------	-------	-----	-------	----------------------

Heinrich Pestalozzi	1746 AD	bis	1827 AD	$A = T - G = 81$
---------------------	---------	-----	---------	------------------

Die Mathematik vereinfacht dies: Einführung der Jahresnummern 0 für 1 BC und $-1, -2, \dots$ für 2 BC, 3 BC, \dots . Dann gilt immer

$$A = T - G$$

	G	T	A =	
Gaius Julius Caesar	-99	-43	$-43 - (-99)$	= 56
Sulpicius Quirinius	-50	21	$21 - (-50)$	= 71
Heinrich Pestalozzi	1746	1827	$1827 - 1746$	= 81

3. Rechnen

Multiplikationstabelle: Die Produkte $a \cdot b$:

$a \backslash b$	-2	-1	0	1	2
-2	4	2	0	-2	-4
-1	2	1	0	-1	-2
0	0	0	0	0	0
1	-2	-1	0	1	2
2	-4	-2	0	2	4

Diese Definition des linken oberen Quadranten ist die konsequente Fortsetzung der übrigen drei Quadranten. Die vernünftige Definition ist deshalb: $(-1) \cdot (-1) = 1$.

Die Potenz

Produkte von gleichen Faktoren:

$$\underbrace{2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2}_{5 \text{ Faktoren}} = 2^5, \quad \text{“ 2 hoch 5 “}$$

Die Zahl 2 heißt **Basis** b der Potenz, die Zahl 5 heißt deren **Exponent** e .

Multiplikation von Potenzen mit gleicher Basis:

$$2^5 \cdot 2^3 = 2^{5+3}, \quad \text{insgesamt } 5+3=8 \text{ Faktoren } 2.$$

Allgemein:

$$b^e \cdot b^f = b^{(e+f)}$$

Man kann (soll!) die Potenz mit negativen Exponenten so definieren, dass diese Regel (fast) immer gilt, z.B. mit $f = -e$:

$$b^e \cdot b^{-e} = b^0 = 1, \quad \text{also } b^{-e} = \frac{1}{b^e}$$

Alltägliche Relevanz der Potenz

(a) Unser Zahlssystem: Dezimales Positionssystem.

Ältester bekannter Text: 478 AD, Indien.

Frühestes Symbol für Null (ein kleiner Kreis): 876 AD, Gwalior, Indien.

Beispiel: $2012 = 2 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

Zum Vergleich die Römische Zahl: $2012 = \text{MMXII}$

(b) Große Zahlen.

1 000	10^3	Tausend	thousand
1 000 000	10^6	Million	million
1 000 000 000	10^9	Milliarde	billion
1 000 000 000 000	10^{12}	Billion	trillion
1 000 000 000 000 000	10^{15}	Billiarde	quadrillion
1 000 000 000 000 000 000	10^{18}	Trillion	quintillion

Klammern

Konvention: In gemischten Ausdrücken Potenzen zuerst ausführen, dann Multiplikationen oder Divisionen, zuletzt Additionen oder Subtraktionen.

Beispiel: $2 + (3 \cdot 4) = 2 + 3 \cdot 4 = 14$, $(2 + 3) \cdot 4 = 20$

Im ersten Fall sind die Klammern fakultativ; im zweiten Fall erzwingen die Klammern, dass die Addition zuerst ausgeführt wird.

Distributivgesetz: “Klammern lösen“

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c$$

Anwendung: $(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$

Beispiel: $a = 25$, $b = 1$ ergibt $26 \cdot 24 = 25^2 - 1 = 624$

4. Mathematik als universelle Sprache

(a) Beschreibung von Rechenvorgängen.

Beispiel. Fallhöhe h aus Fallzeit t :
$$h = \frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2$$
, wobei

h = Fallhöhe in m

g = 9.81 m/sec² (Erdbeschleunigung)

t = Fallzeit aus der Ruhelage in sec

(b) Beschreibung von logischen Schlüssen.

Aussage Dieses Bild zeigt Hunde **und** Katzen

Gegenteil Dieses Bild zeigt **nicht** (Hunde **und** Katzen)

äquivalent Dieses Bild zeigt keine Hunde **oder** keine Katzen

Logik, Fortsetzung

Mathematische Zusammenfassung

Die Symbole A, B stehen für **Aussagen**, können **wahr** oder **falsch** sein, z.B. A = "Dieses Bild zeigt Hunde", B = "Dieses Bild zeigt Katzen".

Aussage von Seite 13: A und B. Gegenteil: nicht (A und B)

Regel:

$$\text{nicht (A und B)} = (\text{nicht A}) \text{ oder } (\text{nicht B})$$

Theorem und Umkehrung

Theorem: Jeder Pudel ist ein Hund wahr

Umkehrung: Jeder Hund ist ein Pudel falsch

Kontraposition: Ein Tier, das kein Hund ist, ist kein Pudel wahr

Die Kontraposition folgt aus dem Theorem, muss nicht neu bewiesen werden.

5. Unbekannte und Gleichungen

Beispiel: Wann kurz nach 1 Uhr decken sich beide Uhrzeiger?

Methode: Unbekannte einführen, z.B. x, y, \dots

Bedingungen formulieren, ergibt Gleichungen für x, y, \dots

Gleichungen lösen

Unbekannte: Zeiger decken sich x Minuten nach 1 Uhr

Bedingung:

$$x = 5 + \frac{x}{12}$$

Lösung: Auf beiden Seiten der Gleichung zuerst $\frac{x}{12}$ subtrahieren, dann durch $\frac{11}{12}$ dividieren. Dies ergibt

$$x = \frac{12}{11} \cdot 5 \text{ min} = \frac{60}{11} \text{ min} = 5 \text{ min } 27.3 \text{ sec}$$

6. Geometrie (a) Der Kreisumfang.

u = Umfang eines Kreises mit Durchmesser d . Wir schreiben $u = d \cdot \pi$

1. **Könige 7, 23:** “Und er [Hiram für König Salomo] machte das Meer [Taufbecken], gegossen, 10 Ellen von seinem einen Rand bis zu seinem anderen Rand, ringsum rund und 5 Ellen seine Höhe; und eine Messschnur von 30 Ellen umspannte es ringsherum.“

Kenntnis von π hat alltägliche Relevanz!

König Salomo	$\pi \approx 3$
Zürcher Schulen	$\pi \approx \frac{22}{7} = 3.1428571428\dots$
Bemerkenswert	$\pi \approx \frac{355}{113} = 3.1415929203\dots$
J. W. früher einmal	$\pi \approx 3.141592653589793238462643383$
Yasumasa Kanada, 2002	1 241 100 000 000 Dezimalziffern

Der Lehrsatz des Pythagoras (580 .. 572 BC - 500 .. 490 BC)

(b) Das rechtwinklige Dreieck.

$a, b =$ Katheten, $c =$ Hypotenuse (dem rechten Winkel gegenüber)

Theorem:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Beispiel:

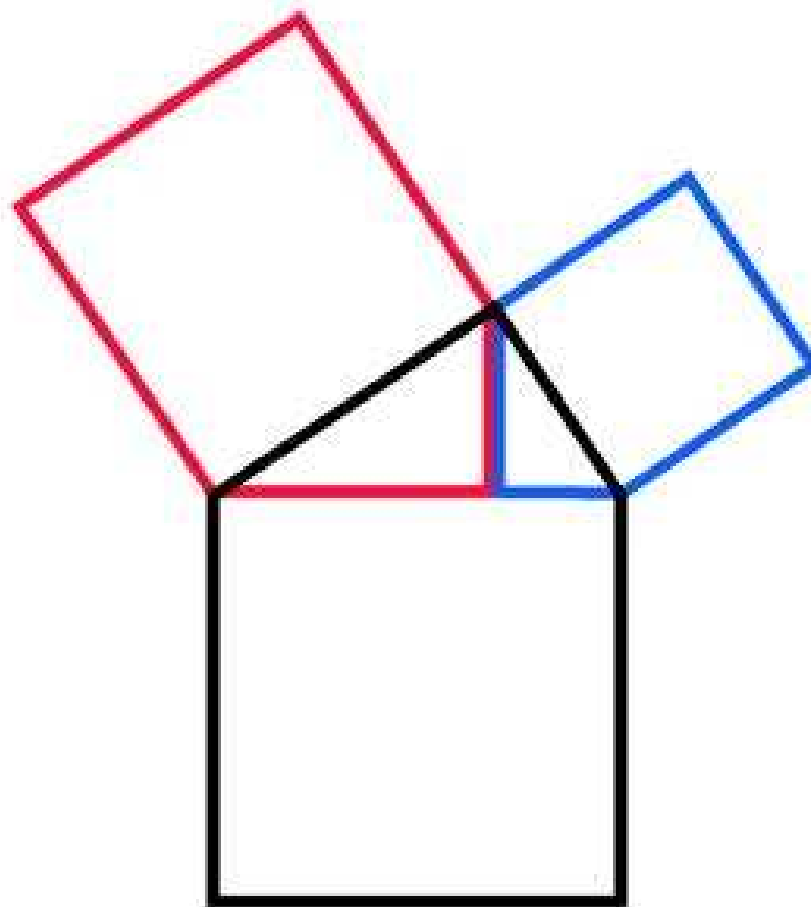
$$a = 3, b = 4, c = 5; \quad 9 + 16 = 25$$

Eine Anwendung:

Abstecken eines rechten Winkels im Gelände

Beweis:

“Ich bin auch ein Beweis“. Ohne Text, siehe!
Figur von Prof. emer. Christian Blatter, ETH



ICH BIN AUCH EIN BEWEIS.

Schlussfolgerungen

- Die Mathematik ist eine universelle Sprache zur Beschreibung von Rechenvorgängen, logischen Schlüssen, geometrischen Situationen, etc.
- Die Mathematik betrachtet auch andere Strukturen als Zahlen, zum Beispiel Mengen, Aussagen, Figuren, etc.
- Die Mathematik ist bestrebt, mit wenigen und möglichst einfachen Verfahrensregeln auszukommen.
- Wichtige Anwendungen sind z. B. Modellierung (d.h. rechnerische Nachbildung auf dem Computer, Vorhersage) von Vorgängen aus Natur und Technik.