

Asymptotische Methode zur Berechnung elektrostatischer Kräfte

Diplomarbeit
Mathematikdepartement
ETH Zurich

Betreuer: Prof. Ralf Hiptmair

von Oliver Pfeifer

6. März 2006

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	2
2	Direkte Methode	3
2.1	Beschreibung des Verfahrens	3
2.2	Fehlerabschätzung	5
2.2.1	Fehler bei der Randapproximation	5
2.2.2	Fehler bei der Approximation des Gradienten	8
2.2.3	Fehler bei Approximation von $\int_{\Gamma} (\frac{\partial u}{\partial n})^2 dx$	9
2.3	Numerische Resultate	10
3	Asymptotische Methode	14
3.1	Problemstellung	14
3.1.1	Eigenschaften der Funktionen $[\varepsilon \rightarrow u_{\varepsilon} _{\Gamma}]$ und $[\varepsilon \rightarrow \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n}]$	15
3.1.2	Berechnung von $\int_{\Gamma} (\frac{\partial u}{\partial n})^2 dS$	18
3.2	Fehlerabschätzung	21
3.2.1	Fehlerabschätzung für die Approximation in $\varepsilon_1, \varepsilon_2$	21
3.2.2	Fehlerabschätzung in $h, \varepsilon_1, \varepsilon_2$	22
3.2.3	Wahl von ε_1 und ε_2	26
3.3	Asymptotische Entwicklung und Extrapolation	27
3.3.1	Asymptotische Entwicklung von u_{ε}	27
3.3.2	Asymptotische Entwicklung von $J(\varepsilon)$	29
3.3.3	Beweis von $J_1 = F$	30
3.3.4	Extrapolation	31
3.4	Sattelpunktformulierung	33
3.5	Numerische Resultate	35
3.5.1	Untersuchungen zur Standardformulierung	35
3.5.2	Untersuchungen für Sattelpunktformulierung	51
4	Schlussfolgerungen	53
5	Implementierung	54

1 Einleitung

Das elektrostatische Potenzial in einem beschränkten Gebiet Ω , bei gegebener Spannung auf dem Rand $\partial\Omega$, genügt der Gleichung

$$-\Delta u = 0, \quad u = g \text{ auf } \partial\Omega.$$

Die totale elektrostatische Kraft auf einer zusammenhängenden Komponente Γ von $\partial\Omega$ ist dann gegeben durch das Funktional

$$F = \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS.$$

Das Ziel dieser Arbeit ist es nun, zwei verschiedene Methoden zur numerischen Berechnung von $\int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS$ zu untersuchen, wobei u Lösung ist von

$$(1.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \partial\Omega, \end{cases}$$

und f und g gegebene Funktionen sind.

Zum einen ist da die klassische Methode, bei der das Problem (1.1) und danach das Funktional direkt ausgerechnet wird.

Auf der anderen Seite die zweite Methode, die auf der Arbeit von M. Raffy [Raf75] beruht. Dabei ersetzen wir (1.1) zunächst durch ein Problem, welches von einem Parameter ε abhängt,

$$(1.2) \quad \begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = f & \text{in } \Omega \\ u_\varepsilon + \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = g & \text{auf } \partial\Omega. \end{cases}$$

Zusätzlich definieren wir das Funktional $J(\varepsilon) = \int_{\Omega} f u_\varepsilon dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 dS$, und werden schliesslich sehen, dass gilt

$$\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\partial\Omega} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS.$$

Eine numerische Approximation von $\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}$ ist somit auch eine für das Funktional F . Der Vorteil dabei ist, dass das Integral über den Rand $\partial\Omega$ ersetzt wird durch ein Integral über das Gebiet Ω , welches besser zu berechnen ist.

2 Direkte Methode

2.1 Beschreibung des Verfahrens

Wie schon erwähnt, wollen wir folgendes Integral berechnen:

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS.$$

Dabei ist u die Lösung des Problems

$$(2.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \Gamma = \partial\Omega. \end{cases}$$

Wie der Name schon sagt, wird bei der direkten Methode das Problem (2.1) zunächst direkt ausgerechnet, d.h. wir suchen eine diskrete Approximation der Lösung u . Daraus erhalten wir dann eine diskrete Approximation der Normalenableitung und schliesslich berechnen wir eine Näherungslösung für das Integral.

Wir transformieren das Problem zunächst in eines mit homogenen Randdaten. Sei $u_0 \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega}) \cap H^1(\Omega)$ eine Funktion, welche auf dem Rand von Ω mit g übereinstimmt. Für $w = u - u_0$ gilt dann:

$$(2.2) \quad \begin{cases} -\Delta w = f_1 = f + \Delta u_0 & \text{in } \Omega \\ w = 0 & \text{auf } \Gamma. \end{cases}$$

Die schwache Formulierung von (2.2) lautet:

Finde $w \in V = H_0^1(\Omega)$ mit

$$a(w, v) = \langle f_1, v \rangle \quad \forall v \in V = H_0^1(\Omega),$$

wobei $a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx$ die zum Differentialoperator $L = -\Delta$ gehörige Bilinearform und $\langle f, v \rangle = \int_{\Omega} f v \, dx$ das Skalarprodukt auf $L^2(\Omega)$ ist.

Für die Finite Elemente Approximation betrachten wir nun eine Triangulierung \mathcal{T}_h des Gebiets Ω , wobei h die Länge der längsten Kante bezeichnet. Ω_h bezeichne alle Knotenpunkte im Innern von Ω und Γ_h alle Randknotenpunkte, $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$. Weiter sei $V_h(\Omega_h) \subset V$ der endlichdimensionale Raum der Finiten Elemente Funktionen mit zugehöriger Basis $\{\phi_i, i = 1, \dots, N = \#\Omega_h\}$.

Das diskrete Problem lautet dann: Finde $w_h \in V_h(\Omega_h)$, so dass

$$a(w_h, v_h) = \langle f_1, v_h \rangle \quad \forall v_h \in V_h(\Omega_h).$$

Mit dem Ansatz

$$w_h = \sum_{k=1}^N a_k \phi_k,$$

ist dies äquivalent ist zum linearen Gleichungssystem

$$Aw = b,$$

mit $A_{ij} = a(\phi_j, \phi_i)$, $w = (a_1, \dots, a_N)$ und $b_i = \langle f_1, \phi_i \rangle$.

Schliesslich erhalten wir mit

$$u_h(P) = w_h(P) \quad \text{für } P \in \Omega_h$$

$$u_h(P) = g(P) \quad \text{für } P \in \Gamma_h,$$

die Finite Elemente Lösung $u_h \in V_h(\bar{\Omega}_h) \subset H^1(\Omega)$.

Aus der FE-Lösung $u_h \in V_h$ lässt sich nun der Gradient ∇u_h berechnen. Im Fall von linearen Finiten Elementen sieht dies wie folgt aus.

Die Vereinigung aller Randkanten wird mit $\hat{\Gamma}_h$ bezeichnet und $[\hat{\Gamma}_h]$ ist die Menge aller Knotenmittelpunkte von $\hat{\Gamma}_h$. Für einen Punkt $\omega \in [\hat{\Gamma}_h]$ sei $l_h(\omega)$ die Länge der Randkante, die ω enthält und \vec{n}_ω die äussere Normale zu $\hat{\Gamma}_h$ im Punkt ω . K bezeichnet die Anzahl Randkanten.

Dann setzen wir $W_h([\hat{\Gamma}_h]) \hat{=} R^K$ als den Raum derjenigen Funktionen, welche konstant sind entlang einer Kante von $\hat{\Gamma}_h$, mit Skalarprodukt

$$(v_h, w_h)_{W_h([\hat{\Gamma}_h])} = \sum_{\omega \in [\hat{\Gamma}_h]} u_h(\omega) v_h(\omega) l_h(\omega)$$

und entsprechender Norm

$$\|u_h\|_{W_h([\hat{\Gamma}_h])} = \left(\sum_{\omega \in [\hat{\Gamma}_h]} [u_h(\omega)]^2 l_h(\omega) \right)^{1/2}$$

Dies führt uns schliesslich auf folgende Definition:

Definition. Wir definieren als Approximation von $\frac{\partial}{\partial n}$

$$\begin{aligned} G_h : \quad V_h(\bar{\Omega}_h) &\longrightarrow W_h([\hat{\Gamma}_h]) \\ u_h &\longmapsto G_h u_h \quad \text{mit } (G_h u_h)(\omega) = \nabla u_h(\omega) * n_\omega. \end{aligned}$$

Und schliesslich erhalten wir

$$\|G_h u_h\|_{W_h([\hat{\Gamma}_h])}^2 = \sum_{\omega \in [\hat{\Gamma}_h]} [(G_h u_h)(\omega)]^2 l_h(\omega)$$

als Approximation von $\int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS$.

2.2 Fehlerabschätzung

Wir wollen nun den Fehler für die direkte Methode bei der Verwendung von linearen Finiten Elementen abschätzen.

Wir nehmen dazu an, dass das Gebiet Ω eine offene Menge in \mathbb{R}^2 und der Rand Γ von Ω zweimal stetig differenzierbar ist. Für die Krümmung c von Γ soll gelten:

$$\sup_{P \in \Gamma} c(P) = C_1 < \infty.$$

Weiter nehmen wir an, dass die Lösung u des Problems (2.1) in $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ enthalten und D^2u beschränkt ist.

2.2.1 Fehler bei der Randapproximation

Lemma 2.1. Sei $(y_l)_{l \geq 0}$ eine Familie von zweifach differenzierbaren Funktionen auf $[0, 1]$, so dass $y_l(0) = y_l(1) = 0$.

Die nicht orientierte Krümmung c_l des Graphen von y_l soll der Bedingung $\sup_{x \in [0,1]} c_l(x) \leq Kl$ genügen, wobei K eine Konstante ist.

Bezeichnet σ_l die Länge des Bogenstückes, definiert durch y_l auf $[0, 1]$, so gilt

$$\sigma_l \leq 1 + (Kl)^2 \quad \text{für } l \in [0, \frac{1}{2} \inf(1, \frac{1}{K})].$$

Beweis: Die Krümmung an der Stelle $P = (x, y_l(x))$ lautet

$$c_l(x) = \frac{|y_l''(x)|}{(1 + y_l'(x)^2)^{3/2}}.$$

Setzt man $\Phi(t) = \frac{t}{(1+t^2)^{1/2}}$, so gilt

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \Phi(y_l'(x)) &= \frac{d}{dx} \frac{y_l'(x)}{(1 - y_l'(x)^2)^{1/2}} \\ &= \frac{y_l''(x)(1 - y_l'(x)^2)^{1/2} - y_l'(x) \frac{1}{2} (1 - y_l'(x)^2)^{-1/2} (-2y_l'(x)) y_l''(x)}{(1 - y_l'(x)^2)} \\ &= \frac{y_l''(x)[(1 - y_l'(x)^2) + y_l'(x)^2]}{(1 - y_l'(x)^2)^{3/2}} = \frac{y_l''(x)}{(1 - y_l'(x)^2)^{3/2}}, \end{aligned}$$

und somit

$$\sup_{x \in [0,1]} c_l(x) \leq Kl \Rightarrow -Kl \leq \frac{d}{dx} \Phi(y_l'(x)) \leq Kl \quad \forall x \in [0, 1].$$

Sei $\mu_l \in (0, 1)$ so dass $y_l'(\mu_l) = 0$, also auch $\Phi(y_l'(\mu_l)) = 0$, dann folgt für $x \in [0, 1]$

$$\pm \Phi(y_l'(x)) = \mp \int_x^{\mu_l} \frac{d}{ds} \Phi(y_l'(s)) ds \leq \int_x^{\mu_l} Kl dx = Kl(\mu_l - x),$$

$$\Rightarrow \Phi(y'_i(x)) \leq Kl|x - \mu_l| \leq Kl,$$

d.h.

$$\begin{aligned} y'_i(x)^2 \leq (Kl)^2(1 + y'_i(x)^2) &\Rightarrow y'_i(x)^2 \leq \frac{(Kl)^2}{1 - (Kl)^2}, \\ &\Rightarrow y'_i(x) \leq \frac{Kl}{\sqrt{1 - (Kl)^2}}. \end{aligned}$$

Und somit gilt für die Bogenlänge

$$\sigma_l = \int_0^1 |y_l(t)| dt \leq \frac{Kl}{\sqrt{1 - (Kl)^2}}$$

und für $l \leq \frac{1}{2} \inf(1, \frac{1}{K})$

$$\sigma_l \leq \frac{1}{\sqrt{1 - (Kl)^2}} \leq 1 + (Kl)^2.$$

□

Lemma 2.2. Sei Γ eine geschlossene Kurve, welche zweimal stetig differenzierbar ist, mit Krümmung c so dass

$$\sup_{P \in \Gamma} c(P) = C_1 < \infty.$$

Dann gilt für $h \in [0, \frac{1}{2} \inf(1, \frac{1}{C_1})]$,

$$|\Gamma| - |\Gamma_h| \leq |\Gamma| C_1^2 h^2.$$

Beweis: Es bezeichne l_i die Länge einer Seite von Γ_h und σ_i die Länge des entsprechenden Kurvenstückes von Γ über dieser Seite, gegeben durch die Funktion $y_i(x) : [0, l_i] \rightarrow \mathbb{R}$.

Wir setzen $y(x) = \frac{1}{l_i} y_i(l_i x) : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und somit ist

$$y(0) = y(1) = 0, \quad y'(x) = y'_i(l_i x), \quad y''(x) = l_i y''_i(l_i x).$$

Für die Krümmung c_y der Kurve y gilt

$$\begin{aligned} c_y &= \frac{|y''(x)|}{(1 + y'(x)^2)^{3/2}} = \frac{l_i |y''_i(l_i x)|}{(1 + y'_i(l_i x)^2)^{3/2}}, \\ &\Rightarrow \sup_{x \in [0, 1]} c_y = \underbrace{\sup_{x \in [0, l_i]} \frac{|y''_i(x)|}{(1 + y'_i(x)^2)^{3/2}}}_{c_i} l_i \leq C_1 l_i. \end{aligned}$$

Die Länge des Graphen von y ist

$$\sigma = \int_0^1 |y'(x)| dx = \int_0^1 |y'_i(l_i x)| dx \stackrel{z=l_i x}{=} \frac{1}{l_i} \int_0^{l_i} |y'_i(z)| dz = \frac{\sigma_i}{l_i}.$$

Mit dem Lemma 2.1 folgt nun

$$(2.3) \quad \frac{\sigma_i}{l_i} = \sigma \leq 1 + C_1^2 l_i^2 \quad \text{für } l_i \in [0, \frac{1}{2} \inf(1, \frac{1}{C_1})],$$

$$\Rightarrow \sigma_i - l_i \leq C_1^2 l_i^3 \leq C_1^2 h^2 l_i \quad \forall i \quad \text{für } h \in [0, \frac{1}{2} \inf(1, \frac{1}{C_1})],$$

und somit gilt

$$|\Gamma| - |\Gamma_h| = \sum_i (\sigma_i - l_i) \leq C_1^2 h^2 \sum_i l_i = C_1^2 h^2 |\Gamma_h| \leq C_1^2 |\Gamma| h^2.$$

□

Im folgenden sei $h \in [0, \frac{1}{2} \inf(1, \frac{1}{C_1})] = I_\Gamma$.

Es sei AB eine Seite von $\hat{\Gamma}_h$ und ω ihr Mittelpunkt. Weiter bezeichne \vec{n}_ω den Einheitsnormalenvektor und \vec{t}_ω den Einheitstangentenvektor zu $\hat{\Gamma}_h$ im Punkt ω . Entsprechend sind $\vec{n}(s)$ und $\vec{t}(s)$ die Einheitsvektoren im Punkt $P(s) \in \Gamma$, wobei $s \in [0, |\widehat{AB}|]$ die Bogenlänge ist. Schlussendlich sind \vec{x} und \vec{y} noch die Einheitsvektoren des Referenzkoordinatensystems.

Lemma 2.3. Γ erfülle die Bedingungen von Lemma 2.2 und es sei $h \in I_\Gamma$, dann gilt:

$$\|\vec{n}_\omega - \vec{n}(s)\|_\infty \leq \frac{5}{4} C_1 h.$$

Beweis: Für die x-Komponente von \vec{n}_ω und $\vec{n}(s)$ gilt

$$(\vec{n}_\omega)_x = \cos(\vec{n}_\omega, \vec{x}), \quad (\vec{n}(s))_x = \cos(\vec{n}(s), \vec{x}).$$

Daraus folgt aber

$$|(\vec{n}_\omega)_x - (\vec{n}(s))_x| = |\cos(\vec{n}_\omega, \vec{x}) - \cos(\vec{n}(s), \vec{x})| = |(\vec{t}_\omega - \vec{t}(s)) \cdot \vec{y}|,$$

da

$$\begin{aligned} \vec{t}_\omega \cdot \vec{y} &= |\vec{y}| |\vec{t}_\omega| \cos(\vec{t}_\omega, \vec{y}) = \cos(\vec{n}_\omega, \vec{x}), \\ \vec{t}(s) \cdot \vec{y} &= |\vec{y}| |\vec{t}(s)| \cos(\vec{t}(s), \vec{y}) = \cos(\vec{n}(s), \vec{x}). \end{aligned}$$

Sei $\xi \in (0, |\widehat{AB}|)$, so dass $\vec{t}(\xi) = \vec{t}_\omega$,

$$\Rightarrow [\vec{t}(\xi) - \vec{t}(s)]_y = |\xi - s| [\vec{t}'(\mu)]_y \quad \text{mit } \mu \in (0, \xi).$$

Weiter gilt $\vec{t}'(\mu) = c(\mu)\vec{n}(\mu)$, wobei $c(\mu)$ die Krümmung von Γ an der Stelle μ ist.

Zusammen ergibt sich

$$|(\vec{n}_\omega)_x - (\vec{n}(s))_x| = |(\vec{t}'_\omega - \vec{t}'(s))_y| = |\xi - s| |[\vec{t}'(\mu)]_y| \leq |\xi - s| c(\mu) \leq C_1 |\widehat{AB}|.$$

Analog folgt für die y-Komponente

$$|(\vec{n}_{\Gamma_i})_y - (\vec{n}(s))_y| \leq C_1 |\widehat{AB}|.$$

Es bleibt zu zeigen:

$$|\widehat{AB}| \leq \frac{5}{4}h.$$

Aus der Beziehung (2.3) folgt

$$|\widehat{AB}| \leq h(1 + C_1^2 h^2) \quad \text{für } h \in [0, \frac{1}{2} \inf(1, \frac{1}{C_1})],$$

und somit

$$|\widehat{AB}| \leq h(1 + \frac{1}{4}) = \frac{5}{4}h.$$

□

2.2.2 Fehler bei der Approximation des Gradienten

Wir bezeichnen mit G die Menge aller Dreieckskanten im Innern von Ω und mit θ_h den kleinsten Winkel der Triangulation \mathcal{T}_h . Wir nehmen an, dass ein $\theta > 0$ existiert, so dass $\theta_h > \theta$ für alle h .

Unter den obigen Bedingungen gilt folgendes Lemma:

Lemma 2.4. *[BS02, Thm 8.1.11] Sei Ω offen, zusammenhängend, und der Rand Γ sei zweimal stetig differenzierbar mit $\sup_{P \in \Gamma} c(P) = C_1 < \infty$. Falls die Lösung u des Problems enthalten ist in $C^1(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$, mit D^2u beschränkt, dann gilt:*

$$\|\nabla u_h(Q) - \nabla u(Q)\|_\infty \leq \frac{C_2}{\sin \theta} h \quad \text{für } Q \in \Omega \setminus G,$$

wobei C_2 einer Konstante ist.

Im weiteren definieren wir, für u Lösung von (2.1),

$$M_i = \sup_{\substack{P \in \bar{\Omega} \\ |k|=i}} |D^k u(P)|,$$

und setzen

$$I'_\Gamma = I_\Gamma \cap [0, \inf(1, \frac{1}{M_2 + \frac{C_2}{\sin \theta}})].$$

2.2.3 Fehler bei Approximation von $\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dx$

Satz 2.1. *Unter den Voraussetzungen von Lemma 2.4 und $h \in \mathcal{I}_{\Gamma}$, führt die Approximation von $\frac{\partial}{\partial n}$ durch G_h auf die Fehlerabschätzung:*

$$\left| \|G_h u_h\|_{W_h(\Gamma_h)}^2 - \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dS \right| \leq |\Gamma| (K + M_1^2)h,$$

wobei K eine Konstante ist.

Beweis: Sei $T \in \mathcal{T}_h$ ein Element mit einer Seite AB in $\hat{\Gamma}_h$. Sei weiter $\omega \in [\hat{\Gamma}_h]$ der Mittelpunkt dieser Seite und $P \in \widehat{AB} = y_h(\omega) \subset \Omega$, dann folgt aus Lemma (2.4) und $|\overline{\omega P}| < 2h$

$$\begin{aligned} \|\nabla u(P) - \nabla u_h(\omega)\|_{\infty} &\leq \|\nabla u(P) - \nabla u(\omega)\|_{\infty} + \|\nabla u(Q) - \nabla u_h(\omega)\|_{\infty} \\ &\leq \left(M_2 + \frac{C_2}{\sin\theta}\right)h. \end{aligned}$$

Nun setzen wir

$$\begin{aligned} \vec{V}_1 &= \nabla u(P), & \vec{V}_2 &= \vec{n}(P) \\ \vec{V}'_1 &= \nabla u_h(\omega), & \vec{V}'_2 &= \vec{n}_{\omega} \end{aligned}$$

Es gilt somit für $h \in \mathcal{I}_{\Gamma}$:

$$\begin{aligned} \|\vec{V}_1\|_{\infty} &\leq M_1, & \|\vec{V}_1 - \vec{V}'_1\|_{\infty} &\leq \left(M_2 + \frac{C_3}{\sin\theta}\right)h \leq 1, \\ \|\vec{V}_2\|_{\infty} &\leq 1, & \|\vec{V}_2 - \vec{V}'_2\|_{\infty} &\leq \frac{5}{4}C_1 h \leq 1. \end{aligned}$$

Sei weiter $\phi(\vec{v}, \vec{w}) := (\vec{v}, \vec{w})^2$, dann folgt mit

$$\mu := \max\left(\left(M_2 + \frac{C_2}{\sin\theta}\right)h, \frac{5}{4}C_1 h\right) \leq 1$$

folgende Abschätzung:

$$\left| |G_h u_h(\omega)|^2 - \left(\frac{\partial u}{\partial n}(P)\right)^2 \right| = \left| \phi(\vec{V}'_1, \vec{V}'_2) - \phi(\vec{V}_1, \vec{V}_2) \right| \leq 4(2 + M_1)^3 \mu.$$

Setzen wir $K = 4(2 + M_1)^3 \max\left(\left(M_2 + \frac{C_2}{\sin\theta}\right), \frac{5}{4}C_1\right)$, so gilt

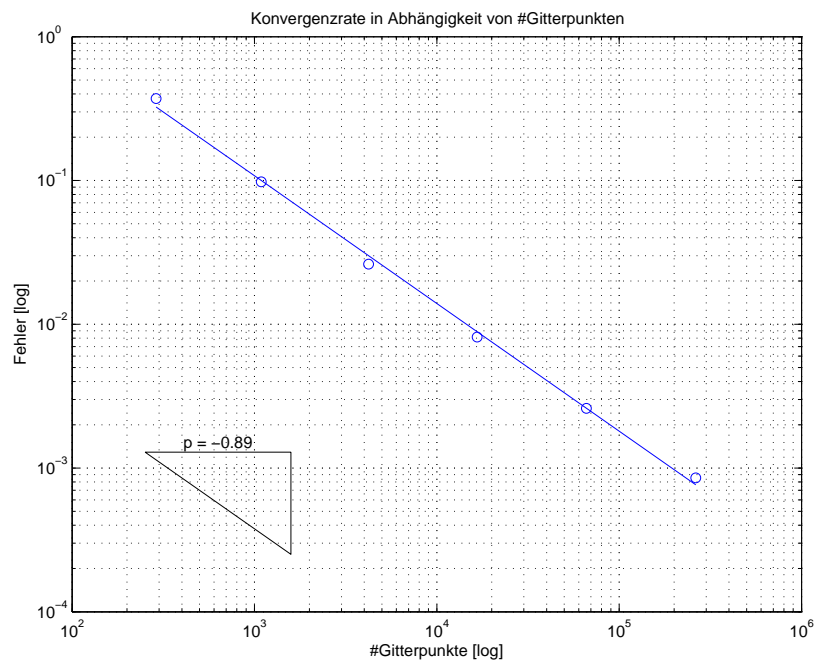
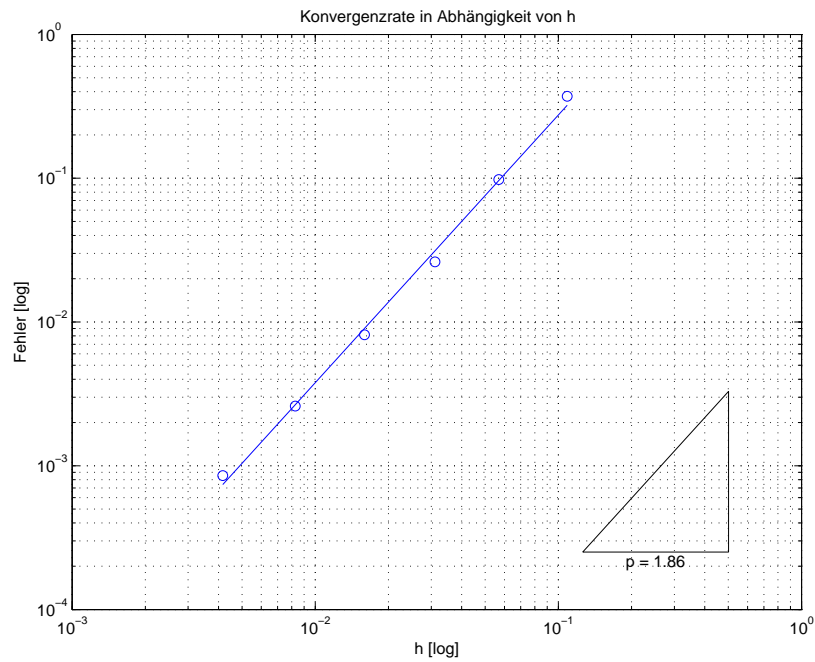
$$\left| \sum_{\omega \in [\hat{\Gamma}_h]} \left([G_h u_h(\omega)]^2 l_h(\omega) - \int_{y_h(\omega)} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dS \right) \right| \leq \sum_i [K h l_h(\omega) + M_1^2 (l_h(\omega) - |y_h(\omega)|)],$$

und die Behauptung folgt mit Lemma 2.2. □

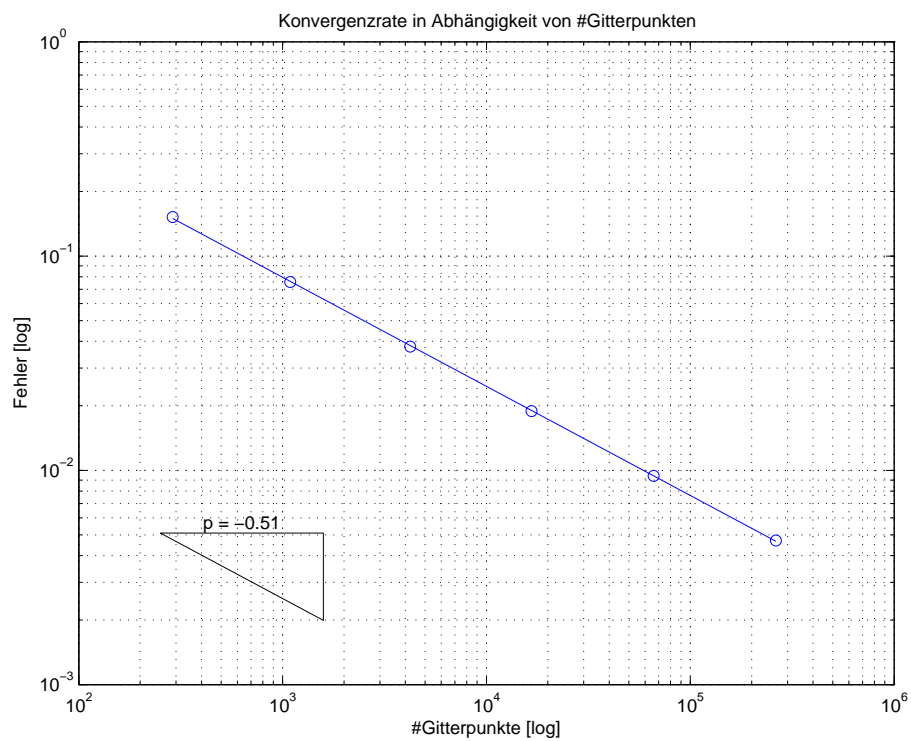
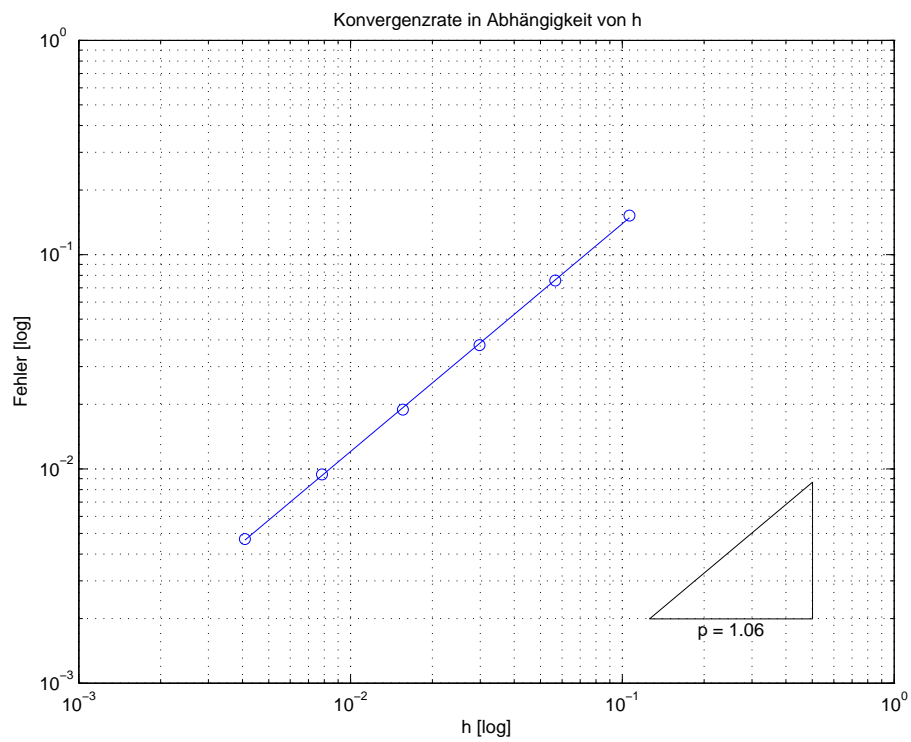
2.3 Numerische Resultate

Beim direkten Ausrechnen von $\int (\frac{\partial u}{\partial n})^2 dx$ mit linearen Finiten Elementen ergeben sich folgende Konvergenzraten:

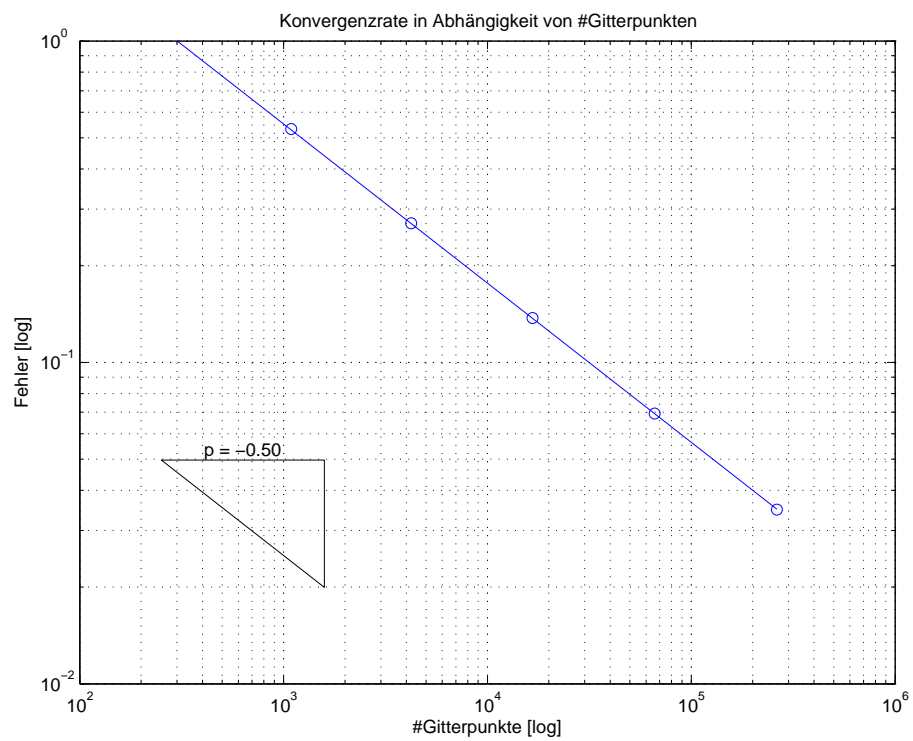
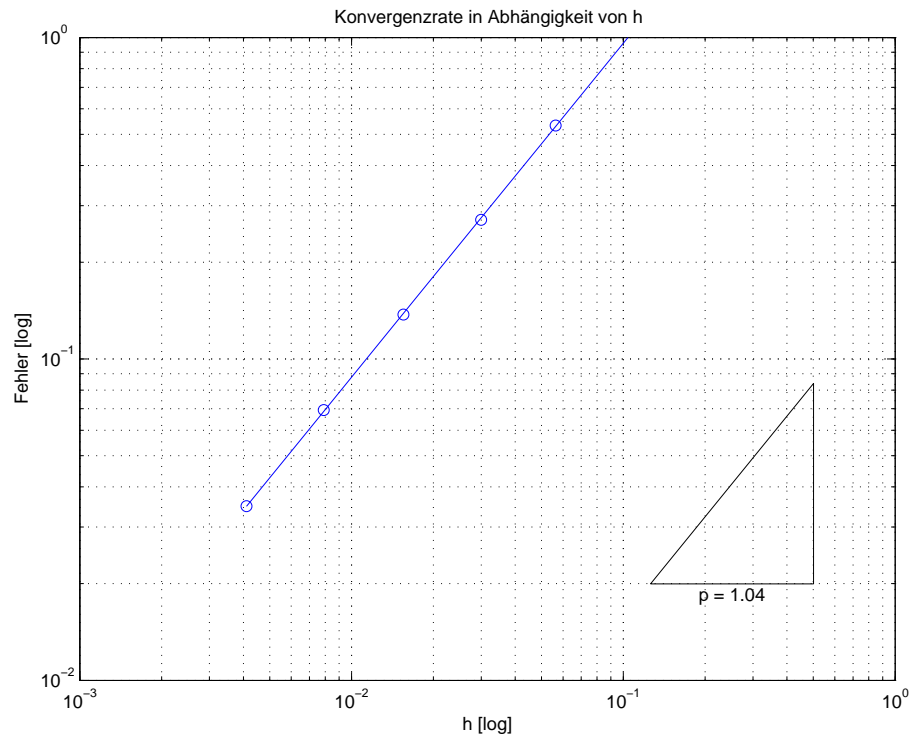
1. Funktion $u_1(x, y) = \sin(\pi x) * \sin(\pi y)$ auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$



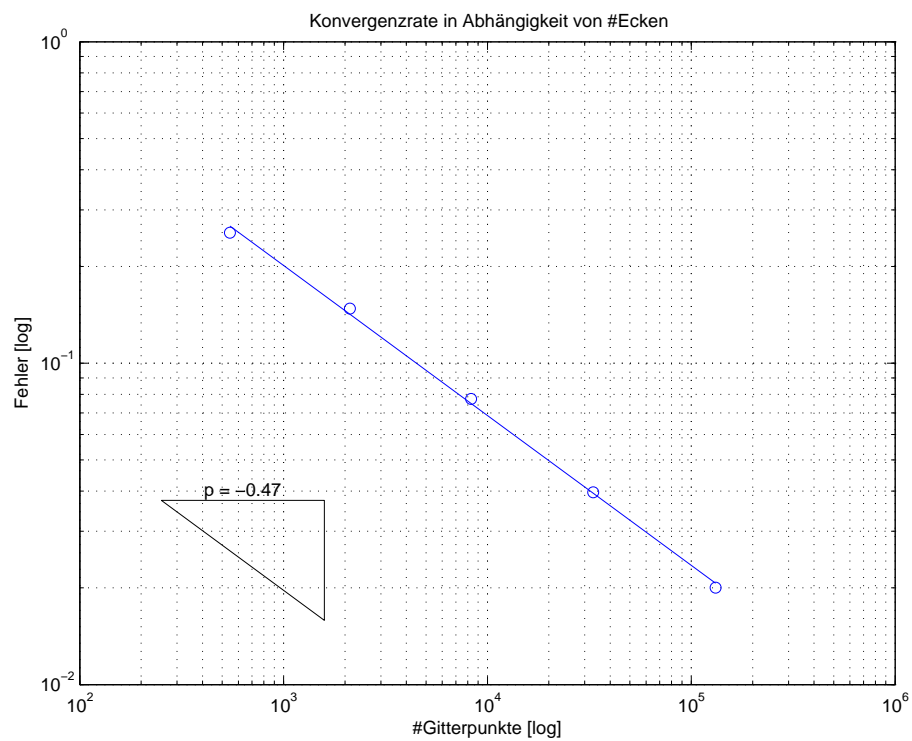
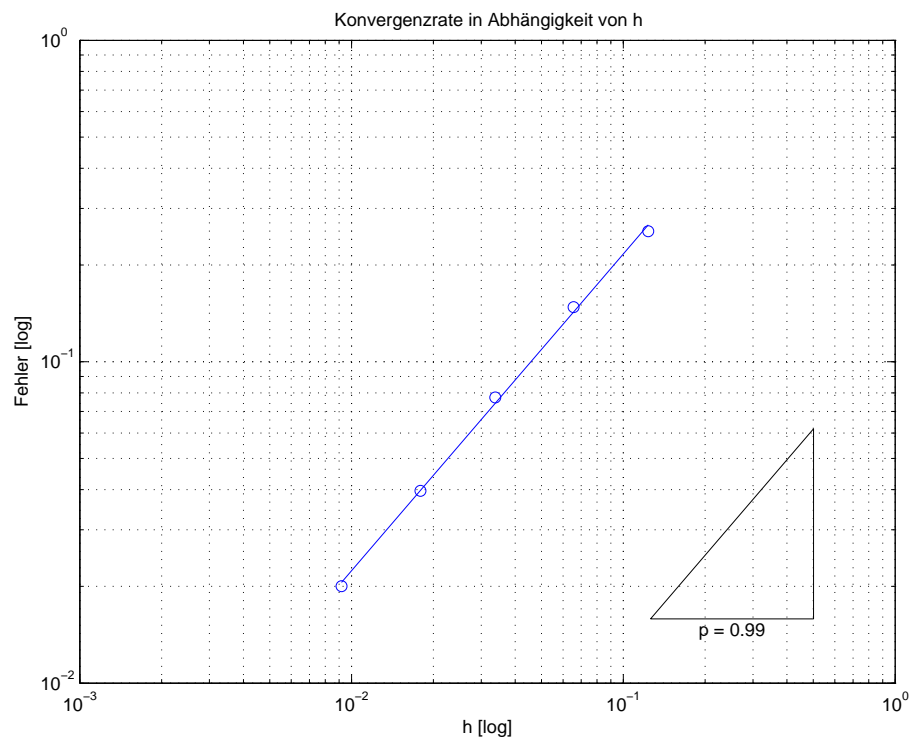
2. Funktion $u_2(x, y) = \cos(\frac{\pi}{2}x) * \cos(\frac{\pi}{2}y)$ auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$



3. Funktion $u_3(x, y) = x^2 * (y^2 + 1)$ auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$



4. Funktion $u_4(r, \phi) = \cos(\frac{\pi}{2} * r)$ auf dem Einheitskreis ($r = 1$, Zentrum: $[0, 0]$)



3 Asymptotische Methode

In diesem Abschnitt wollen wir zeigen, dass die Berechnung des Integrales $\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS$ über den Rand $\Gamma = \partial\Omega$, wobei u die Lösung ist von

$$(3.1) \quad \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \text{auf } \Gamma, \end{cases}$$

übergeführt werden kann in ein Integral über das Gebiet Ω .

Dazu führen wir das zu (3.1) gehörige regularisierte Problem ein:

$$(3.2) \quad \begin{cases} -\Delta u_{\varepsilon} = f & \text{in } \Omega \\ u_{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} = g & \text{auf } \Gamma, \end{cases}$$

wobei ε ein positiver Parameter ist, der gegen 0 gehen soll.

Weiter definieren wir ein von der Lösung u_{ε} von (3.2), und somit von ε abhängiges Funktional

$$J(\varepsilon) := \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon})^2 dx,$$

und werden schliesslich sehen: Falls u die Lösung von (3.1) ist, dann gilt

$$\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 dS = \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

3.1 Problemstellung

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ offen, beschränkt, Γ ein regulärer Rand. Sei weiter $f \in L^2(\Omega)$ und vorerst $g \in H^1(\Gamma)$.

In variationeller Formulierung lautet das Problem (3.2)

$$\alpha_{\varepsilon}(u_{\varepsilon}, v) = \int_{\Omega} f v dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} g v dS \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

wobei

$$\alpha_{\varepsilon}(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} uv dS.$$

Die Bilinearform α_{ε} ist koerziv nach der Fridrichs-Ungleichung [Nec67] (vgl. Satz 3.3) und dann liefert der Satz von Lax-Milgram die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung in $H^1(\Omega)$.

Aber $g \in H^1(\Gamma) \Rightarrow u_{\varepsilon} \in H^{3/2}(\Omega)$.

Und es gilt auch, falls $g \in H^1(\Gamma)$, so ist die Lösung von (3.1) in $H^{3/2}(\Omega)$. Wir bezeichnen diese mit u oder u_0 .

3.1.1 Eigenschaften der Funktionen $[\varepsilon \rightarrow u_\varepsilon|_\Gamma]$ und $[\varepsilon \rightarrow \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}]$

Wir nehmen nun sogar an, dass $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, mit $\alpha > 0$;
also somit $\frac{\partial u_0}{\partial n} \in H^\alpha(\Gamma)$.

Sei $K \in \mathcal{L}(L^2(\Gamma)/\mathbb{R}, L^2(\Gamma)/\mathbb{R})$ der Operator definiert durch

$$(3.3) \quad K h = u|_\Gamma,$$

wobei u Lösung ist von:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial n} = h & \text{auf } \Gamma, \end{cases}$$

mit $\int_\Gamma u \, d\Gamma = 0$; (eigentlich betrachten wir Äquivalenzklassen in $L^2(\Gamma)/\mathbb{R}$, und wählen den entsprechenden Representanten).

Der Operator K ist symmetrisch, positiv definit und kompakt (Satz von Rellich [LM70]).

Seien $\{\lambda_i, w_i\}$ die Eigenwerte und Funktionen, für die gilt:

$$\lambda_i > 0, \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = 0, \quad |w_i|_{L^2(\Gamma)} = 1.$$

Proposition 3.1. Sei $v_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$, wobei u_ε (bzw. u_0) Lösung ist von (3.2) (bzw. (3.1)). Die Spur von v_ε schreibt sich dann als

$$v_\varepsilon|_\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-\varepsilon \lambda_i}{\varepsilon + \lambda_i} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} w_i.$$

Beweis: Für v_ε gilt:

$$\begin{aligned} \Delta v_\varepsilon &= \Delta u_\varepsilon - \Delta u_0 = 0 & \text{in } \Omega \\ v_\varepsilon + \varepsilon \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} &= \underbrace{u_\varepsilon - u_0 + \varepsilon \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}}_{=0} - \varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial n} = -\varepsilon \frac{\partial u_0}{\partial n} & \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Also ist v_ε Lösung von

$$\begin{cases} \Delta v_\varepsilon = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} = -\frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon|_\Gamma - \frac{\partial u_0}{\partial n} & \text{auf } \Gamma, \end{cases}$$

und mit der Definition von K folgt

$$\begin{aligned} v_\varepsilon|_\Gamma &= K \left(-\frac{1}{\varepsilon} v_\varepsilon|_\Gamma - \frac{\partial u_0}{\partial n} \right), \\ \Rightarrow (\varepsilon + K)v_\varepsilon|_\Gamma &= -\varepsilon K \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right). \end{aligned}$$

Die Behauptung ergibt sich dann mit Hilfe der Spektralzerlegung von K . \square

Proposition 3.2. Für $\tau \leq 1 + 2\alpha$ gilt für die Spur von $u_\varepsilon - u_0$

$$\|(u_\varepsilon - u_0)|_\Gamma\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)} \leq \varepsilon^{1+2\alpha-\tau} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}.$$

Beweis: Wir setzen $\mu_j = \frac{1}{\lambda_j}$, welches die Eigenwerte von K^{-1} sind.

Die Norm in $H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)$ schreibt sich als:

$$\|u\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{2\tau} \langle u, w_i \rangle_{L^2(\Gamma)}^2 \right)^{1/2}$$

Nun setzen wir den Ausdruck für v_ε aus Lemma 3.1 ein und erhalten

$$\begin{aligned} |v_\varepsilon|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{2\tau} \left\langle \sum_{j=1}^{\infty} \frac{-\varepsilon \lambda_j}{\varepsilon + \lambda_j} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_j \right\rangle w_j, w_i \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{2\tau} \left(\frac{-\varepsilon \lambda_i}{\varepsilon + \lambda_i} \right)^2 \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^2 \mu_i^{2\tau} \frac{1}{(1 + \varepsilon \mu_i)^2} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \varepsilon^2 \underbrace{\frac{\mu_i^{2\tau-4\alpha}}{(1 + \varepsilon \mu_i)^{2\tau-4\alpha}}}_{\leq \frac{1}{\varepsilon^{2\tau-4\alpha}}} \underbrace{\frac{\mu_i^{4\alpha}}{(1 + \varepsilon \mu_i)^{2-2\tau+4\alpha}}}_{\leq \mu_i^{4\alpha} \text{ für } 2-2\tau+4\alpha \geq 0} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle^2. \end{aligned}$$

Also gilt für $2 - 2\tau + 4\alpha \geq 0$, das heisst $\tau \leq 1 + 2\alpha$

$$\begin{aligned} \|v_\varepsilon\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)}^2 &\leq \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^{2\tau-4\alpha}} \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{4\alpha} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}^2 \\ &= \varepsilon^{2(1+2\alpha-\tau)} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2, \end{aligned}$$

woraus die Proposition folgt. \square

Korollar 3.1. Sei $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\alpha > 0$. Für $\tau \leq \alpha$ ist die Abbildung $[\varepsilon \rightarrow \gamma u_\varepsilon|_\Gamma]$ stetig differenzierbar in $H^\tau(\Gamma)$ für alle $\varepsilon > 0$, und nach rechts für $\varepsilon = 0$.

Beweis: Es bezeichne wieder $v_\varepsilon = u_\varepsilon - u_0$.

Nach Lemma 3.1 gilt für festes i :

$$\frac{d}{d\varepsilon} \left(\langle v_\varepsilon, w_i \rangle_{L^2(\Gamma)} \right) = \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{-\varepsilon \lambda_i}{\varepsilon + \lambda_i} \right) \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \frac{-\lambda_i^2}{(\varepsilon + \lambda_i)^2} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}.$$

Dieser Ausdruck ist stetig in $\varepsilon > 0$ und die Summe davon über alle i ist gleichmäßig beschränkt für $\varepsilon > 0$. Daraus folgt die Existenz und Stetigkeit der Ableitung in $L^2(\Gamma)$ für alle $\varepsilon > 0$.

Analog wie im Beweis zur Proposition 3.2 folgern wir:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{d}{d\varepsilon}(v_\varepsilon) \right\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)}^2 &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{2\tau} \left(\frac{-\lambda_i^2}{(\varepsilon + \lambda_i)^2} \right)^2 \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \mu_i^{2\tau} \frac{1}{(1 + \varepsilon \mu_i)^4} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \underbrace{\frac{\mu_i^{2\tau-4\alpha}}{(1 + \varepsilon \mu_i)^{2\tau-4\alpha}}}_{\leq \frac{1}{\varepsilon^{2\tau-4\alpha}}} \underbrace{\frac{\mu_i^{4\alpha}}{(1 + \varepsilon \mu_i)^{4-2\tau+4\alpha}}}_{\leq \mu_i^{4\alpha} \text{ für } 4-2\tau+4\alpha \geq 0} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle^2. \end{aligned}$$

Also gilt für $4 - 2\tau + 4\alpha \geq 0$, d.h. $\tau \leq 2\alpha + 2$ die Abschätzung

$$(3.5) \quad \left\| \frac{d}{d\varepsilon}(v_\varepsilon) \right\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)}^2 \leq \varepsilon^{4\alpha-2\tau} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2,$$

und somit

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon}(v_\varepsilon) \right\|_{H^\tau(\Gamma)} \leq \varepsilon^{2(\alpha-\tau)} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}.$$

Daraus ergibt sich für $\tau \leq \alpha$ die Behauptung für alle $\varepsilon > 0$.

Schlusslich gilt auch noch

$$\frac{v_\varepsilon}{\varepsilon} \Big|_\Gamma = \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon} \Big|_\Gamma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{-\lambda_i}{\varepsilon + \lambda_1} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_1 \right\rangle w_i \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{\infty} \left\langle -\frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle w_i = -\frac{\partial u_0}{\partial n}.$$

Das heisst die Spur von $\frac{v_\varepsilon}{\varepsilon} = \frac{u_\varepsilon - u_0}{\varepsilon}$ konvergiert gegen $\frac{d}{d\varepsilon}(v_\varepsilon|_\Gamma)|_{\varepsilon=0} = -\frac{\partial u_0}{\partial n}$, womit die Behauptung für $\varepsilon \geq 0$ folgt. \square

Korollar 3.2. Sei $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\alpha > 0$

- a) Für $\tau \leq \alpha + \frac{1}{2}$ ist die Abbildung $[\varepsilon \rightarrow u_\varepsilon]$ stetig differenzierbar in $H^\tau(\Omega)$, für $\varepsilon \geq 0$.
- b) Für $\tau \leq \alpha - 1$ ist die Abbildung $[\varepsilon \rightarrow \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n}]$ stetig differenzierbar in $H^\tau(\Gamma)$, für $\varepsilon \geq 0$.

Beweis: Es bezeichne $H_{\Delta}^{\frac{1+\tau}{2}}(\Omega)$ die Menge aller $u \in H^{\frac{1+\tau}{2}}(\Omega)$ für die $\Delta u = 0$ gilt.

Nach [LM70] gibt es einen Isomorphismus zwischen $H_{\Delta}^{\frac{1+\tau}{2}}(\Omega)$ und $H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)$ und da $\Delta v_{\varepsilon} = 0$ folgt aus (3.5),

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon}(v_{\varepsilon}) \right\|_{H^{\frac{1+\tau}{2}}(\Omega)} \leq C\varepsilon^{2\alpha-\tau} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^{\alpha}(\Gamma)}.$$

Somit ergibt sich

$$\left\| \frac{d}{d\varepsilon}(v_{\varepsilon}) \right\|_{H^{\tau}(\Omega)} \leq C\varepsilon^{2\alpha-(2\tau-1)} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^{\alpha}(\Gamma)}.$$

Daraus schliessen wir, dass die Funktion $[\varepsilon \rightarrow u_{\varepsilon}]$ stetig differenzierbar ist in $H^{\tau}(\Omega)$ für $2\alpha - 2\tau + 1 \geq 0$, d.h. für $\tau \leq \alpha + \frac{1}{2}$.

Behauptung b) folgt aus Teil a) mit Hilfe des Spursatzes aus [LM70, Kap.1 Thr. 9.4]. \square

3.1.2 Berechnung von $\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)^2 dS$

Wir hatten das Funktional $J(\varepsilon)$ definiert als

$$J(\varepsilon) = \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx,$$

wobei u_{ε} die Lösung von (3.2) ist.

Mit Hilfe der obigen Lemmas und Korollare können wir nun den folgenden Satz beweisen.

Satz 3.1. *Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\alpha > \frac{1}{4}$. Falls u die Lösung von (3.1) ist, dann gilt*

$$\int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS = \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Beweis: Sei $u'_{\varepsilon} = \frac{du_{\varepsilon}}{d\varepsilon}$ und $0 < |d_{\varepsilon}| < \varepsilon$, dann gilt nach (3.2)

$$\begin{cases} -\Delta \left(\frac{u_{\varepsilon+d_{\varepsilon}} - u_{\varepsilon}}{d_{\varepsilon}} \right) = 0 & \text{in } \Omega \\ \frac{u_{\varepsilon+d_{\varepsilon}} - u_{\varepsilon}}{d_{\varepsilon}} + \varepsilon \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{u_{\varepsilon+d_{\varepsilon}} - u_{\varepsilon}}{d_{\varepsilon}} \right) = -\frac{\partial u_{\varepsilon+d_{\varepsilon}}}{\partial n} & \text{auf } \Gamma. \end{cases}$$

Daraus folgt mit Hilfe der Korollare 3.1 und 3.2 für alle $\varepsilon > 0$

$$\begin{cases} -\Delta u'_{\varepsilon} = 0 & \text{in } \Omega \\ u'_{\varepsilon} + \varepsilon \frac{\partial u'_{\varepsilon}}{\partial n} = -\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} & \text{auf } \Gamma. \end{cases}$$

Für die Ableitung von $J(\varepsilon)$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\int_{\Omega} f u_{\varepsilon} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\nabla u_{\varepsilon})^2 dx \right) \\
&= \int_{\Omega} f u'_{\varepsilon} dx - \int_{\Omega} \nabla u'_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} dx \\
&\stackrel{f = -\Delta u_{\varepsilon}}{=} \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon} \nabla u'_{\varepsilon} dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} u'_{\varepsilon} dS - \int_{\Omega} \nabla u'_{\varepsilon} \nabla u_{\varepsilon} dx \\
&= - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} u'_{\varepsilon} dS.
\end{aligned}$$

Setzt man für u'_{ε} die Randbedingung $u'_{\varepsilon}|_{\Gamma} = -\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} - \varepsilon \frac{\partial u'_{\varepsilon}}{\partial n}$ ein, so ergibt sich

$$(3.6) \quad \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \right)^2 dS + \int_{\Gamma} \left(\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \right) \frac{\partial u'_{\varepsilon}}{\partial n} dS.$$

Mit den Randbedingungen für u_{ε} folgt

$$\left(\varepsilon \frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \right) \Big|_{\Gamma} = (g - u_{\varepsilon}) \Big|_{\Gamma} = (u_0 - u_{\varepsilon}) \Big|_{\Gamma},$$

was nach Proposition 3.2 für $\tau < \alpha + \frac{1}{2}$ in $H^{\tau}(\Gamma)$ gegen 0 konvergiert.

Weiter folgt aus Korollar 3.2 b), dass $\left\| \left(\frac{\partial u_{\varepsilon}}{\partial n} \right)' \right\|_{H^{-\tau}(\Gamma)}$ beschränkt bleibt für $-\tau \leq \alpha - 1$.

Es existiert ein τ , für welches beide Bedingungen erfüllt sind, wenn

$$\alpha - 1 \geq -\tau > -\alpha - \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad \alpha > \frac{1}{4}.$$

Und somit gilt für $\alpha > \frac{1}{4}$

$$\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)^2 dS.$$

□

Satz (3.1) zeigt also, dass das Integral $\int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 dS$ äquivalent ist zur Ableitung des Funktional $J(\varepsilon)$, welches ein Integral über das Gebiet Ω ist. Jede Approximation von $\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}$ bei $\varepsilon = 0$ ist somit auch eine Approximation der gesuchten Grösse.

Wir wählen dafür nun vorerst einmal eine lineare Extrapolation:

$$(3.7) \quad \frac{J(\varepsilon_1) - J(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1.$$

An der Stelle $\varepsilon = 0$ können wir $J(\varepsilon)$ nicht berechnen, da in der variationellen Formulierung des Problems (3.2) der Term $\frac{1}{\varepsilon}$ vorkommt.

Da aber u_ε nur näherungsweise berechnet werden kann, gilt dies natürlich auch für den Ausdruck (3.7).

Konkret lässt sich zum Beispiel eine Finite Elemente Lösung u_{ε_h} berechnen, und dann ist

$$\frac{J_h(\varepsilon_1) - J_h(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}, \quad 0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1,$$

eine Approximation für das Funktional $F = \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS$, wobei

$$J_h(\varepsilon) = \int_\Omega f u_{\varepsilon_h} dx - \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u_{\varepsilon_h})^2 dx.$$

3.2 Fehlerabschätzung

Der Fehler setzt sich zusammen aus dem Fehler bei der linearen Extrapolation (3.7) und dem Fehler in der Finite-Elemente-Diskretisierung.

3.2.1 Fehlerabschätzung für die Approximation in $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

Satz 3.2. Sei $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1$ und $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma), \alpha > \frac{1}{4}$. Dann gilt für die Approximation (3.7) die Fehlerabschätzung

$$\left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 dS - \frac{J(\varepsilon_1) - J(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right| \leq 5\varepsilon_1^{4\alpha} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2.$$

Beweis: Aus Satz 3.1 und dem Mittelwertsatz folgt

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u}{\partial n} \right)^2 dS - \frac{J(\varepsilon_1) - J(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right| &= \left| \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} - \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=\xi} \right| \quad \text{mit } \varepsilon_2 < \xi < \varepsilon_1 \\ &= \left| \frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \Big|_{\varepsilon=\mu} \cdot (0 - \xi) \right| \quad \text{mit } 0 < \mu < \xi \\ &\leq \max_{0 < \varepsilon < \varepsilon_1} \left| \frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right| \cdot \varepsilon_1. \end{aligned}$$

Das heisst wir brauchen eine Abschätzung für die zweite Ableitung von $J(\varepsilon)$. Nach (3.6) gilt:

$$\frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} = 3 \int_{\Gamma} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \frac{\partial u'_\varepsilon}{\partial n} dS + \varepsilon \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u'_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 dS + \varepsilon \int_{\Gamma} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \frac{\partial u''_\varepsilon}{\partial n} dS.$$

Weiter können wir aus (3.2) und Proposition 3.1 folgern, dass

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \frac{g - u_\varepsilon}{\varepsilon} \Big|_{\Gamma} = -\frac{v_\varepsilon}{\varepsilon} \Big|_{\Gamma} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda_i}{\varepsilon + \lambda_i} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle w_i,$$

und mit $\mu_i = \frac{1}{\lambda_i}$ folgt wie im Beweis zur Proposition 3.2

$$\left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)}^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mu_i^{2\tau-4\alpha}}{(1 + \varepsilon\mu_i)^{2\tau-4\alpha}} \frac{\mu_i^{4\alpha}}{(1 + \varepsilon\mu_i)^{2-2\tau+4\alpha}} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle_{L^2(\Gamma)}^2,$$

was für $2 - 2\tau + 4\alpha \geq 0$, d.h. $\tau \leq 2\alpha + 1$ folgende Abschätzung ergibt:

$$(3.8) \quad \left\| \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)} \leq \varepsilon^{2\alpha-\tau} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}.$$

Auf die gleiche Art folgern wir aus

$$\frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \sum_i \frac{-\lambda_i}{(\varepsilon + \lambda_i)^2} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle w_i \leq \sum_i \frac{1}{\varepsilon} \frac{(-\lambda_i)}{\varepsilon + \lambda_i} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle w_i,$$

und

$$\frac{d^2}{d\varepsilon^2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \sum_i \frac{2\lambda_i}{(\varepsilon + \lambda_i)^3} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle w_i \leq \sum_i \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\lambda_i}{\varepsilon + \lambda_i} \left\langle \frac{\partial u_0}{\partial n}, w_i \right\rangle w_i,$$

für $\tau \leq 2\alpha + 1$ die beiden Abschätzung

$$(3.9) \quad \left\| \frac{d}{d\varepsilon} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)} \leq \varepsilon^{2\alpha - \tau - 1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)},$$

$$(3.10) \quad \left\| \frac{d^2}{d\varepsilon^2} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{\tau}{2}}(\Gamma)} \leq \varepsilon^{2\alpha - \tau - 2} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}.$$

Wenn wir $\tau = \frac{1}{2}$ in (3.8) und $\tau = -\frac{1}{2}$ in (3.9) wählen, dann ergibt sich

$$\left| \int_\Gamma \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \frac{\partial u'_\varepsilon}{\partial n} dS \right| \leq \varepsilon^{4\alpha - 1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2,$$

sowie bei entsprechender Wahl von τ in den Ungleichungen (3.8), (3.9) und (3.10),

$$\left| \varepsilon \int_\Gamma \left(\frac{\partial u'_\varepsilon}{\partial n} \right)^2 dS \right| \leq \varepsilon^{4\alpha - 1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2,$$

und

$$\left| \varepsilon \int_\Gamma \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} \frac{\partial u''_\varepsilon}{\partial n} dS \right| \leq \varepsilon^{4\alpha - 1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2.$$

Aus diesen drei Abschätzungen ergibt sich schlussendlich

$$\left| \frac{d^2 J(\varepsilon)}{d\varepsilon^2} \right| \leq 5\varepsilon^{4\alpha - 1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}^2.$$

□

3.2.2 Fehlerabschätzung in $h, \varepsilon_1, \varepsilon_2$

Satz 3.3. Für alle $u \in H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$ gilt mit $\varepsilon > 0$

$$\min[C(\Omega), k(1 + \frac{\lambda_1}{\varepsilon})] \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \alpha_\varepsilon(u, u),$$

wobei λ_1 der kleinste Eigenwert des Operators K , $C(\Omega)$ die Konstante in der Poincaré Ungleichung und k eine Konstante ungleich Null ist.

Beweis: Sei wiederum $H_{\Delta}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid \Delta u = 0\}$.

Wir schreiben $u \in H^1(\Omega)$ als $u = u_1 + u_0$ mit $u_1 \in H_{\Delta}^1(\Omega)$ und $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, da nach [LM70] gilt $H^1(\Omega) = H_{\Delta}^1(\Omega) \oplus H_0^1(\Omega)$.

Somit erhalten wir

$$\begin{aligned} \alpha_{\varepsilon}(u, u) &= \int_{\Omega} (\nabla u)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} u^2 dS \\ &= \int_{\Omega} (\nabla u_1)^2 + 2\nabla u_1 \nabla u_0 + (\nabla u_0)^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} u_1^2 dS \\ &= \int_{\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial n} u_1 dS + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} u_1^2 dS + \int_{\Omega} (\nabla u_0)^2 dx \\ &= \alpha_{\varepsilon}(u_1, u_1) + |u_0|_{H^1(\Omega)}^2, \end{aligned}$$

$$\text{da } \int_{\Omega} \nabla u_1 \nabla u_0 dS = \int_{\Omega} (-\Delta u_1) u_0 dx + \int_{\Gamma} \frac{\partial u_1}{\partial n} u_0 dS = 0.$$

Betrachten wir den durch (3.3) und (3.4) definierten Operator K , so gilt für $u_1 \in H_{\Delta}^1(\Omega) \cap H^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, $K^{-1}u_1 \in L^2(\Gamma)$, also ist

$$\alpha_{\varepsilon}(u_1, u_1) = \left\langle (K^{-1} + \frac{1}{\varepsilon})u_1, u_1 \right\rangle_{L^2(\Gamma)} = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\varepsilon} \right) \langle u_1, w_i \rangle_{L^2(\Gamma)}^2.$$

Die Spurabbildung ist eine Isometrie von $H_{\Delta}^1(\Omega)$ nach $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, womit der Ausdruck $\frac{\alpha_{\varepsilon}(u_1, u_1)}{|u_1|_{H^1(\Omega)}^2}$ nach unten beschränkt wird durch

$$(3.11) \quad \min_{\|u_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq 1} \frac{\alpha_{\varepsilon}(u_1, u_1)}{|u_1|_{H^1(\Omega)}^2} = k \min_{\sum_i \frac{1}{\lambda_i} \langle u_1, w_i \rangle_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 1} \frac{\sum_i (\frac{1}{\lambda_i} + \frac{1}{\varepsilon}) \langle u_1, w_i \rangle_{L^2(\Gamma)}^2}{\sum_i \frac{1}{\lambda_i} \langle u_1, w_i \rangle_{L^2(\Gamma)}^2},$$

da

$$k \|u_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 = \sum_i \frac{1}{\lambda_i} \langle u_1, w_i \rangle_{L^2(\Gamma)}^2,$$

mit einer von Null verschiedenen Konstanten k .

Der Ausdruck (3.11) wird nach unten abgeschätzt durch $k(1 + \frac{\lambda_1}{\varepsilon})$, woraus wir schlüssen, dass

$$\alpha_{\varepsilon}(u_1, u_1) \geq k(1 + \frac{\lambda_1}{\varepsilon}) \|u_1\|_{H^1(\Omega)}^2.$$

Die Proposition folgt nun mit Hilfe dieser Abschätzung und der Ungleichung von Poincaré. \square

Satz 3.4. Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$, $\alpha \geq 1$. Bezeichnet $u_{\varepsilon h}$ die Lösung des diskreten Problems und u_ε die des variationellen Problems, dann gilt für alle ε mit $0 < \varepsilon < \frac{k\lambda_1}{C(\Omega)-k}$

$$\|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon + C_\gamma^2}{C(\Omega)} \left(|g|_{H^{1+\alpha}(\Gamma)} + \varepsilon^{2(\alpha-1)} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)} \right) \frac{\mu(h)}{\varepsilon},$$

wobei C_γ die Konstante des Spursatzes und $C(\Omega)$ diejenige in der Poincaré Ungleichung ist.

Beweis: u_ε , resp. $u_{\varepsilon h}$ ist Lösung von

$$\alpha_\varepsilon(u_\varepsilon, v) = \int_\Omega f v \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma g v \, dS \quad \forall v \in V = H^1(\Omega),$$

resp.

$$\alpha_\varepsilon(u_{\varepsilon h}, v_h) = \int_\Omega f v_h \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma g v_h \, dS \quad \forall v_h \in V_h \subset V,$$

und somit gilt

$$\alpha(u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h.$$

Für $\varepsilon \leq \frac{k\lambda_1}{C(\Omega)-k}$ gilt $C(\Omega) \leq k(1 + \frac{\lambda_1}{\varepsilon})$ und mit Satz (3.3) folgt somit

$$\|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{C(\Omega)} \alpha_\varepsilon(u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon, u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon) = \frac{1}{C(\Omega)} \alpha_\varepsilon(u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon, I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon),$$

wobei $I_h u_\varepsilon$ die Finite Elemente Interpolierende ist, für die die Abschätzung

$$\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq C\mu(h) \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^2(\Omega)$$

gilt. Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 &= \frac{1}{C(\Omega)} \left(\int_\Omega \nabla(u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon) \nabla(I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon) \, dx + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\varepsilon} \int_\Gamma (u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon)(I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon) \, dS \right) \\ &\leq \frac{1}{C(\Omega)} \left(|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon|_{H^1(\Omega)} |I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon|_{H^1(\Omega)} + \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{\varepsilon} \|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \|I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{L^2(\Gamma)} \right). \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Spursatzes [Bra92, Satz 3.1] folgt weiter

$$\|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}^2 \leq \frac{1}{C(\Omega)} \left(1 + \frac{C_\gamma^2}{\varepsilon} \right) \|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \|I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)},$$

und somit ist

$$\|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon + C_\gamma^2}{C(\Omega)} \frac{1}{\varepsilon} \|I_h u_\varepsilon - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq \frac{\varepsilon + C_\gamma^2}{C(\Omega)} \frac{\mu(h)}{\varepsilon} \|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)}.$$

Aus Proposition 3.2 ergibt sich zudem für $\alpha \geq 1$ ($\tau = 3$)

$$\|u_\varepsilon\|_{H^2(\Omega)} \leq \|g\|_{H^{1+\alpha}(\Gamma)} + \varepsilon^{2(\alpha-1)} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^\alpha(\Gamma)}.$$

□

Satz 3.5. Sei $f \in L^2(\Omega)$ und $g \in H^{1+\alpha}(\Gamma)$. Für $\alpha \geq 1$, und $0 < \varepsilon_2 < \varepsilon_1 < \frac{k\lambda_1}{C(\Omega)-k}$, gilt die Abschätzung

$$\left| \frac{J_h(\varepsilon_1) - J_h(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS \right| \leq C \left(\frac{\mu(h)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} + \varepsilon_1^{4\alpha} \right)$$

Beweis:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{J_h(\varepsilon_1) - J_h(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS \right| \leq \\ & \underbrace{\left| \frac{J_h(\varepsilon_1) - J(\varepsilon_1)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right|}_I + \underbrace{\left| \frac{J_h(\varepsilon_2) - J(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} \right|}_II + \underbrace{\left| \frac{J(\varepsilon_1) - J(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS \right|}_III \end{aligned}$$

Die Ausdrücke I und II können mit Hilfe von Satz 3.4 abgeschätzt werden.

$$\begin{aligned} |J_h(\varepsilon) - J(\varepsilon)| &= \left| \int_\Omega f u_{\varepsilon h} dx - \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u_{\varepsilon h})^2 dx - \left(\int_\Omega f u_\varepsilon dx - \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u_\varepsilon)^2 dx \right) \right| \\ &= \left| \int_\Omega f(u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon) dx - \frac{1}{2} \int_\Omega (\nabla u_{\varepsilon h})^2 - (\nabla u_\varepsilon)^2 dx \right| \\ &\leq \int_\Omega |f(u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon)| dx + \frac{1}{2} \int_\Omega |(\nabla u_{\varepsilon h})^2 - (\nabla u_\varepsilon)^2| dx \\ &\leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)} + \frac{1}{2} \|\nabla(u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(u_{\varepsilon h} + u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq C \|u_{\varepsilon h} - u_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)} \leq C \frac{\mu(h)}{\varepsilon}. \end{aligned}$$

Wir erhalten folgende beiden Ungleichungen:

$$I \leq \frac{C\mu(h)}{\varepsilon_1(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} \quad \text{und} \quad II \leq \frac{C\mu(h)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}.$$

Für den Ausdruck III liefert Satz 3.2 die Abschätzung

$$III \leq C\varepsilon_1^{4\alpha}.$$

Die drei Abschätzungen zusammen ergeben die Behauptung. □

3.2.3 Wahl von ε_1 und ε_2

Nach Satz 3.5 wird der Fehler abgeschätzt durch

$$C \left(\frac{\mu(h)}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)} + \varepsilon_1^{4\alpha} \right).$$

Wir wählen somit $\varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = \varepsilon$, da dann der Term $\frac{1}{\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}$ am kleinsten ist.

$$\Rightarrow e_F = \left| \frac{J_h(\varepsilon_1) - J_h(\varepsilon_2)}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2} - \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS \right| \leq C \left(\frac{\mu(h)}{\varepsilon^2} + \varepsilon^{4\alpha} \right).$$

Dieser Ausdruck ist am kleinsten bei der Wahl von $\varepsilon(h) = \mu(h)^{\frac{1}{4\alpha+2}}$.

$$\Rightarrow e_F \leq C \left(\frac{\mu(h)}{\mu(h)^{\frac{2}{4\alpha+2}}} + \mu(h)^{\frac{4\alpha}{4\alpha+2}} \right) \leq C \mu(h)^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}.$$

In der Arbeit [Raf75] steht nun, dass es eine Approximation von $H^1(\Omega)$ mittels linearer Finiten Elemente gibt, für die $\mu(h) = Ch^2$ ist, und somit wäre $e_F = O(h^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}})$. Nach [Bra92, Satz 6.4] gilt jedoch bei Verwendung von linearen Finiten Elementen

$$\|I_h u - u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u\|_{H^2(\Omega)} \quad \forall u \in H^2(\Omega),$$

womit wir folgende Fehlerabschätzung erhalten:

$$e_F \leq Ch^{\frac{2\alpha}{2\alpha+1}}.$$

3.3 Asymptotische Entwicklung und Extrapolation

Wir wollen nun untersuchen, inwiefern für u_ε , und somit dann auch für $J(\varepsilon)$, eine asymptotische Entwicklung existiert. Dies würde es uns erlauben, den Wert $\frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}$ mittels Extrapolation zu berechnen.

3.3.1 Asymptotische Entwicklung von u_ε

Das Vorgehen entspricht demjenigen von [CD96]. Für u_ε machen wir den formalen Ansatz

$$(3.12) \quad u_\varepsilon = \sum_k \varepsilon^k u_k,$$

und setzen diesen in die Gleichung (3.2) ein.

$$\begin{aligned} \sum_k \varepsilon^k \Delta u_k &= f \quad \text{in } \Omega \\ \sum_k \varepsilon^k u_k + \varepsilon^{k+1} \frac{\partial u_k}{\partial n} &= g \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Wenn wir nun die Terme mit gleichen Ordnungen in ε vergleichen, erhalten wir eine Folge von Dirichlet Problemen für die u_k .

Zum einen wäre da das für u_0 ,

$$(3.13) \quad \begin{aligned} -\Delta u_0 &= f \quad \text{in } \Omega \\ u_0 &= g \quad \text{auf } \Gamma, \end{aligned}$$

und zum andern jene für u_k mit $k \geq 1$,

$$(3.14) \quad \begin{aligned} \Delta u_k &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u_k &= -\frac{\partial u_{k-1}}{\partial n} \quad \text{auf } \Gamma. \end{aligned}$$

Damit eine Lösung von (3.14) existiert, muss dafür aber $\frac{\partial u_{k-1}}{\partial n}$ in $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ enthalten sein.

Wenn wir annehmen, dass diese Folge von Dirichlet Probleme für $k = 0, \dots, N$ erfüllt sei, so gilt mit $\tilde{u}_\varepsilon := \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k$,

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{u}_\varepsilon &= f \\ \tilde{u}_\varepsilon + \varepsilon \frac{\partial \tilde{u}_\varepsilon}{\partial n} &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k u_k + \varepsilon^{k+1} \frac{\partial u_k}{\partial n} \\ &= g + \underbrace{\sum_{k=1}^N \varepsilon^k u_k + \varepsilon^k \frac{\partial u_{k-1}}{\partial n}}_{=0 \text{ wegen (3.14)}} + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial u_N}{\partial n} \\ &= g + \varepsilon^{N+1} \frac{\partial u_N}{\partial n}. \end{aligned}$$

Der Restterm $r_\varepsilon^N = u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon$ ist somit Lösung von

$$(3.15) \quad \begin{cases} \Delta r_\varepsilon^N &= 0 & \text{in } \Omega \\ r_\varepsilon^N + \varepsilon \frac{\partial r_\varepsilon^N}{\partial n} &= -\varepsilon^{N+1} \frac{\partial u_N}{\partial n} & \text{auf } \Gamma. \end{cases}$$

Es gilt dann der folgende Satz:

Satz 3.6. Für $f \in L^2(\Omega)$, $g \in H^{\frac{1}{2}+N+1}(\Gamma)$, mit $N \in \mathbb{N}$, und $\varepsilon > 0$ sei u_ε Lösung des Robin Problems (3.2). Für $k = 0, \dots, N$ seien u_k definiert durch die Folge von Dirichlet Problemen (3.13), (3.14). Dann besitzt u_ε die asymptotische Entwicklung $u_\varepsilon = u_0 + \varepsilon u_1 + \dots + \varepsilon^N u_N + r_\varepsilon^N$, wobei der Restterm r_ε^N der Abschätzung

$$\|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega)} \leq C \varepsilon^{N+1} \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}+N}(\Gamma)}$$

genügt. Dabei hängt C nicht von ε ab.

Beweis: Die rechte Seite in (3.15) wird gemäss (3.14) aus u_1 gebildet durch wiederholtes Anwenden des Dirichlet-zu-Neumann Operators

$$T : u|_\Gamma \mapsto \frac{\partial u}{\partial n}|_\Gamma, \quad \text{wobei } \Delta u = 0 \text{ in } \Omega.$$

Genauer gesagt gilt

$$u_k|_\Gamma = (-T)^{k-1} u_1 = (-T)^{k-1} \frac{\partial u_0}{\partial n},$$

woraus wir schliessen, dass

$$\left\| \frac{\partial u_N}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \|T^N u_1\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} \leq C \|u_1\|_{H^{\frac{1}{2}+N}(\Gamma)} = C \left\| \frac{\partial u_0}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}+N}(\Gamma)}.$$

Weiter gilt nach [CD96, Lemma 2.1] mit (3.15) für r_ε^N die Abschätzung

$$\|r_\varepsilon^N\|_{H^1(\Omega)} \leq C \left\| -\varepsilon^{N+1} \frac{\partial u_N}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = C \varepsilon^{N+1} \left\| \frac{\partial u_N}{\partial n} \right\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}.$$

□

Für u_ε gilt also eine asymptotische Entwicklung, welche Abhängig ist von der Regularität der Funktion g auf dem Rand von Ω .

3.3.2 Asymptotische Entwicklung von $J(\varepsilon)$

Nun gehen wir über zur Untersuchung von $J(\varepsilon)$ und setzen den Ansatz (3.12) in die Formel für $J(\varepsilon)$ ein:

$$J(\varepsilon) = \int_{\Omega} f \left(\sum_k \varepsilon^k u_k \right) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left(\sum_k \varepsilon^k \nabla u_k \right)^2 dx.$$

Somit erhalten wir für $J(\varepsilon)$ den Ausdruck

$$(3.16) \quad J(\varepsilon) = \sum_k \varepsilon^k J_k := \sum_k \varepsilon^k \left(\int_{\Omega} f u_k dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{n=0}^k (\nabla u_n, \nabla u_{k-n}) dx \right).$$

Mit dem Ausdruck für \tilde{u}_ε folgt

$$\begin{aligned} \tilde{J}(\varepsilon) &:= \int_{\Omega} f \tilde{u}_\varepsilon dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 dx \\ &= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left(\int_{\Omega} f u_k dx \right) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{2N} \varepsilon^k \left(\int_{\Omega} \sum_{n=0}^k \langle \nabla u_n, \nabla u_{k-n} \rangle dx \right). \end{aligned}$$

Wir definieren nun

$$\begin{aligned} \hat{J}(\varepsilon) &:= \sum_{k=0}^N \varepsilon^k J_k = \sum_{k=0}^N \varepsilon^k \left(\int_{\Omega} f u_k dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{n=0}^k (\nabla u_n, \nabla u_{k-n}) dx \right) \\ &= \tilde{J}(\varepsilon) + \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{2N} \varepsilon^k \int_{\Omega} \sum_{n=0}^k \langle \nabla u_n, \nabla u_{k-n} \rangle dx, \end{aligned}$$

und somit gilt

Satz 3.7. *Unter den Voraussetzungen von Satz 3.6 gilt für $e_\varepsilon^N := J(\varepsilon) - \hat{J}(\varepsilon)$*

$$|e_\varepsilon^N| \leq C \varepsilon^N,$$

wobei die Konstante C nicht von ε oder N abhängt.

Beweis:

$$\begin{aligned} |J(\varepsilon) - \hat{J}(\varepsilon)| &\leq |J(\varepsilon) - \tilde{J}(\varepsilon)| + \left| \frac{1}{2} \sum_{k=N+1}^{2N} \varepsilon^k \int_{\Omega} \sum_{n=0}^k \langle \nabla u_n, \nabla u_{k-n} \rangle dx \right| \\ &\leq \int_{\Omega} |f(u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon)| dx + \frac{1}{2} \left| \int_{\Omega} |\nabla u_\varepsilon|^2 - |\nabla \tilde{u}_\varepsilon|^2 dx \right| + C \varepsilon^{N+1} \\ &\leq \|f\|_{H^{-1}(\Omega)} \underbrace{\|u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon\|_{H^1(\Omega)}}_{\leq C \varepsilon^{N+1}} + \frac{1}{2} \langle u_\varepsilon - \tilde{u}_\varepsilon, u_\varepsilon + \tilde{u}_\varepsilon \rangle_{H^1(\Omega)} + C \varepsilon^{N+1}. \end{aligned}$$

Und schliesslich gilt mit Hilfe der variationell Formulierung des Problems (3.15),

$$\int_{\Omega} \nabla r_{\varepsilon}^N \nabla v \, dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} r_{\varepsilon}^N v \, dS = \frac{1}{\varepsilon} \int_{\Gamma} \left(-\varepsilon^{N+1} \frac{\partial u_N}{\partial n} \right) v \, dS \quad \forall v \in H^1(\Omega),$$

die Abschätzung

$$\langle u_{\varepsilon} - \tilde{u}_{\varepsilon}, u_{\varepsilon} + \tilde{u}_{\varepsilon} \rangle_{H^1(\Omega)} \leq C\varepsilon^N$$

□

Somit haben wir unter geeigneten Voraussetzungen für $J(\varepsilon)$ eine asymptotische Entwicklung $J(\varepsilon) = J_0 + \varepsilon J_1 + \dots + \varepsilon^N J_N + e_{\varepsilon}^N$, was es uns ermöglicht, den Wert von $\frac{dJ}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ mittels einer Extrapolation gegen 0 zu bestimmen.

3.3.3 Beweis von $J_1 = F$

Zuerst wollen wir aber noch zeigen, dass $J_1 = \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}$ tatsächlich die gesuchte Grösse ist.

Aus der Formel (3.16) ergibt sich für $k = 1$,

$$J_1 = \int_{\Omega} f u_1 \, dx - \int_{\Omega} \nabla u_0 \nabla u_1 \, dx,$$

und dann erhalten wir mit partieller Integration und den Gleichungen (3.13) und (3.14)

$$\begin{aligned} J_1 &= \int_{\Omega} f u_1 \, dx + \int_{\Omega} \underbrace{\Delta u_0}_{=-f} u_1 \, dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_0}{\partial n} u_1 \, dS \\ &= - \int_{\Gamma} \frac{\partial u_0}{\partial n} \underbrace{u_1}_{=-\frac{\partial u_0}{\partial n}} \, dS = \int_{\Gamma} \left(\frac{\partial u_0}{\partial n} \right)^2 \, dS. \end{aligned}$$

3.3.4 Extrapolation

Wir hatten

$$J(\varepsilon) = \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx, \quad F = \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 d\Gamma,$$

und dann folgte

$$F = \frac{d}{d\varepsilon} J(\varepsilon) \Big|_{\varepsilon=0}.$$

Wie wir im vorherigen Abschnitt gesehen haben, besitzt $J(\varepsilon)$ eine asymptotische Entwicklung in ε :

$$J(\varepsilon) = J_0 + J_1\varepsilon + J_2\varepsilon^2 + \dots + J_N\varepsilon^N + e_{\varepsilon}^N$$

mit $e_{\varepsilon}^N = O(\varepsilon^N)$ für $\varepsilon \rightarrow 0$

und es ist

$$J_1 = F$$

die gesuchte Grösse.

Daher verwenden wir in Analogie zu [DH02, Kapitel 9.4] folgenden Algorithmus:

Algorithmus: Wurde $J(\varepsilon)$ für k verschiedene Werte

$$\varepsilon_i, \quad i = i - k + 1, \dots, i$$

berechnet, so kann man das Interpolationspolynom $P_{i,k}(\varepsilon) \in \mathbf{P}_{k-1}(\varepsilon)$ zu den Stützpunkten

$$(\varepsilon_{i-k+1}, J(\varepsilon_{i-k+1})), \dots, (\varepsilon_i, J(\varepsilon_i))$$

bestimmen mit Hilfe des Neville-Aitken-Schemas:

$$\begin{aligned} P_{i,1} &= J(\varepsilon_i) & i = 1, 2, \dots \\ P_{i,k} &= P_{i,k-1} + \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-k+1}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}) & 2 \leq k \leq i. \end{aligned}$$

Bei Differentiation der 2.Gleichung nach ε ergibt sich

$$\frac{dP_{i,k}}{d\varepsilon} = \frac{dP_{i,k-1}}{d\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-k+1}} (P_{i,k-1} - P_{i-1,k-1}) + \frac{\varepsilon - \varepsilon_i}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-k+1}} \left(\frac{dP_{i,k-1}}{d\varepsilon} - \frac{dP_{i-1,k-1}}{d\varepsilon} \right).$$

Die Extrapolation erfolgt nun durch Auswerten an der Stelle $\varepsilon = 0$. Wir erhalten so Näherungen T_{ik} von $J(0)$,

$$T_{ik} := P_{ik}(0), \quad 1 \leq k \leq i,$$

und Näherungen D_{ik} von $J_1 = \frac{d}{d\varepsilon} J(\varepsilon)|_{\varepsilon=0}$,

$$D_{ik} := \frac{dP_{ik}}{d\varepsilon}|_{\varepsilon=0}.$$

Die Rekursionsformeln übertragen sich wie folgt:

$$\begin{aligned} T_{i1} &= J(\varepsilon_i) & i = 1, 2, \dots \\ T_{ik} &= T_{i,k-1} - \frac{\varepsilon_i}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-k+1}} (T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}) \\ &= T_{i,k-1} + \frac{(T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1})}{\frac{\varepsilon_{i-k+1}}{\varepsilon_i} - 1} & \text{für } 2 \leq k \leq i \\ D_{i1} &= 0 & i = 1, 2, \dots \\ D_{ik} &= D_{i,k-1} + \frac{T_{i,k-1} - T_{i-1,k-1}}{\varepsilon_i - \varepsilon_{i-k+1}} + \frac{(D_{i,k-1} - D_{i-1,k-1})}{\frac{\varepsilon_{i-k+1}}{\varepsilon_i} - 1} & \text{für } 2 \leq k \leq i. \end{aligned}$$

Der gesuchte Wert ist schlussendlich D_{kk} .

3.4 Sattelpunktformulierung

Das Problem (3.2) lässt sich auch als sogenanntes Sattelpunktproblem formulieren. Dazu seien die Hilberträume $V = H^1(\Omega)$ und $Q = H^{1/2}(\Gamma)$, $f \in V^*$, $g \in Q^*$, sowie die drei stetigen Bilinearformen

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v \, dx : V \times V \rightarrow \mathbb{R},$$

$$b(v, q) = \int_{\Gamma} qv \, d\Gamma : V \times Q \rightarrow \mathbb{R},$$

$$d(q, p) = \int_{\Gamma} qp \, d\Gamma : Q \times Q \rightarrow \mathbb{R},$$

gegeben.

Dann ist unser Problem äquivalent zur folgenden Sattelpunktformulierung:

Finde $\begin{pmatrix} u_{\varepsilon} \\ q_{\varepsilon} \end{pmatrix} \in V \times Q$ mit

$$(3.17) \quad \begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u_{\varepsilon} \nabla v \, dx + \int_{\Gamma} q_{\varepsilon} v \, dS = \int_{\Omega} f v \, dx & \forall v \in V \\ \int_{\Gamma} p u_{\varepsilon} \, dS - \varepsilon \int_{\Gamma} q_{\varepsilon} p \, dS = \int_{\Gamma} g p \, dS & \forall p \in Q, \end{cases}$$

oder anders geschrieben

$$\begin{cases} a(u_{\varepsilon}, v) + b(v, q_{\varepsilon}) = \langle f, v \rangle_{L^2(\Omega)} & \forall v \in V \\ b(u_{\varepsilon}, p) - \varepsilon d(q_{\varepsilon}, p) = \langle g, p \rangle_{L^2(\Gamma)} & \forall p \in Q \end{cases}$$

Betrachten wir als erstes den Fall $\varepsilon = 0$:

Für die Existenz einer eindeutigen Lösung, müssten die sogenannten Inf-Sub-Bedingungen erfüllt sein, [Bra92, Satz 4.3]:

$$\begin{cases} a) & \sup_{w \in V} \frac{b(w, q)}{\|w\|_V} \geq \beta \|q\|_Q \quad \forall q \in Q \text{ mit } \beta > 0 \\ b) & a(v, v) = \int_{\Omega} |\nabla v|^2 \, dx \geq \alpha \|v\|_V^2 \quad \forall v \in \{v \in V : b(v, q) = 0 \, \forall q \in Q\} \end{cases}$$

Bedingung b) ist zwar nach der Poincaré-Ungleichung erfüllt, aber es existiert kein $\beta > 0$, so dass a) erfüllt wäre.

Dennoch kann diese Formulierung verwendet werden, um u_{ε} numerisch zu berechnen, da die Probleme nur in der numerischen Lösung von q_{ε} auftreten, welche wir danach zur Berechnung der Funktionale $J(\varepsilon)$ gar nicht mehr benötigen.

Im folgenden sei nun $\varepsilon \geq 0$ und es bezeichnen $A : V \rightarrow V^*$, $B : V \rightarrow Q^*$

und $D : Q \rightarrow Q^*$ die Operatoren, welche durch a,b und d gegeben sind. Dies führt uns zur Operatornotation des Problems (3.17):

$$\left[\begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix} - \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ q_\varepsilon \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}.$$

Nun definieren wir noch $T := \begin{pmatrix} A & B^* \\ B & 0 \end{pmatrix} : V \times Q \rightarrow V^* \times Q^*$,

$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} : V \times Q \rightarrow V^* \times Q^*$, $w = \begin{pmatrix} u_\varepsilon \\ q_\varepsilon \end{pmatrix} \in V \times Q$, sowie

$h = \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \in V^* \times Q^*$, womit wir das Sattelpunktproblem kurz schreiben

als:

Finde $w \in V \times Q$ mit

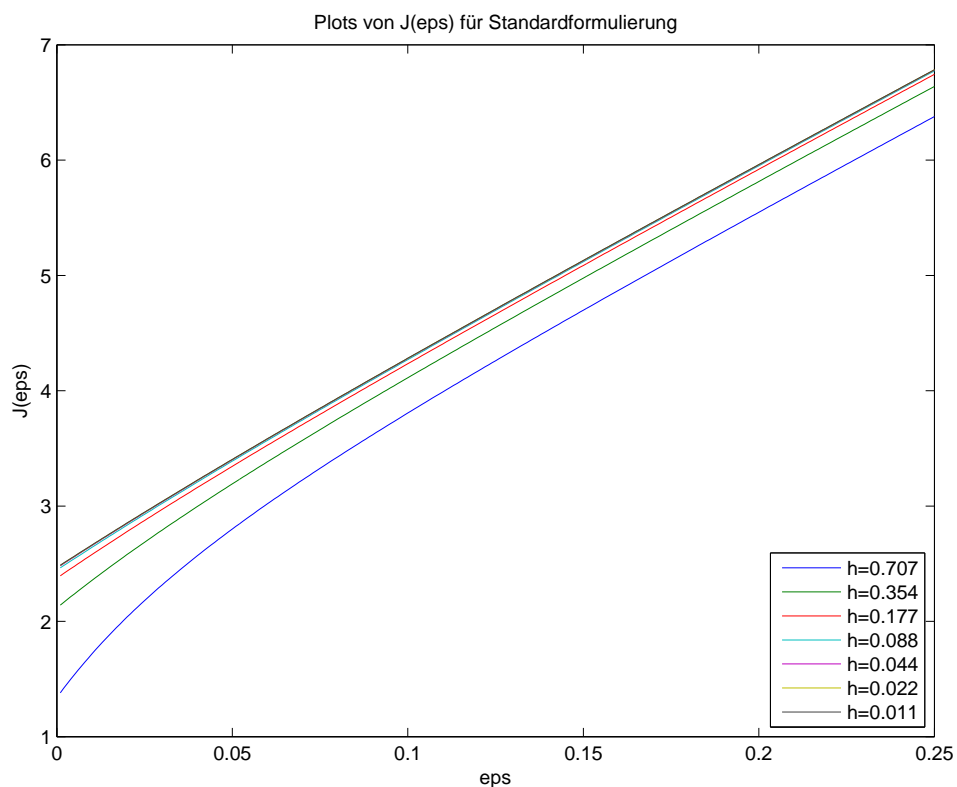
$$(T - \varepsilon S)w = h.$$

3.5 Numerische Resultate

3.5.1 Untersuchungen zur Standardformulierung

Numerische Berechnungen zur Funktion $u_1(x, y) = \sin(\pi x) * \sin(\pi y)$ auf dem Quadrat $[0, 1]^2$:

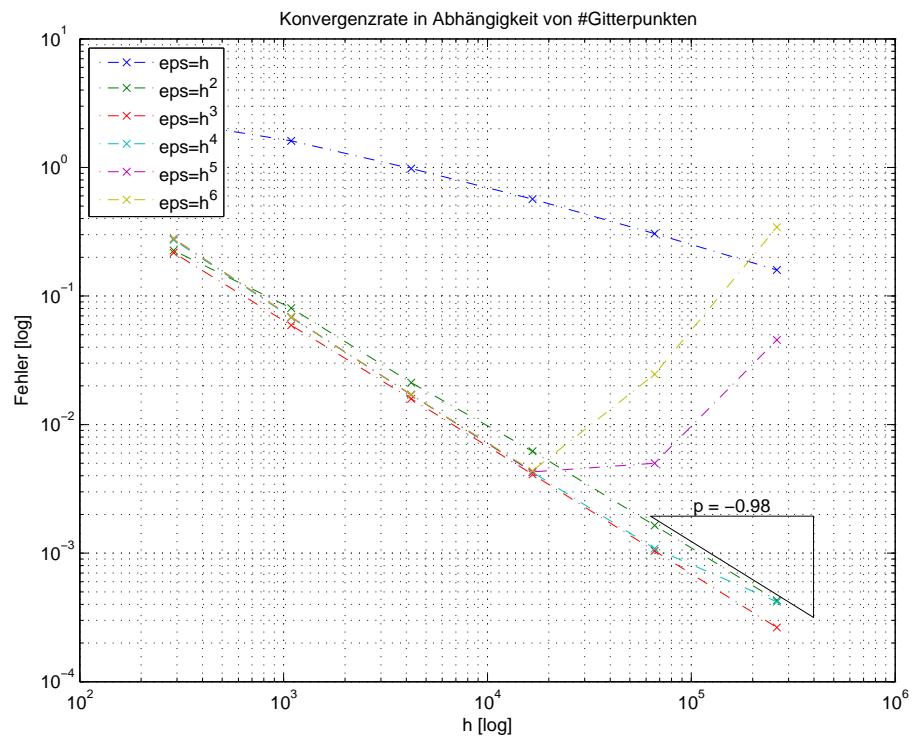
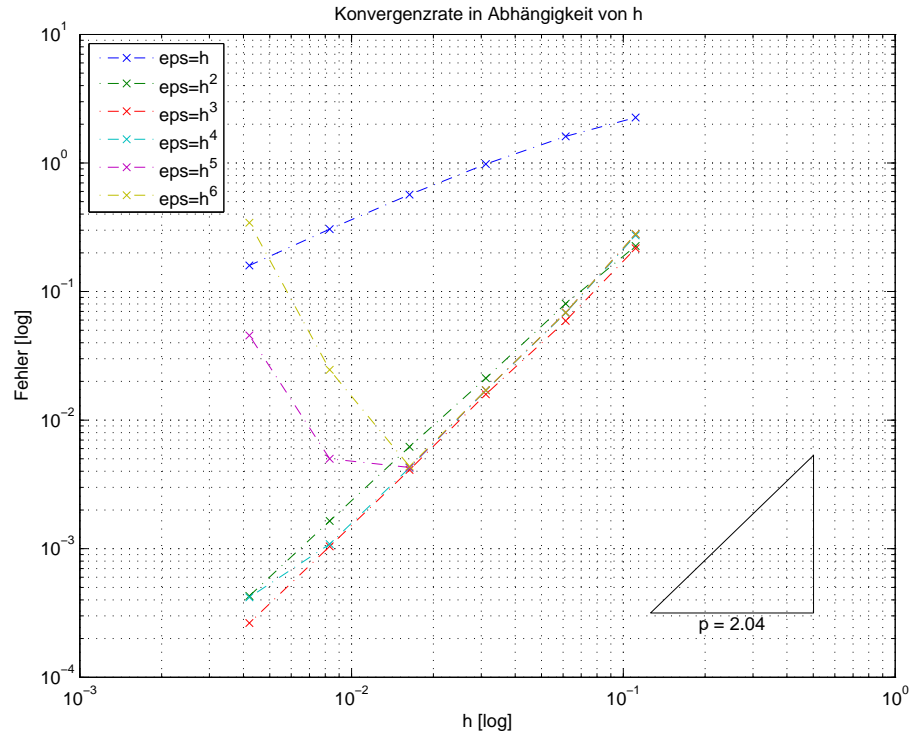
1. Graph von $J(\varepsilon)$



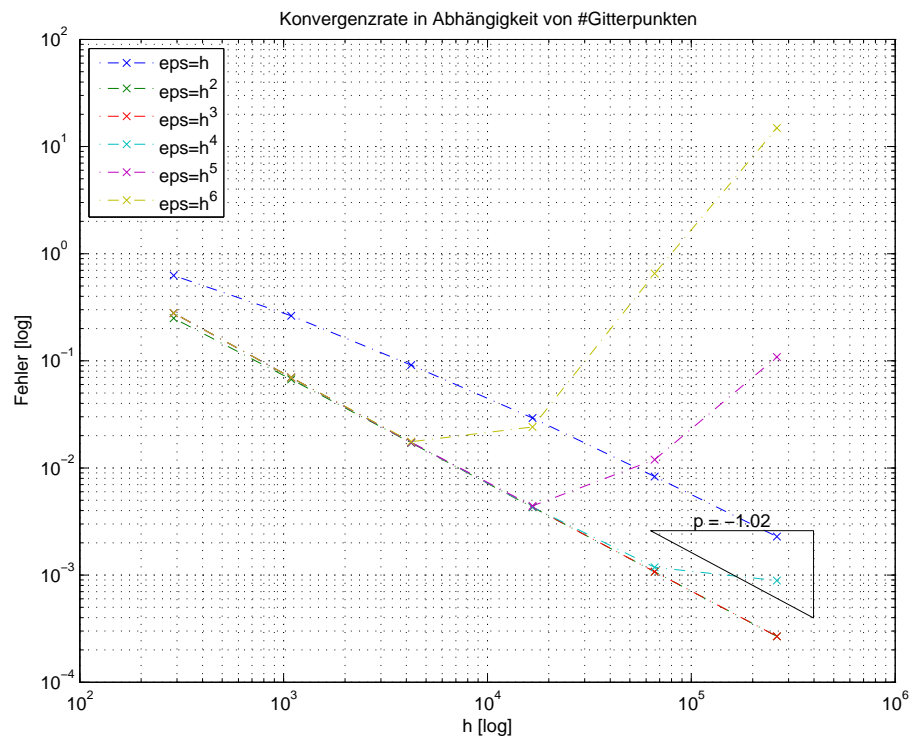
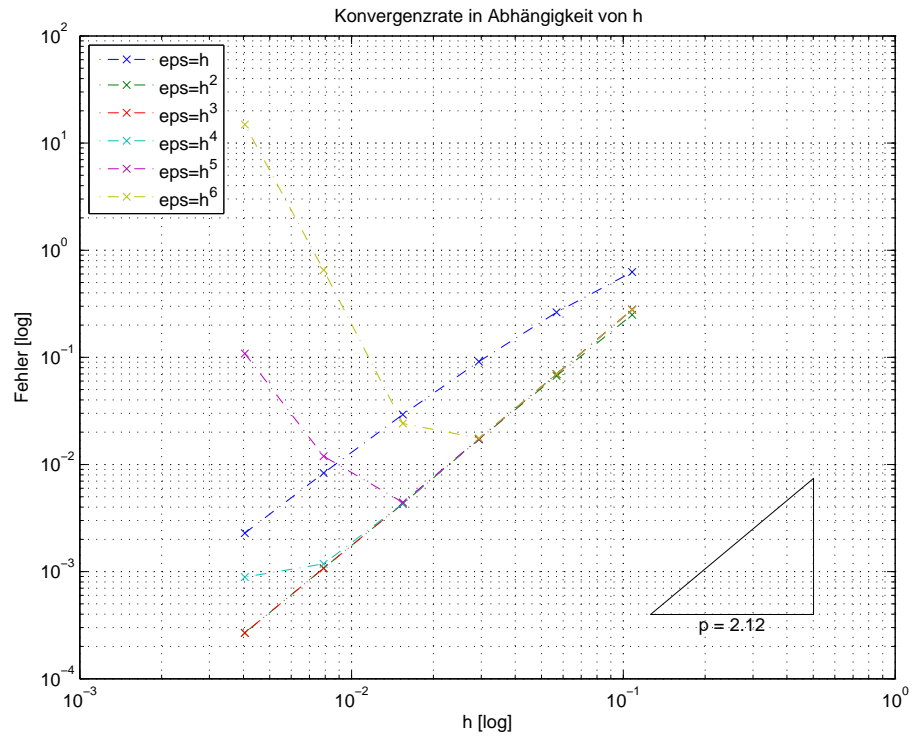
2. Übersicht über die numerisch bestimmten Konvergenzraten (siehe folgende Seiten)

Methode:	lineare Extrapolation	quadratische Extrapolation	kubische Extrapolation	direkte Methode
Konvergenzrate	2.04 für $\varepsilon = h^3$	2.12 für $\varepsilon = h^3$	2.24 für $\varepsilon = h^3$	1.91

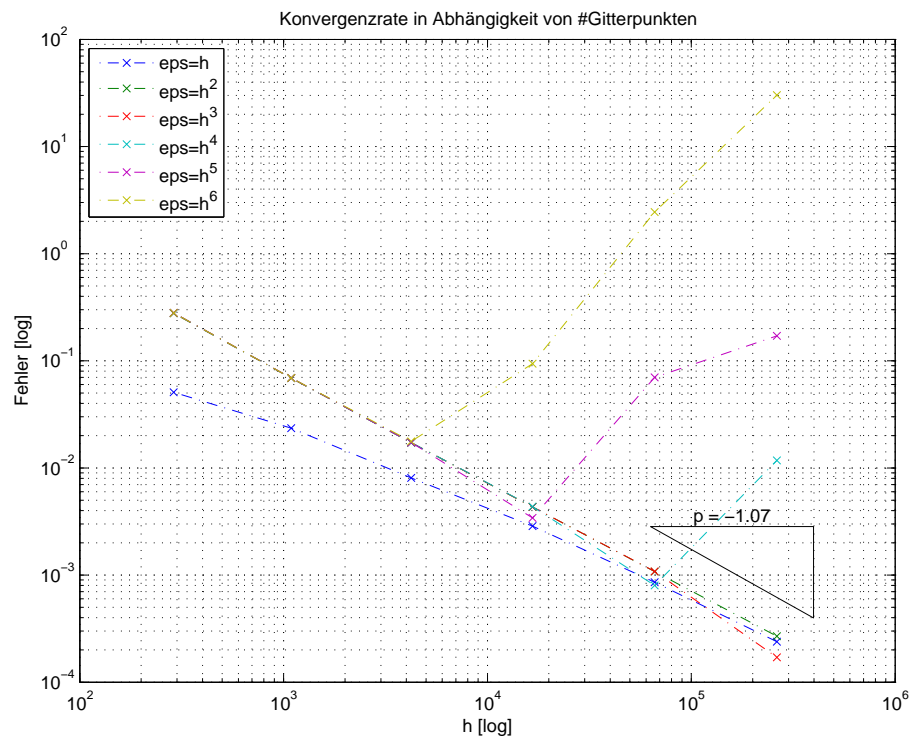
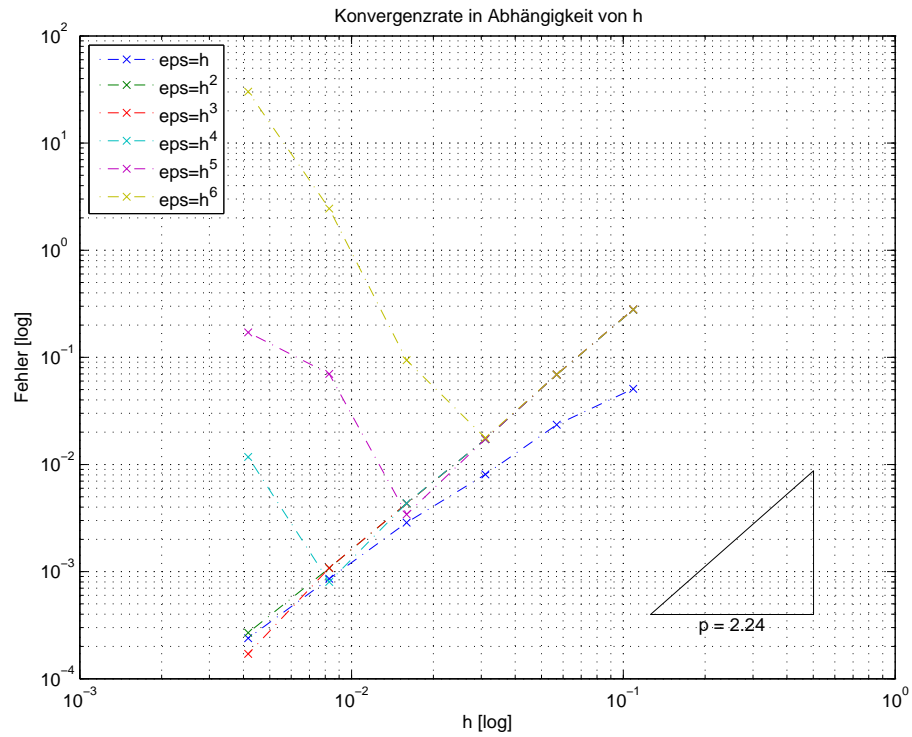
3. Konvergenzraten für verschiedene $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ bei linearer Extrapolation:



4. Quadratische Extrapolation mit den Werten $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 3\varepsilon_3$

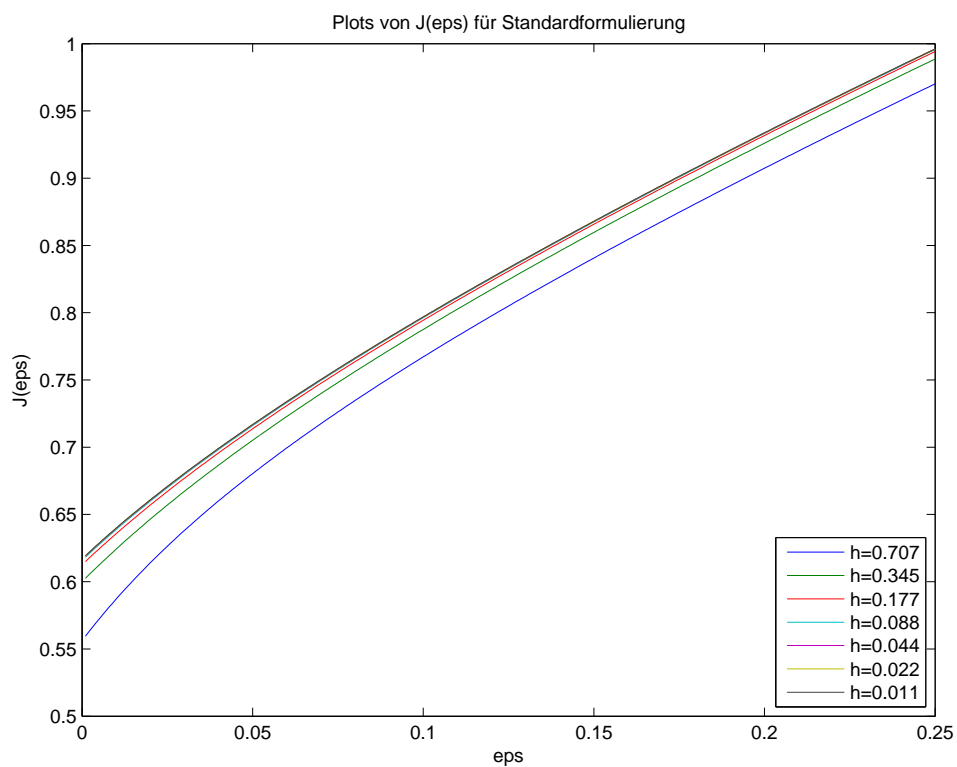


5. Kubische Extrapolation mit den Werten $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 3\varepsilon_3 = 4\varepsilon_4$



Numerische Berechnungen zur Funktion $u_2(x, y) = \cos(\frac{\pi}{2}x) * \cos(\frac{\pi}{2}y)$ auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$

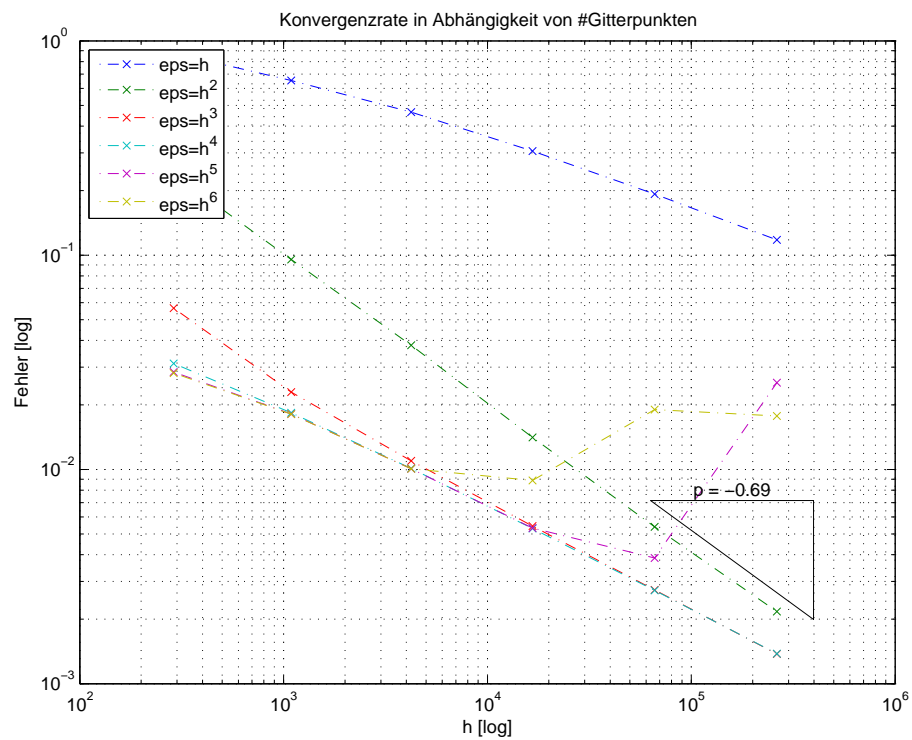
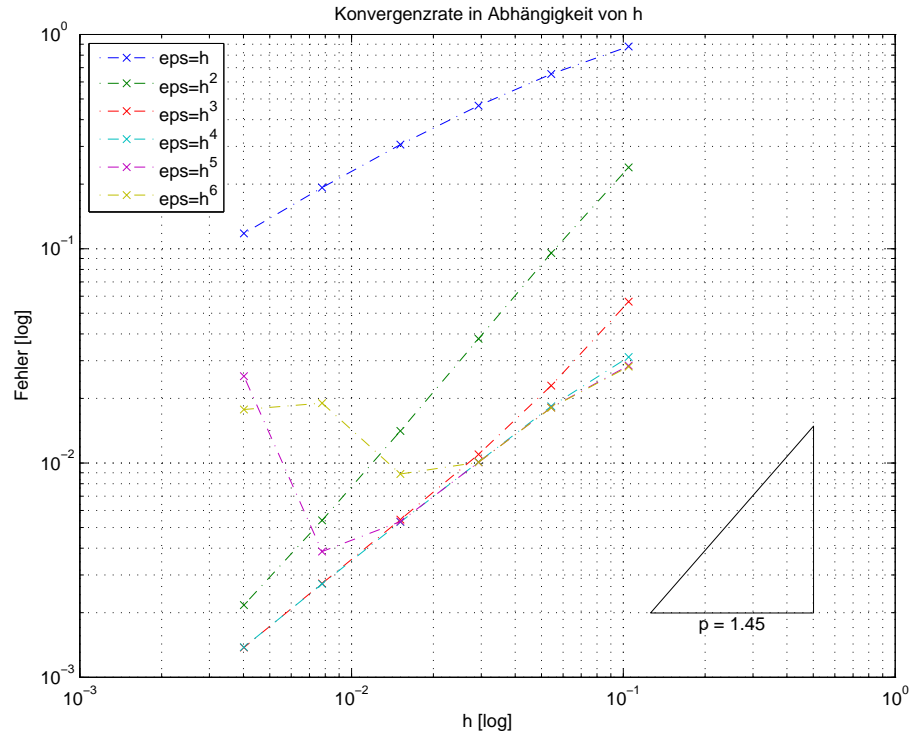
1. Graph von $J(\varepsilon)$



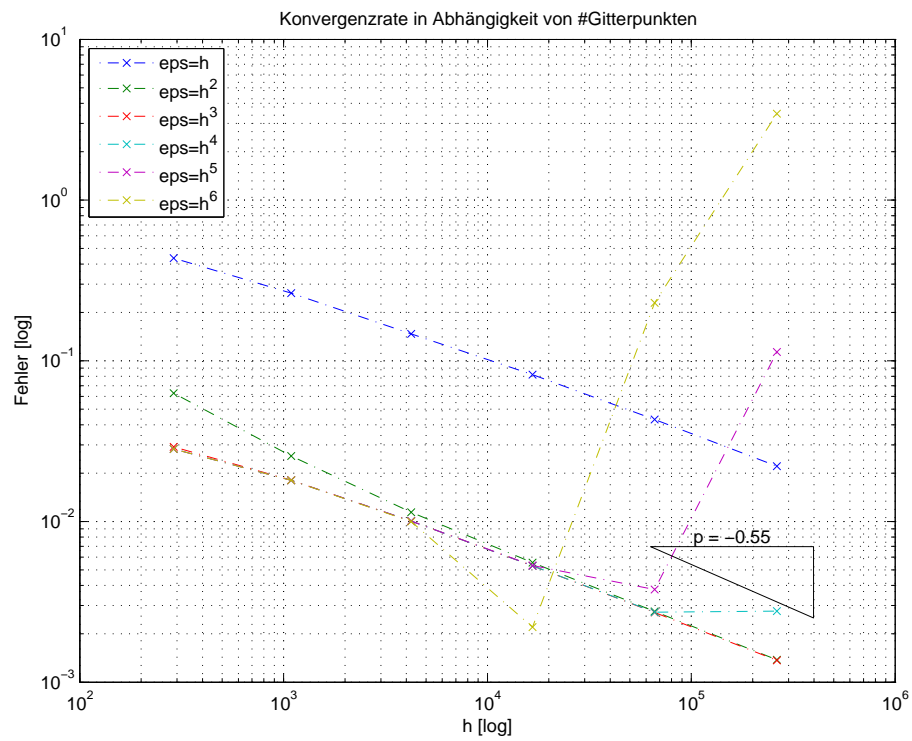
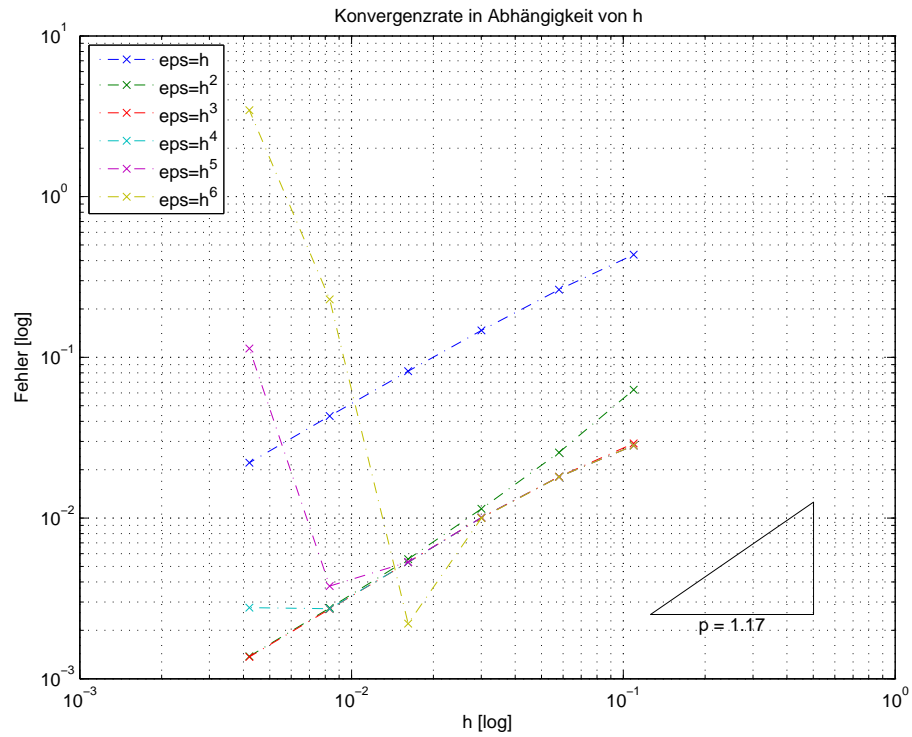
2. Übersicht über die numerisch bestimmten Konvergenzraten (siehe folgende Seiten)

Methode:	lineare Extrapolation	quadratische Extrapolation	kubische Extrapolation	direkte Methode
Konvergenzrate	1.45 für $\varepsilon = h^2$	1.17 für $\varepsilon = h^2$	0.99 für $\varepsilon = h^2$	1.04

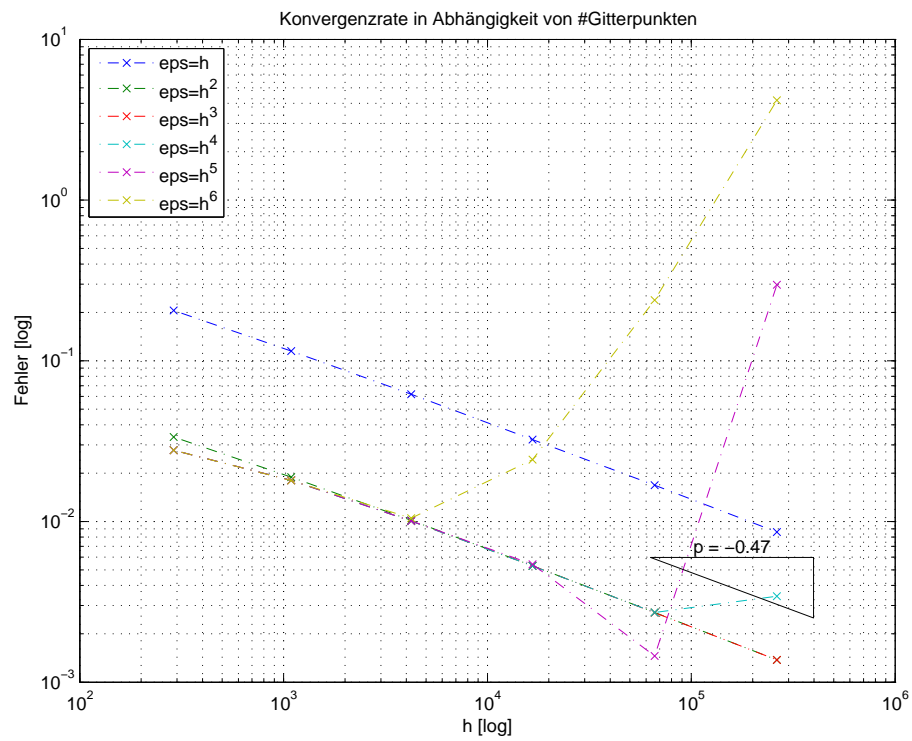
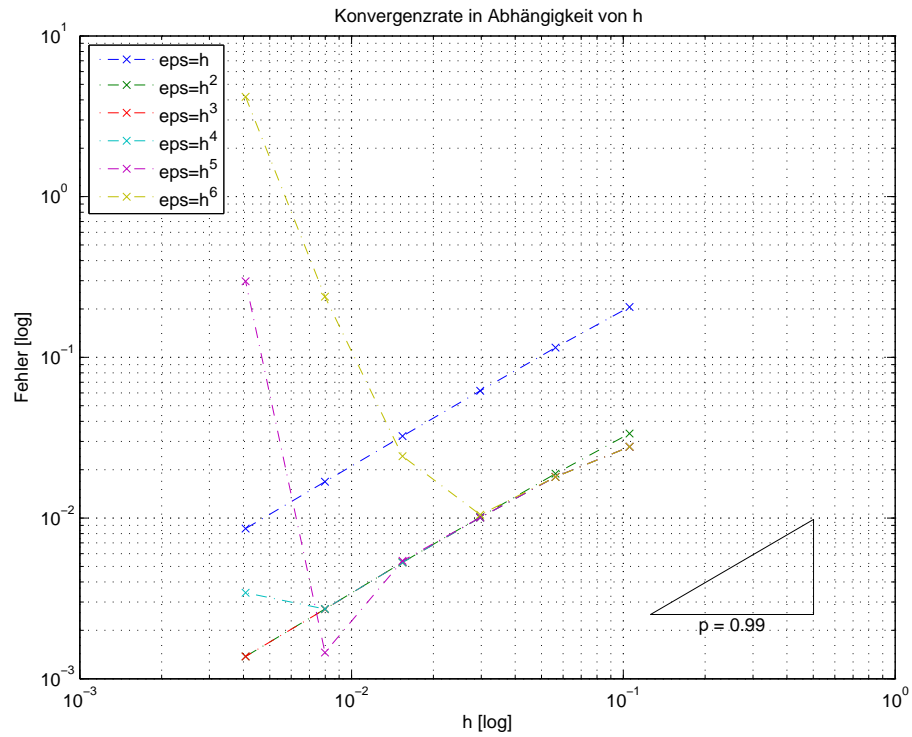
3. Konvergenzraten für verschiedene $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ bei linearer Extrapolation:



4. Quadratische Extrapolation mit den Werten $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 3\varepsilon_3$

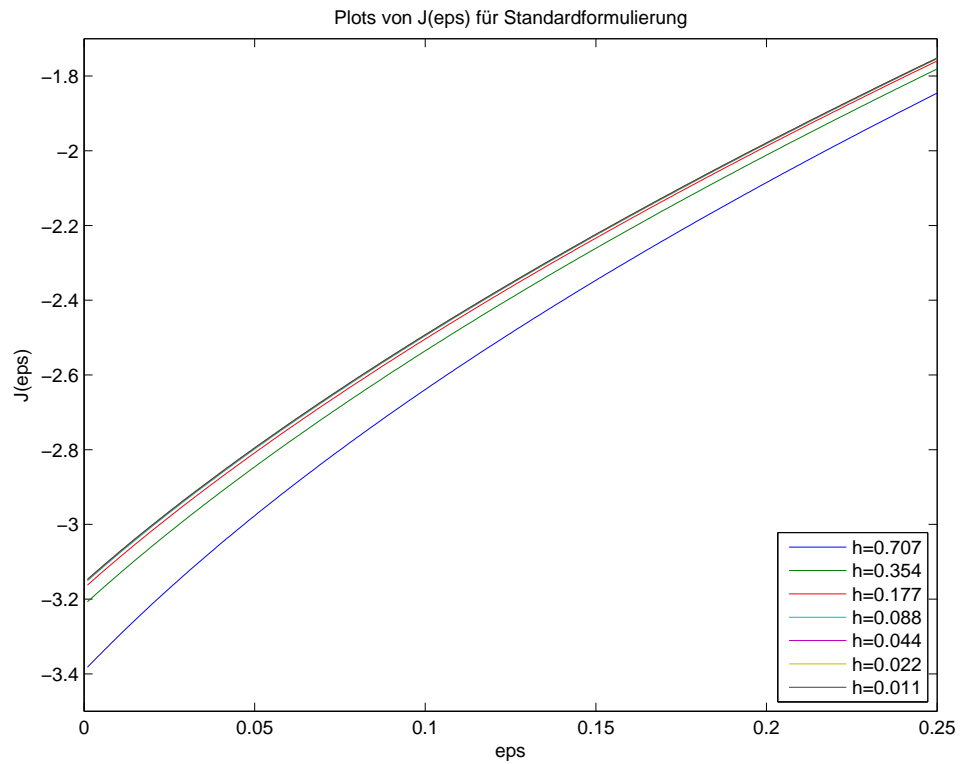


5. Kubische Extrapolation mit den Werten $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 3\varepsilon_3 = 4\varepsilon_4$



Numerische Berechnungen zur Funktion $u_3(x, y) = x^2 * (y^2 + 1)$ auf dem Quadrat $[0, 1] \times [0, 1]$

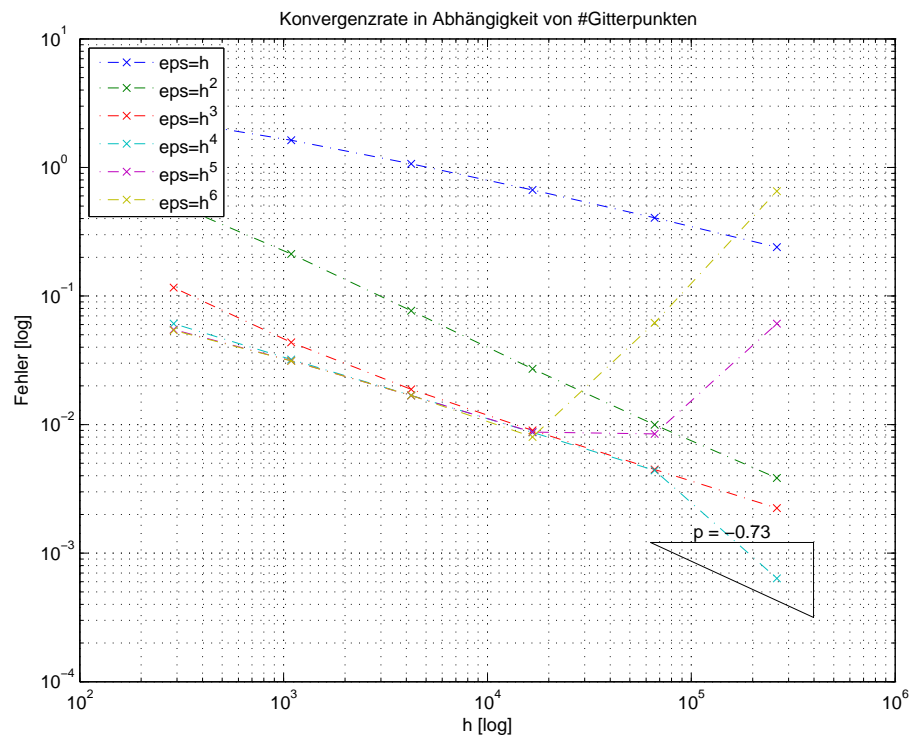
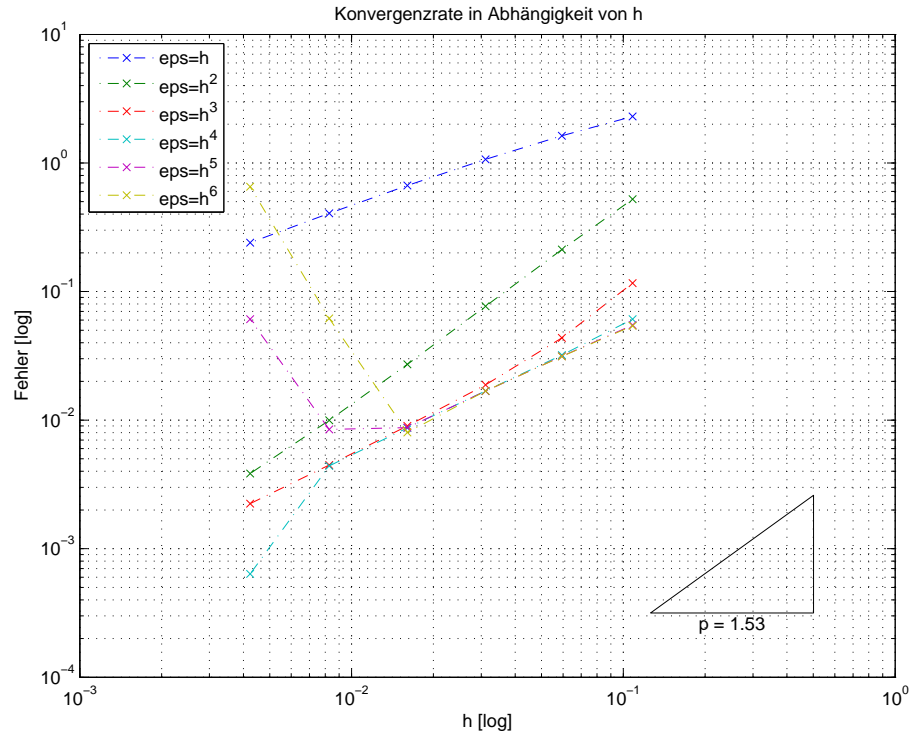
1. Graph von $J(\varepsilon)$



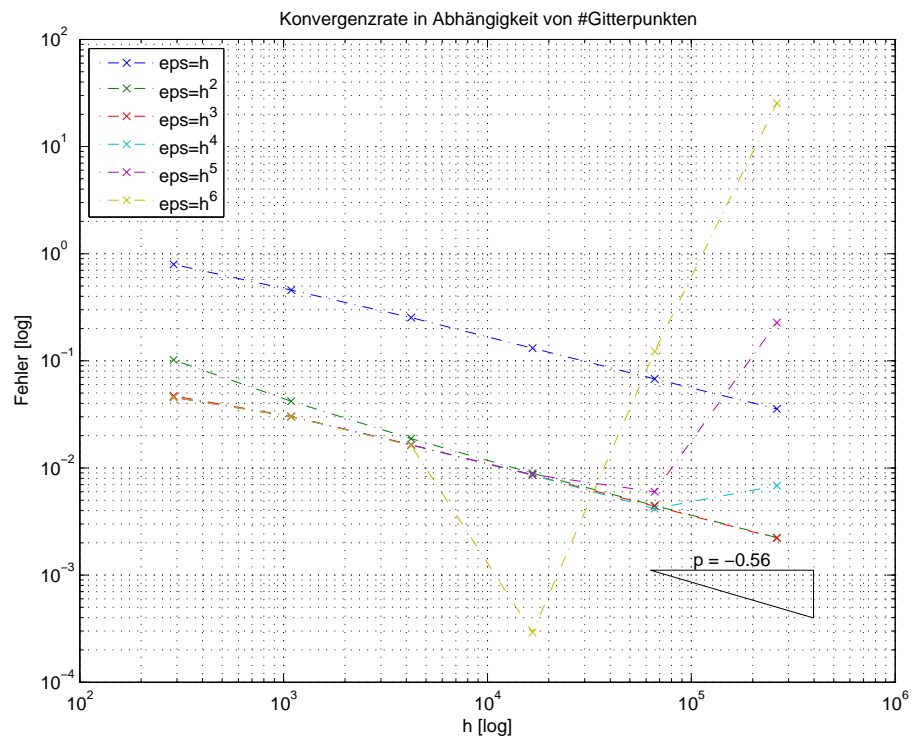
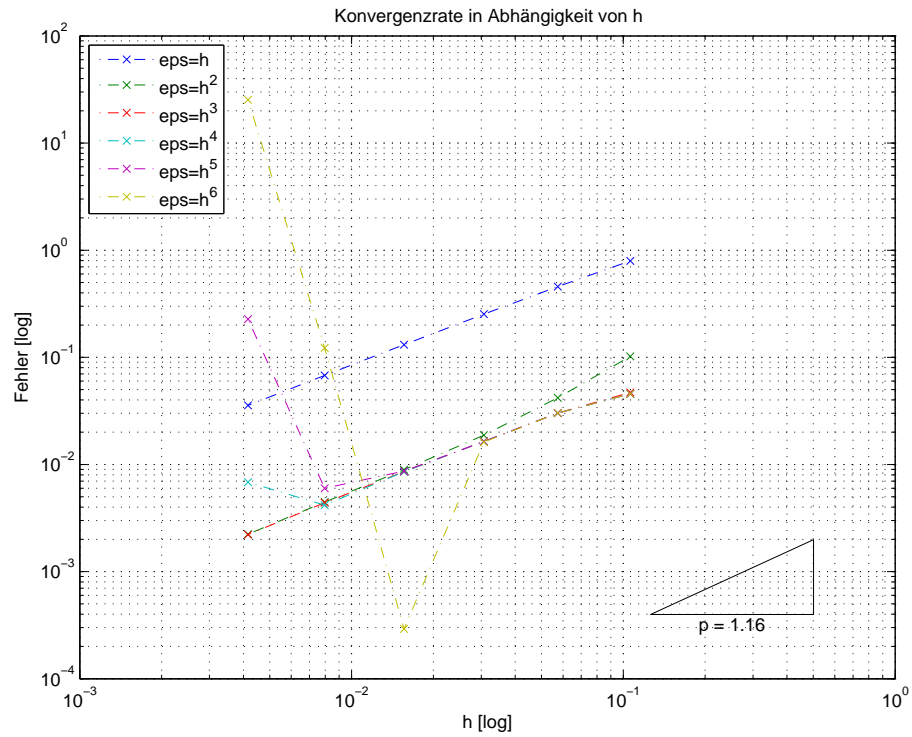
2. Übersicht über die numerisch bestimmten Konvergenzraten (siehe folgende Seiten)

Methode:	lineare Extrapolation	quadratische Extrapolation	kubische Extrapolation	direkte Methode
Konvergenzrate	1.53 für $\varepsilon = h^2$	1.16 für $\varepsilon = h^2$	1.04 für $\varepsilon = h^2$	1.03

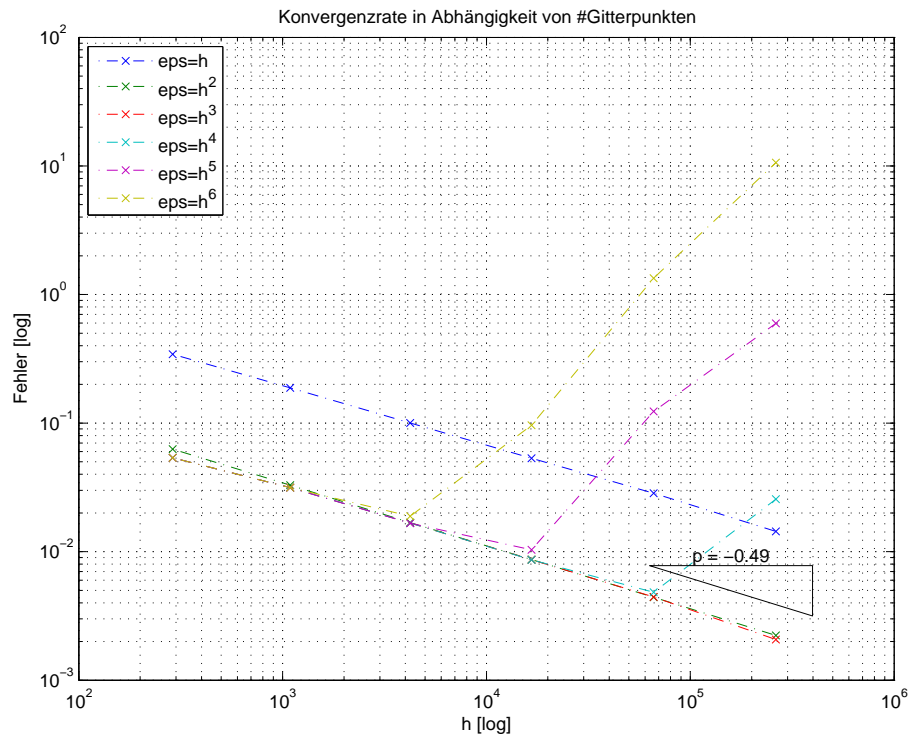
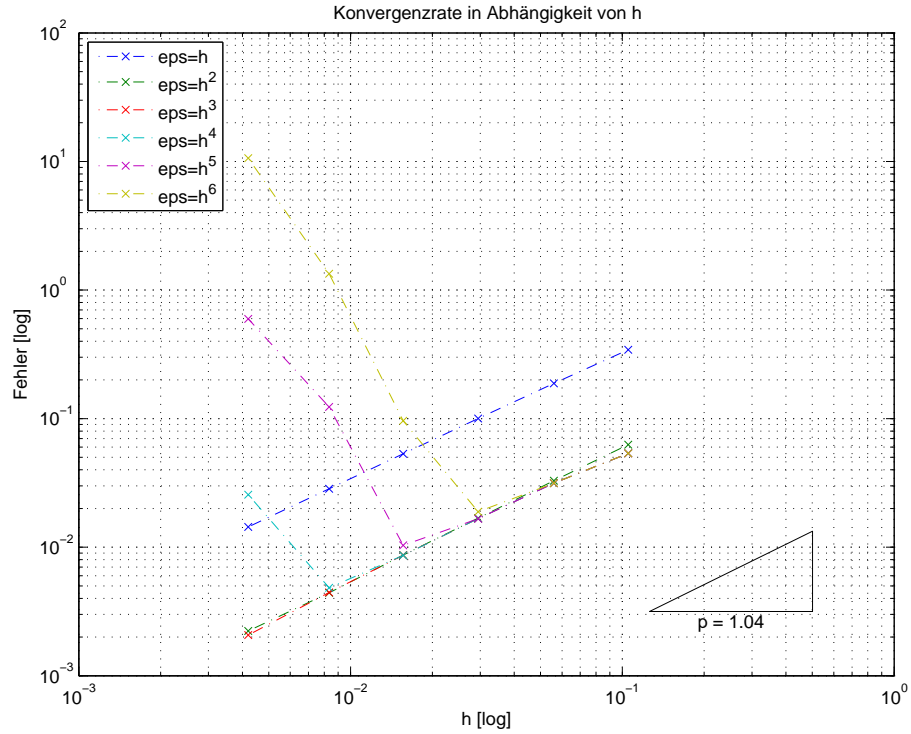
3. Konvergenzraten für verschiedene $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ bei linearer Extrapolation:



4. Quadratische Extrapolation mit den Werten $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 3\varepsilon_3$

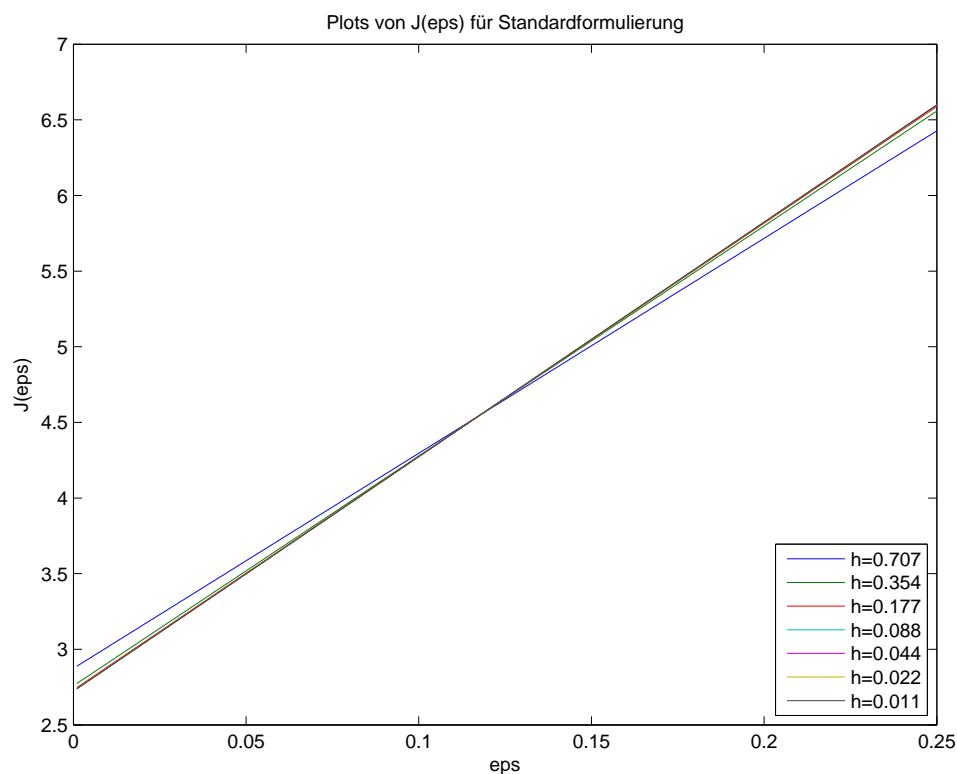


5. Kubische Extrapolation mit den Werten $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 3\varepsilon_3 = 4\varepsilon_4$



Numerische Berechnungen zur Funktion $u_4(r, \phi) = \cos(\frac{\pi}{2} * r)$ auf dem Einheitskreis ($r = 1$, Zentrum:[0, 0])

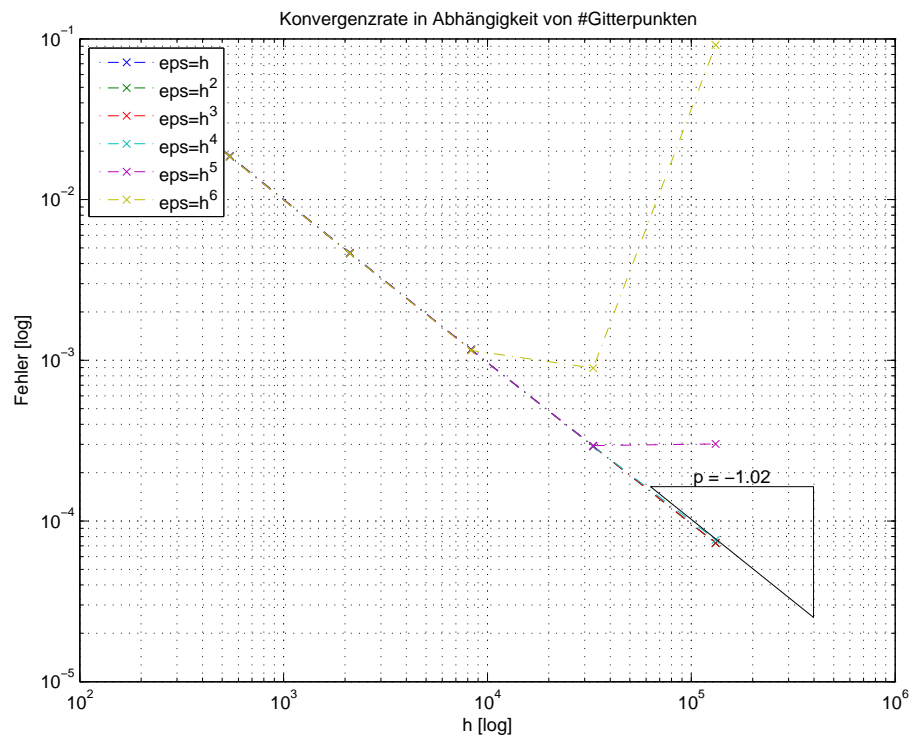
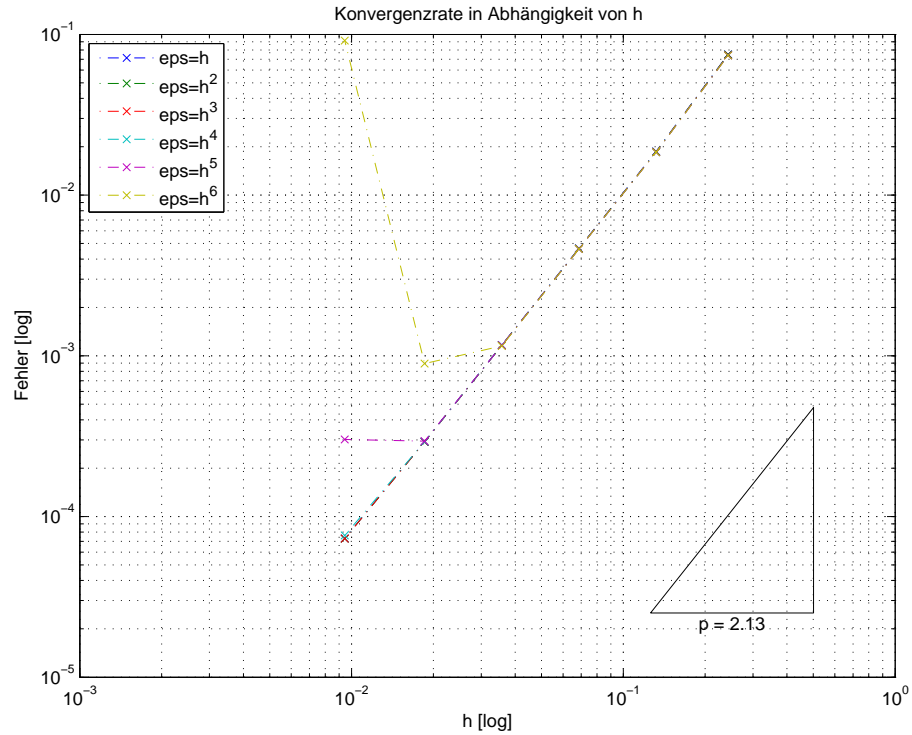
1. Graph von $J(\varepsilon)$



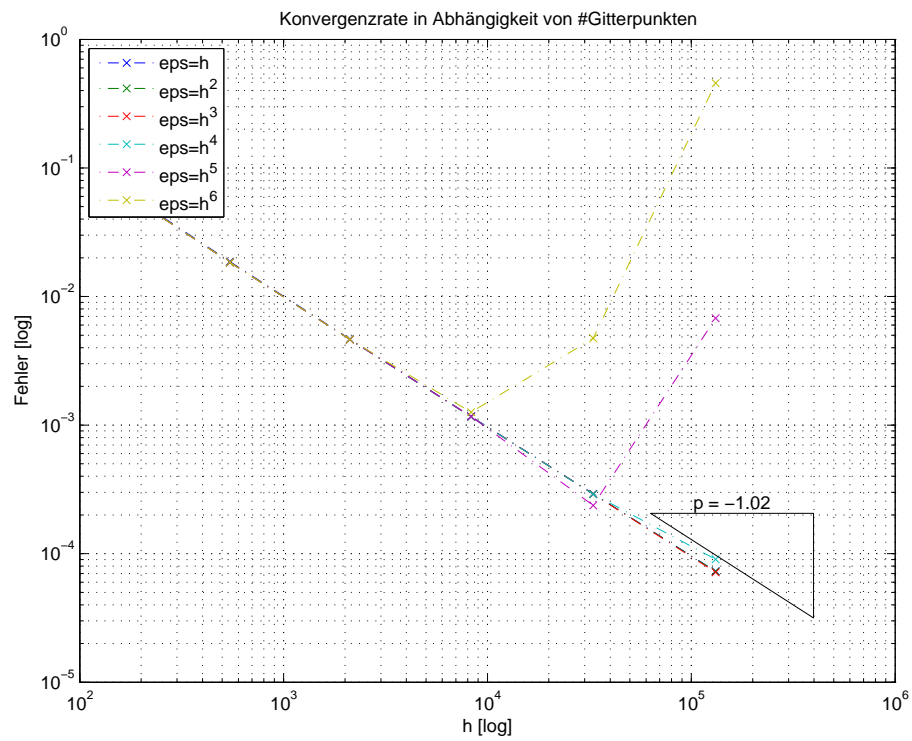
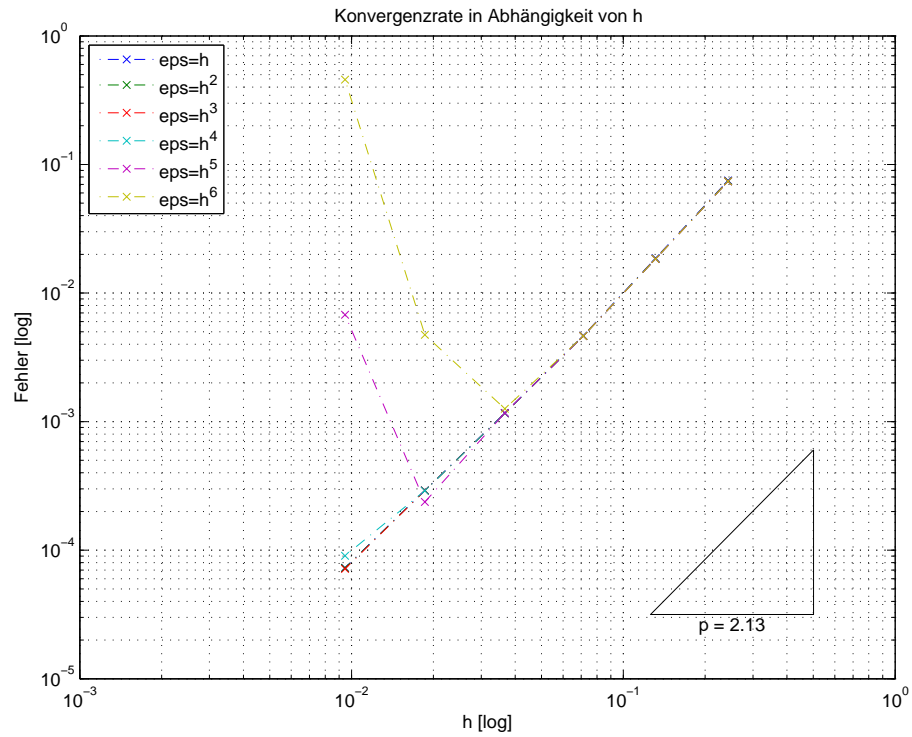
2. Übersicht über die numerisch bestimmten Konvergenzraten (siehe folgende Seiten)

Methode:	lineare Extrapolation	quadratische Extrapolation	kubische Extrapolation	direkte Methode
Konvergenzrate	2.13 für $\varepsilon = h^2$	2.13 für $\varepsilon = h^2$	2.12 für $\varepsilon = h^2$	0.99

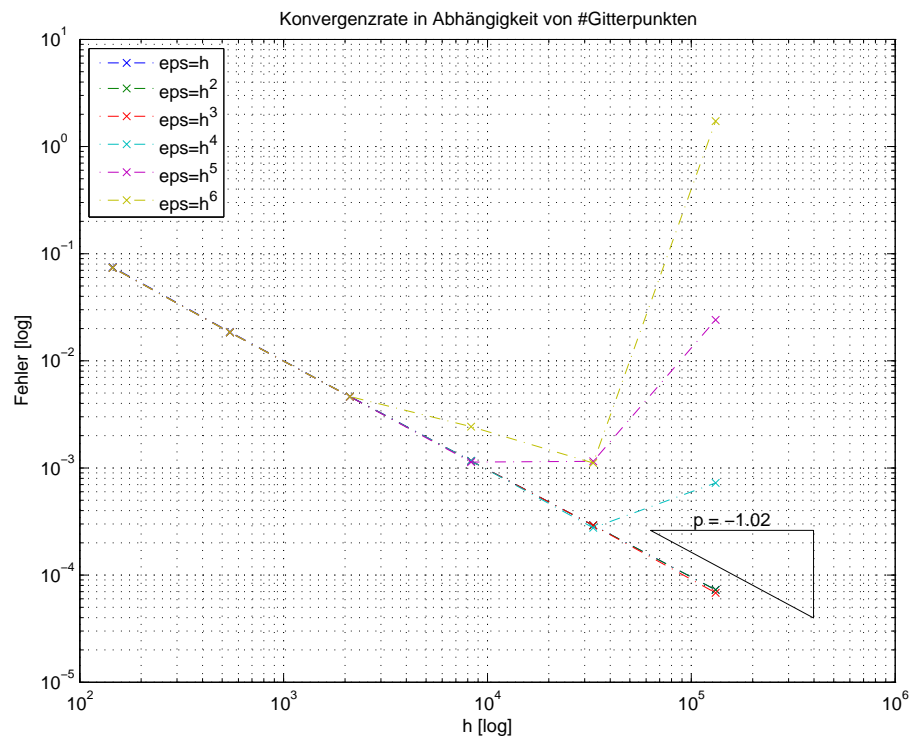
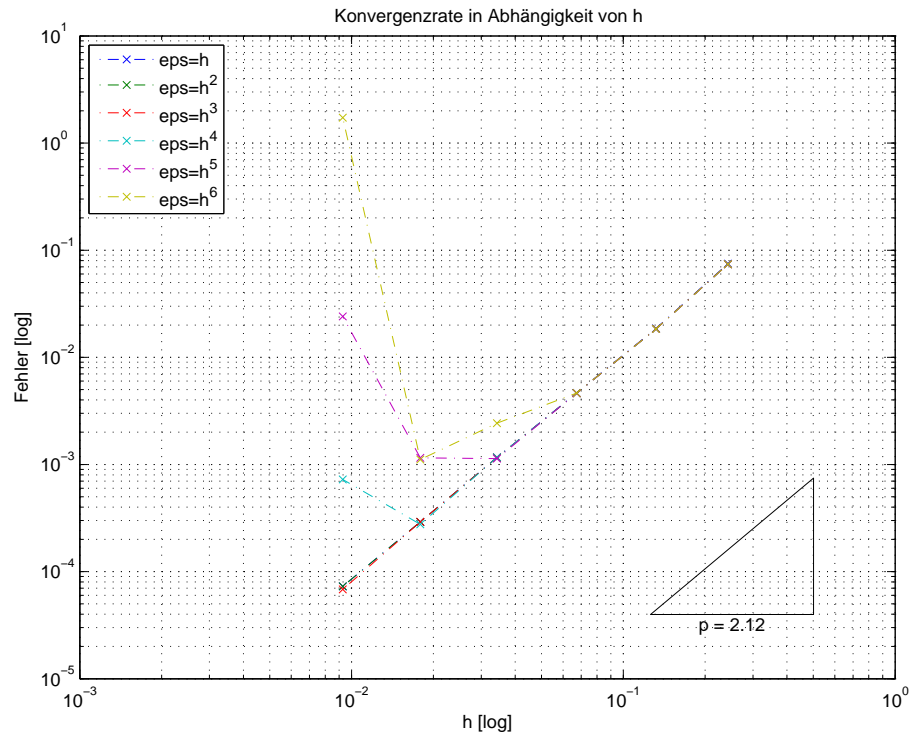
3. Konvergenzraten für verschiedene $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ bei linearer Extrapolation:



4. Quadratische Extrapolation mit den Werten $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 3\varepsilon_3$



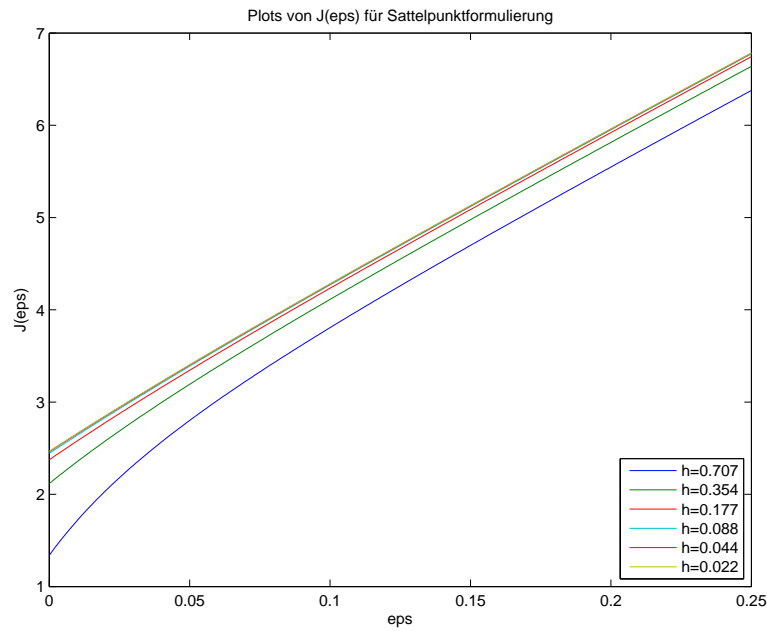
5. Kubische Extrapolation mit den Werten $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2 = 3\varepsilon_3 = 4\varepsilon_4$



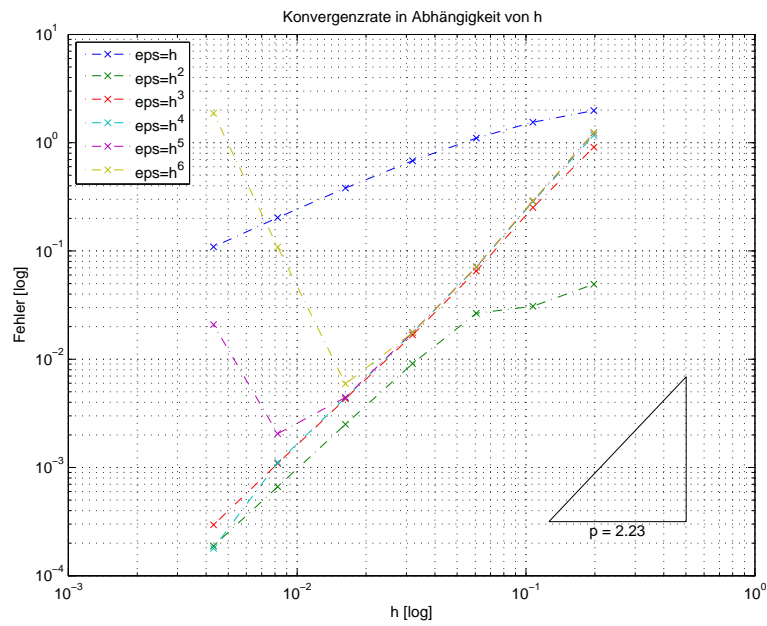
3.5.2 Untersuchungen für Sattelpunktformulierung

Numerische Berechnungen zur Funktion $u_1(x, y) = \sin(\pi x) * \sin(\pi y)$ auf dem Quadrat $[0, 1]^2$:

1. Graph von $J(\varepsilon)$

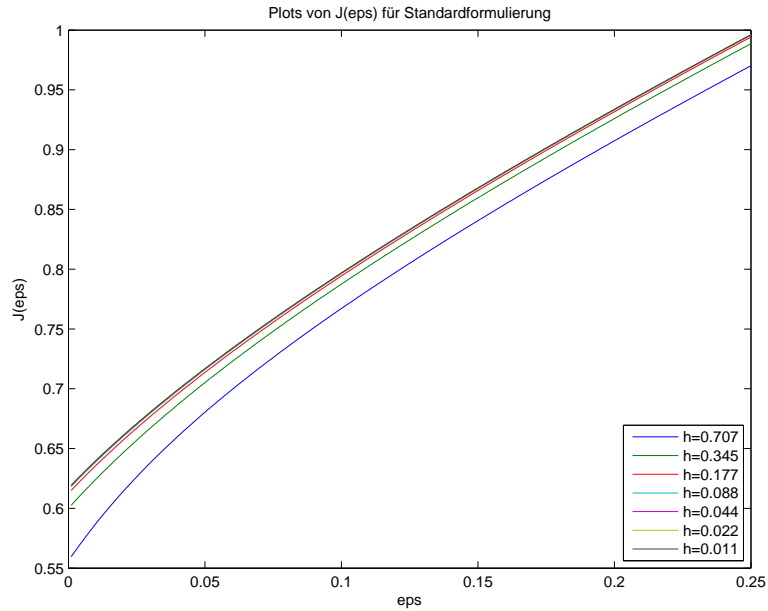


2. Konvergenzraten für verschiedene $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ bei linearer Extrapolation:

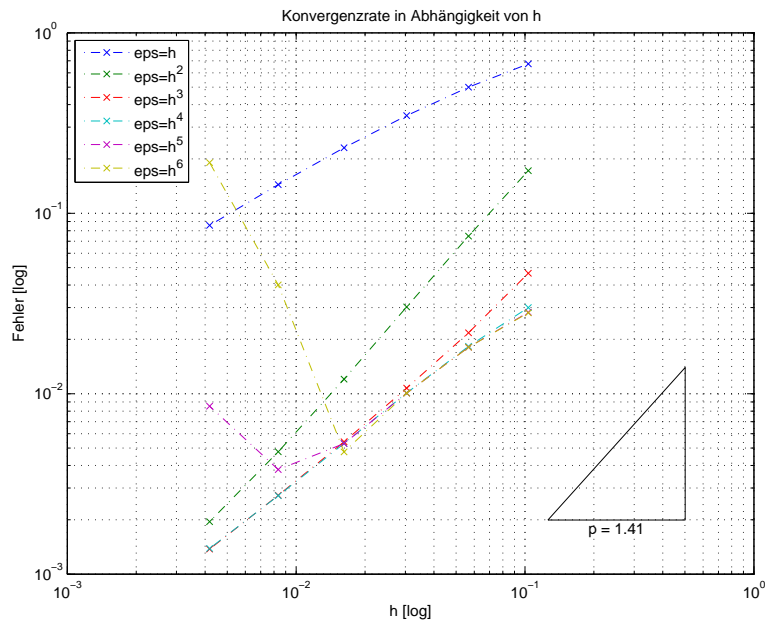


Numerische Berechnungen zur Funktion $u_2(x, y) = \cos(\frac{\pi}{2}x) * \cos(\frac{\pi}{2}y)$ auf dem Quadrat $[0, 1]^2$

1. Graph von $J(\varepsilon)$



2. Konvergenzraten für verschiedene $\varepsilon = \varepsilon_1 = 2\varepsilon_2$ bei linearer Extrapolation:



4 Schlussfolgerungen

Die Numerischen Experimente zeigen, dass bei der asymptotischen Methode mit linearer Extrapolation eine höhere Konvergenzrate erzielt wird als bei der direkten Methode. Zum Beispiel erhalten wir für die Funktion $u_2 = \cos(\frac{\pi}{2}x) \cos(\frac{\pi}{2}y)$ auf dem Einheitsquadrat eine Verbesserung der Konvergenzrate von 1.04 auf 1.45. Natürlich ist dafür aber der Rechenaufwand grösser, da das Problem für zwei verschiedene Werte von ε ausgerechnet wird.

Wenn man ausserdem die erzielten Fehler für gegebenes h vergleicht, so erkennt man, dass auch hier die asymptotische Methode bessere, d.h. kleinere Werte erreicht als die direkte Methode.

Eine noch höhere Extrapolation bringt anscheinend nicht zwangsläufig eine noch weitere Verbesserung der Konvergenzrate, da zum Beispiel bei der Funktion $u_4(r, \phi) = \cos(\frac{\pi}{2}r)$ auf dem Einheitskreis das Funktional $J(\varepsilon)$ ein sehr lineares Verhalten zeigt.

Mit der Sattelpunktformulierung scheint man auf den ersten Blick das Problem mit dem Term $\frac{1}{\varepsilon}$ zu umgehen. Dies ist aber nicht der Fall, da dort eben die entsprechenden Schwierigkeiten auftauchen weil die Inf-Sub-Bedingungen nicht erfüllt sind.

Leider zeigt die auf [Raf75] beruhende theoretische Abschätzung des Fehlers diese Verbesserung der Konvergenzordnung nicht wirklich. M.Raffy erhält dort für lineare Finite Elemente zwar einen Fehler der Ordnung $O(h^{\frac{4\alpha}{2\alpha+1}})$, was für $\alpha > \frac{1}{2}$ besser ist als die Ordnung $O(h)$ für die direkte Methode, jedoch geht er von der meiner Meinung nach falschen Annahme einer Approximation von $H^1(\Omega)$ durch lineare Finite Elemente mit $\|u - I_h u\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch^2 \|u\|_{H^2(\Omega)}$ aus.

5 Implementierung

Alle in der Arbeit aufgeführten Grafiken wurden mit Hilfe von MATLAB erzeugt. Grundlage meiner Implementierungen war die LehrFEM Finite Elemente Toolbox, welche von P. Meury und Prof. R. Hiptmair entwickelt wird (siehe http://www.math.ethz.ch/~meury/Projects/LehrFEM_MATLAB/). Darauf basierend habe ich noch einige Matlab Skripte und Funktionen zusätzlich geschrieben, wovon die wesentlichen Punkte nun nachfolgend aufgelistet werden.

Implementierungen zur direkten Methode:

Für die direkte Methode muss als erstes das Dirichlet Problem gelöst werden. Dies geschieht mit Hilfe dieser Funktion.

```
function U=dirichlet_LFE(Mesh,F_HANDLE,GD_HANDLE)
%Löst das Dirichlet Problem für die rechte Seite F_HANDLE und die Dirichlet
%Randdaten GD_HANDLE auf dem Gitter Mesh.
%
%Bsp: U=dirichlet_LFE(Mesh,F_HANDLE,GD_HANDLE)

%Steifigkeit-Matrix und Lastvektor aufstellen
A = assemMat_LFE(Mesh,@STIMA_Lapl_LFE);
L = assemLoad_LFE(Mesh,P706(),F_HANDLE);

%Dirichlet Randdaten
[U,FreeDofs] = assemDir_LFE(Mesh,-1,GD_HANDLE);
L = L - A*U;

%Gleichungssystem lösen
U(FreeDofs) = A(FreeDofs,FreeDofs)\L(FreeDofs);

return
```

Danach wird das Funktional $F = \int_{\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial n} \right|^2 dS$ direkt ausgerechnet.

```
function F = direkt_LFE(U,Mesh,QuadRule)
%Berechnet das Integral F von der Normalenableitung von U im Quadrat über
%den Rand des Gebietes, welches durch Mesh gegeben ist.
%QuadRule ist eine 1D-Quadraturformel
%
%Bsp: F=direkt_LFE(U,Mesh,QuadRule)

%Konstanten initialisieren
nGauss = size(QuadRule.w,1);
Rot = [0 -1; 1 0];
F = 0;

%Gradienten der shap functions berechnen
grad_N = grad_shap_LFE([QuadRule.x zeros(nGauss,1)]);

%Randkanten bestimmen
Loc=find(Mesh.BdFlags < 0);

for i = Loc'
    if(Mesh.Edge2Elem(i,1))
        %Orientierung zum Element auf der linken Seite
        Elem = Mesh.Edge2Elem(i,1);
        id_s = Mesh.Elements(Elem,rem(Mesh.EdgeLoc(i,1),3)+1);
        id_e = Mesh.Elements(Elem,rem(Mesh.EdgeLoc(i,1)+1,3)+1);
```

```

else
    %Orientierung zum Element auf der rechten Seite
    Elem = Mesh.Edge2Elem(i,2);
    id_s = Mesh.Elements(Elem,rem(Mesh.EdgeLoc(i,2),3)+1);
    id_e = Mesh.Elements(Elem,rem(Mesh.EdgeLoc(i,2)+1,3)+1);
end

Q0 = Mesh.Coordinates(id_s,:);
Q1 = Mesh.Coordinates(id_e,:);
x = ones(nGauss,1)*Q0+QuadRule.x*(Q1-Q0);
dS = norm(Q1-Q0);

%äussere Normale berechnen
normal = ones(nGauss,1)*((Q1-Q0)/dS*Rot);
%Gradient berechnen
idx = Mesh.Elements(Elem,:);
BK = [Mesh.Coordinates(idx(2),:)-Mesh.Coordinates(idx(1),:); ...
      Mesh.Coordinates(idx(3),:)-Mesh.Coordinates(idx(1),:)];
inv_BK_t = transpose(inv(BK));
grad_U = (U(idx(1))*grad_N(:,1:2) + ...
          U(idx(2))*grad_N(:,3:4) + ...
          U(idx(3))*grad_N(:,5:6))*inv_BK_t;

%Integral F aktualisieren
F = F + sum(QuadRule.w.*(sum(grad_U.*normal,2)).^2)*dS;
end

return

```

Die Grafiken zur Konvergenzrate der direkten Methode auf den Seiten 10-13 wurden schliesslich mit folgendem Skript erzeugt.

```

%Konvergenzrate für die direkte Methode bei linearen Finiten
%Elementen in Abhängigkeit von h und #Gitterpunkten

%Speicher leeren
clear all

%Konstanten initialisieren
F_HANDLE=@f1_Sqr;      %rechte Seite f
GD_HANDLE=@g1_D_Sqr;   %Dirichlet Randdaten g
exakt=2*pi^2;          %Exakter Wert für F
NREFS=6;
startNREFS=3;
h=zeros(1,NREFS);
nDofs=zeros(1,NREFS);

%Gitter generieren
Mesh = load_Mesh('Coord_Sqr.dat','Elem_Sqr.dat');
Mesh.ElemFlag = ones(size(Mesh.Elements,1),1);
Mesh = add_Edges(Mesh);
Loc = get_BdEdges(Mesh);
Mesh.BdFlags = zeros(size(Mesh.Edges,1),1);
Mesh.BdFlags(Loc) = -1;

for i=1:startNREFS
    Mesh=refine_REG(Mesh);
end

```



```

%Berechnungen zu den einzelnen Verfeinerungsstufen
for i=1:NREFS
    Mesh=refine_REG(Mesh);

    %Gitter ein wenig verformen
    loc=zeros(size(Mesh.Coordinates,1),1);
    loc(unique(Mesh.Edges(find(Mesh.BdFlags),:)))=1;
    Mesh=jiggle(Mesh,loc);
    Mesh=add_Edge2Elem(Mesh);

    %Gitterweite und #Gitterpunkte bestimmen
    h(i)=get_MeshWidth(Mesh);
    nDofs(i)=size(Mesh.Coordinates,1);

    %Dirichlet Problem Lösen
    U=dirichlet_LFE(Mesh,F_HANDLE,GD_HANDLE);

    %F direkt ausrechnen
    F(i)=direkt_LFE(U,Mesh,gauleg(0,1,4));
end
%Fehler
e_F=abs(F-exakt);

%Plot für Konvergenzrate in h
fig=figure('Name','Konvergenzrate für die direkte Methode');
loglog(h,e_F,'o'); hold on
grid('on');
h_log=log(h);
e_F_log=log(e_F);
p_F=polyfit(h_log,e_F_log,1);
loglog(h,exp(polyval(p_F,h_log)),'-');
add_Slope(gca,'SouthEast',p_F(1));
title('Konvergenzrate in Abhängigkeit von h');
xlabel('h [log]'); ylabel('Fehler [log]');

%Plot für Konvergenzrate in nDofs
fig=figure('Name','Konvergenzrate für die direkte Methode');
loglog(nDofs,e_F,'o'); hold on
grid('on');
nDofs_log=log(nDofs);
p_F=polyfit(nDofs_log,e_F_log,1);
loglog(nDofs,exp(polyval(p_F,nDofs_log)),'-');
add_Slope(gca,'SouthWest',p_F(1));
title('Konvergenzrate in Abhängigkeit von #Gitterpunkten');
xlabel('#Gitterpunkte [log]'); ylabel('Fehler [log]');

```

Implementierungen zur asymptotischen Methode:

Hierbei wird zunächst das gestörte Problem mit den Robin Randdaten für verschiedene ε gelöst.

```
function U_eps=gestoert_LFE(Mesh,F_HANDLE,GD_HANDLE,epsilon)
%Löst das gestörte Problem für die rechte Seite F_HANDLE und die Dirichlet(BdFlag=-2)
%und Robin(BdFlag=-1) Randdaten GD_HANDLE auf dem Gitter Mesh.
%
%Bsp: U=gestoert_LFE(Mesh,F_HANDLE,GD_HANDLE,epsilon)

% Steifigkeitsmatrix und Lastvektor aufstellen
A = assemMat_LFE(Mesh,@STIMA_Lapl_LFE);
L = assemLoad_LFE(Mesh,P706(),F_HANDLE);

%Robin Randdaten einbauen
[K,L] = assemRob_LFE(Mesh,-1,L,gauleg(0,1,4),GD_HANDLE,1,epsilon);

%Dirichlet Randdaten einbauen
[U_eps,FreeDofs] = assemDir_LFE(Mesh,-2,GD_HANDLE);
L = L - A*U_eps;

%Gleichungssystem lösen
U_eps(FreeDofs) = (A(FreeDofs,FreeDofs)+K(FreeDofs,FreeDofs))\L(FreeDofs);

return
```

Die Assemblierung der Robinranddaten geschieht dabei mit Hilfe der folgenden Funktion.

```
function [B,L] = assemRob_LFE(Mesh,BdFlags,L,QuadRule,FHandle,a,b,varargin)
%Assemblierung von Robin Randdaten, welche durch FHANDLE gegeben sind, auf
%den Kanten mit vorgegebenen BdFlags.
%QuadRule ist eine 1D-Quadraturformel zur numerischen Integration
%entlang einer Kante.
%a,b sind die Koeffizienten für die Robinranddaten:  $a*u + b*du/dn = g$ 

%Initialisiere Konstanten
nCoordinates = size(Mesh.Coordinates,1);
nGauss = size(QuadRule.w,1);

%shape functions berechnen
N = shap_LFE([QuadRule.x zeros(nGauss,1)]);

Lloc = zeros(2,1);
Bloc = zeros(2,1);
B = sparse(nCoordinates,nCoordinates);

for j1 = BdFlags
%Randkanten bestimmen
Loc = get_BdEdges(Mesh);
Loc = Loc(Mesh.BdFlags(Loc) == j1);

for j2 = Loc'
if(Mesh.Edge2Elem(j2,1))
%Orientierung zum Element auf der linken Seite
Elem = Mesh.Edge2Elem(j2,1);
EdgeLoc = Mesh.EdgeLoc(j2,1);
id_s = Mesh.Elements(Elem,rem(EdgeLoc,3)+1);
id_e = Mesh.Elements(Elem,rem(EdgeLoc+1,3)+1);
```

```

else
    %Orientierung zum Element auf der rechten Seite
    Elem = Mesh.Edge2Elem(j2,2);
    EdgeLoc = Mesh.EdgeLoc(j2,2);
    id_s = Mesh.Elements(Elem,rem(EdgeLoc,3)+1);
    id_e = Mesh.Elements(Elem,rem(EdgeLoc+1,3)+1);
end

Q0 = Mesh.Coordinates(id_s,:);
Q1 = Mesh.Coordinates(id_e,:);
x = ones(nGauss,1)*Q0+QuadRule.x*(Q1-Q0);
dS = norm(Q1-Q0);

%Beitrag an den Lastvektor berechnen
FVal = FHandle(x,j1,varargin{:});
Lloc(1) = sum(QuadRule.w.*FVal.*N(:,1))*dS;
Lloc(2) = sum(QuadRule.w.*FVal.*N(:,2))*dS;

L(id_s) = L(id_s)+Lloc(1)./b;
L(id_e) = L(id_e)+Lloc(2)./b;

%Beitrag zur Matrix B berechnen
Bloc(1)=sum(QuadRule.w.*N(:,1).*N(:,1))*dS;
Bloc(2)=sum(QuadRule.w.*N(:,1).*N(:,2))*dS;

B(id_s,id_s) = B(id_s,id_s) + a/b*Bloc(1);
B(id_e,id_e) = B(id_e,id_e) + a/b*Bloc(1);
B(id_s,id_e) = B(id_s,id_e) + a/b*Bloc(2);
B(id_e,id_s) = B(id_e,id_s) + a/b*Bloc(2);
end
end

return

```

Als nächstes wird das Funktional $J(\varepsilon) = \int_{\Omega} f u_{\varepsilon} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u_{\varepsilon}|^2 dx$ ausgerechnet.

```

function J_eps=funktional_LFE(U_eps,Mesh,QuadRule,F_HANDLE)
%Berechnet das Funktional J(eps) mit Hilfe der Lösung U_eps des gestörten
%Problems und der rechten Seite F_HANDLE.
%QuadRule ist eine 2D-Quadratur Formel auf dem Referenzelement
%
%Bsp: J_eps=funktional_LFE(U_eps,Mesh,QuadRule,F_HANDLE)

%Konstanten initialisieren
nElements = size(Mesh.Elements,1);
nPts = size(QuadRule.w,1);
grad_N = grad_shap_LFE(QuadRule.x);
shap_N = shap_LFE(QuadRule.x);
J_eps = 0;

for i=1:nElements

    ecken=Mesh.Elements(i,:); %Ecken des Elements
    coord=Mesh.Coordinates(ecken,:); %Koordinaten der Ecken
    werte=U_eps(ecken); %Werten von U an den Ecken

    %Element Quadratur Punkte
    bK = coord(1,:);
    BK = [coord(2,:)-bK; coord(3,:)-bK];

```

```

det_BK = abs(det(BK));
x = QuadRule.x*BK + ones(nPts,1)*bK;

%Integral von Gradient^2
inv_BK_t = transpose(inv(BK));
grad_U = (werte(1)*grad_N(:,1:2) + ...
          werte(2)*grad_N(:,3:4) + ...
          werte(3)*grad_N(:,5:6))*inv_BK_t;
J_eps = J_eps - 1/2*sum(QuadRule.w.*sum(grad_U.*grad_U,2))*det_BK;

%Integral von f*u
FVal = F_HANDLE(x);
UVal = shap_N(:,1)*werte(1)+shap_N(:,2)*werte(2)+shap_N(:,3)*werte(3);
J_eps = J_eps + sum(QuadRule.w.*FVal.*UVal)*det_BK;
end

return

```

Zum Schluss wird noch mittels Extrapolation der Wert von $\left. \frac{dJ(\varepsilon)}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0}$ bestimmt.

```

function F = extrapol(J_eps,epsilon)
%Extrapolation der Ableitung am Nullpunkt mit Hilfe der Werte J_eps zu den
%Stützstellen epsilon
%
%Bsp: F = extrapol(J_eps,epsilon)

m=size(J_eps,2);
%Startwerte
for i=1:m
    T(i,1)=J_eps(i);
    D(i,1)=0;
end
%neue Werte berechnen
for i=2:m
    for k=2:i
        T(i,k)=T(i,k-1)+(T(i,k-1)-T(i-1,k-1))/(epsilon(i-k+1)/epsilon(i)+1);
        D(i,k)=D(i,k-1)+1/(epsilon(i)-epsilon(i-k+1))*(T(i,k-1)-T(i-1,k-1))+ ...
            (D(i,k-1)-D(i-1,k-1))/(epsilon(i-k+1)/epsilon(i)+1);
    end
end
F=D(m,m);

return

```

Auch hier habe ich wieder ein Skript geschrieben, um die Grafiken zu den Konvergenzraten zu erzeugen.

```

%Konvergenzrate für die asymptotische Methode bei linearen Finiten
%Elementen in Abhängigkeit von h und #Gitterpunkten

%Speicher leeren
clear all

%Konstanten initialisieren
F_HANDLE=@f1_Sqr; %rechte Seite f
GD_HANDLE=@g1_D_Sqr; %Randdaten g
exakt=2*pi^2; %Exakter Wert
grad=1; %Grad der Extrapolation

```

```

NREFS=6;
startNREFS=3;
h=zeros(1,NREFS);
nDofs=zeros(1,NREFS);

%Gitter generieren
Mesh = load_Mesh('Coord_Sqr.dat','Elem_Sqr.dat');
Mesh.ElemFlag = ones(size(Mesh.Elements,1),1);
Mesh = add_Edges(Mesh);
Loc = get_BdEdges(Mesh);
Mesh.BdFlags = zeros(size(Mesh.Edges,1),1);
Mesh.BdFlags(Loc) = -1;
for i=1:startNREFS
    Mesh=refine_REG(Mesh);
end

%Berechnungen zu den einzelnen Verfeinerungsstufen
for i=1:NREFS
    Mesh=refine_REG(Mesh);

    %Gitter ein wenig verformen
    loc=zeros(size(Mesh.Coordinates,1),1);
    loc(unique(Mesh.Edges(find(Mesh.BdFlags),:)))=1;
    Mesh=jiggle(Mesh,loc);
    Mesh=add_Edge2Elem(Mesh);

    %Gitterweite und #Gitterpunkte bestimmen
    h(i)=get_MeshWidth(Mesh);
    nDofs(i)=size(Mesh.Coordinates,1);

    for k=1:5
        eps_start=h(i)^k;
        for m=1:grad+1
            epsilon(m)=eps_start/m;

            %Laplace-Gleichungen mit Robin Randdaten lösen
            U_eps=gestoert_LFE(Mesh,F_HANDLE,GD_HANDLE,epsilon(m));

            %Funktional J_eps berechnen
            J_eps(m)=funktional_LFE(U_eps,Mesh,P706(),F_HANDLE);
            clear U_eps
        end
        %Extrapolation
        J(k,i)=extrapol(J_eps,epsilon);

        %Fehler
        e_J(k,i)=abs(J(k,i)-exakt);
    end
end

%Plot für Konvergenzrate in h
fig=figure('Name','Konvergenzraten für die asymptotische Methode');
loglog(h,e_J(1,:),'-x',h,e_J(2,:),'-x',h,e_J(3,:),'-x', ...
        h,e_J(4,:),'-x',h,e_J(5,:),'-x')
grid('on');
h_log=log(h);
e_J_log=log(e_J);
for m=1:size(e_J,1)
    p_J(m,:)=polyfit(h_log,e_J_log(m,:),1);
end
legend('eps=h','eps=h^2','eps=h^3','eps=h^4', ...
        'eps=h^5','Location','NorthWest')

```

```

max_rate=max(p_J(:,1));
add_Slope(gca,'SouthEast',max_rate);
title('Konvergenzrate in Abhängigkeit von h');
xlabel('h [log]'); ylabel('Fehler [log]');

idx=find(p_J(:,1)==max_rate);
fprintf('Die Konvergenzrate ist am grössten für eps=h^%1.0f,\n',idx);
fprintf('und ist gleich 0(h^%1.2f).\n',max_rate);

%Plot für Konvergenzrate in nDofs
fig=figure('Name','Konvergenzraten für die asymptotische Methode');
loglog(nDofs,e_J(1,:),'-x',nDofs,e_J(2,:),'-x',nDofs,e_J(3,:),'-x', ...
        nDofs,e_J(4,:),'-x',nDofs,e_J(5,:),'-x',nDofs,e_J(6,:),'-x')
grid('on');
nDofs_log=log(nDofs);
for m=1:size(e_J,1)
    p_J(m,:)=polyfit(nDofs_log,e_J_log(m,:),1);
end
legend('eps=h','eps=h^2','eps=h^3','eps=h^4', ...
        'eps=h^5','eps=h^6','Location','NorthWest')
max_rate=min(p_J(:,1));
add_Slope(gca,'SouthEast',max_rate);
title('Konvergenzrate in Abhängigkeit von #Gitterpunkte');
xlabel('#Gitterpunkte [log]'); ylabel('Fehler [log]');

```

Implementierungen zur Sattelpunktsformulierung:

Um u_ε bei der Sattelpunktsformulierung zu berechnen habe ich diese Funktion geschrieben.

```

function U_eps=sattelpunkt_LFE(Mesh,F_HANDLE,G_HANDLE,epsilon)
%Löst das variationelle Sattelpunktproblem auf dem Gitter Mesh für die
%Funktionen F_HANDLE und G_HANDLE und dem Parameter epsilon
%
%Bsp: U_eps=sattelpunkt_LFE(Mesh,F_HANDLE,GD_HANDLE,epsilon)

%Konstanten initialisieren
nCoord=size(Mesh.Coordinates,1);

%System-Matrizen und Lastvektoren aufstellen
A = assemMat_LFE(Mesh,@STIMA_Lapl_LFE);
L = assemLoad_LFE(Mesh,P706(),F_HANDLE);
G=zeros(nCoord,1);
[B,G] = assemRob_LFE(Mesh,-1,G,gauleg(0,1,4),G_HANDLE,1,1);

[I1,J1,A]=find(A);
[I3,J3,D]=find(-epsilon*B);
[I2,J2,B]=find(B);

T=sparse([I1;J2;I2+nCoord;I3+nCoord],[J1;I2+nCoord;J2;J3+nCoord], ...
        [A;B;B;D],2*nCoord,2*nCoord);

%Gleichungssystem Lösen
V=T\[L;G];

U_eps=V(1:nCoord);

return

```

Literatur

- [Bra92] BRAESS, Dietrich: *Finite Elemente*. Springer, Berlin, 1992
- [BS02] BRENNER, Susanne C. ; SCOTT, L. R.: *The Mathematical Theory of FEM*. Springer, New York, 2002
- [CD96] COSTABEL, Martin ; DAUGE, Monique: A singularly perturbed mixed boundary value problem. In: *Comm. Partial Differential Equations* 21 (1996), Nr. 11-12, S. 1919–1949. – ISSN 0360–5302
- [DH02] DEUFLHARD, Peter ; HOHMANN, Andreas: *Eine algorithmisch orientierte Einführung*. de Gruyter, Berlin, 2002
- [LM70] LIONS, Jacques-Louis ; MAGENES, Enrico: *Problèmes aux limites non homogènes et applications*. Dunod, Paris, 1868-1970
- [Nec67] NECAS, Jindrich: *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*. Masson, Paris, 1967
- [Raf75] RAFFY, Marcel: *Sur l'approximation du flux d'énergie rayonne a travers une enceinte.*, Universite Louis Pasteur - Strasbourg, Département de mathématique, Diss., 1975