

MATHEMATISCHES PROSEMINAR - ROTATIONSSYMMETRISCHES WIRBELSTROMPROBLEM

Daniel Leumann

29. Oktober 2003

Inhaltsverzeichnis

1	Zusammenfassung	3
2	Methoden	4
2.1	Schwache Lösung	4
2.2	Das Galerkin-Verfahren	4
2.3	Finite Elemente Methode	5
3	Aufstellen der Gleichungen	6
3.1	Anfangsbedingungen bzw. Randbedingungen	6
3.2	Maxwellsche Gleichungen	6
4	Berechnung	10
4.1	Berechnung der Steifigkeitsmatrix	10
4.1.1	Berechnung der Diagonalelemente	10
4.1.2	Berechnung des rechten Elementes	12
4.1.3	Berechnung des rechten oberen Elementes	13
4.1.4	Berechnung des oberen Elementes	13
4.1.5	Berechnung des linken oberen Elementes	14
4.2	Assemblierung der Matrix	14
4.3	Der Vektor $l = j$	15
5	Tests	17
5.1	Exakte Lösung mit vorgegebenen E-Feld	17

5.2	Berechnungen für verschiedene Parameter	19
5.2.1	$\omega = 1$	19
5.2.2	Für $f = 50Hz$ bzw. $\omega = 314.16\frac{1}{s}$	20
5.2.3	Für $f = 1000Hz$ bzw. $\omega = 6283.2\frac{1}{s}$	21

1 Zusammenfassung

Das Ziel dieser Aufgabe ist die Berechnung der phi-Komponente des elektrischen Feldes in einem Medium, dessen Geometrie vorgegeben wird. Der erste Teil der Aufgabe besteht darin, sich mit der Methode der Finiten Elemente vertraut zu machen. Dann soll mit Hilfe der Maxwell'schen Gleichungen das physikalische Problem beschrieben werden, wobei die Randbedingungen (die vorgegeben sind) eine zentrale Rolle spielen. Die Gleichungen werden in der Schwachen Formulierung dargestellt. Zur Lösung dieses Problems wird das Galerkin-Verfahren verwendet, dessen praktische Realisierung auf die Finite Elemente Methode basiert. Die gesuchten Grössen werden (mit Matlab) numerisch ermittelt.

- **Resultate:** Die Werte für E_ϕ erschienen vorerst richtig. Doch zeigte sich der erwartete Skin-Effekt nicht. Die Implementierung weist Fehler bei Metallübergängen auf. Die Werte von $|E_\phi|$ sind dort deutlich zu hoch. Vor allem für tiefe Kreisfrequenzen.

2 Methoden

2.1 Schwache Lösung

Betrachtet werden polygonale Gebiete $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Das sind Gebiete deren Rand aus einer endlichen Vereinigung geradliniger Kanten besteht. Auf diesen Gebieten gilt die Greensche Formel

$$\int_{\Delta} v \Delta u \, dx = \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u \, ds - \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx \quad (1)$$

für $u \in C^2(\bar{\Omega})$ und $v \in C^1(\bar{\Omega})$ wobei $\partial_{\nu} u = \nu \operatorname{grad} u$ die Ableitung von u in Richtung der Äusseren Normalen ν am Rand des Gebietes und $\int_{\Gamma} \dots$ das entsprechende Randintegral.

Eine wichtige Verallgemeinerung der Greenschen Formel ist das folgende Integral für hinreichend oft differenzierbare σ, u, v

$$\int_{\Omega} v \operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) \, dx = \int_{\Gamma} v \partial_{\nu} u \, ds - \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} v \operatorname{grad} u \, dx \quad (2)$$

Bisher war gefordert, dass u zweimal stetig differenzierbar ist. Aufgrund der Gültigkeit der Cauchy-Schwarz-Ungleichungen und bei Voraussetzung der Dirichlet Randbedingungen lässt sich als Beispiel folgendes Randwertproblem "schwach" formulieren:

Es seien σ und c beschränkte Funktionen mit $0 \leq c(x) \leq c_{\infty}$ und $0 < \sigma_0 \leq \sigma(x) \leq \sigma_{\infty}$. Dann hat das Randwertproblem $L[u] = -\operatorname{div}(\sigma \operatorname{grad} u) + cu = f$ mit $u_{\Gamma} = 0$ die Lösung.

$$\int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (3)$$

2.2 Das Galerkin-Verfahren

Um die Schreibweise zu vereinfachen, schreibt man:

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \sigma \operatorname{grad} u \operatorname{grad} v \, dx + \int_{\Omega} cuv \, dx \quad (4)$$

und

$$l(v) = \int_{\Omega} f v \, dx \quad (5)$$

Mit diesen Definitionen lässt sich die schwache Lösung als Variationsproblem formulieren.

$$a(u, v) = l(v) \quad (6)$$

Das Galerkin-Verfahren besteht darin, dass ein Teilgebietes als Ansatz- und Testgebiet gewählt wird und eine Funktion u_h aus dem Teilgebiet mit

$$a(u_h, v) = l(v) \quad (7)$$

Ist ϕ_1, \dots, ϕ_2 eine Basis des Teilgebietes, dann führt der Lösungsansatz

$$u_h = \sum_{i=1}^n u_i \phi_i \quad (8)$$

auf das Gleichungssystem

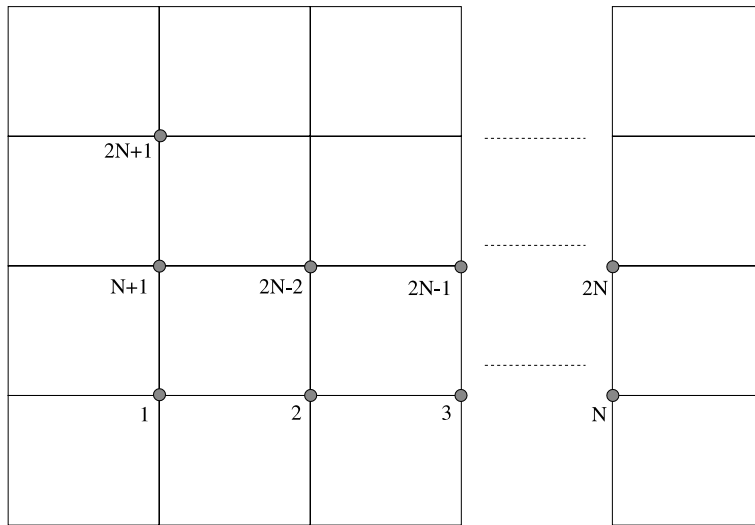
$$Au_h = b \quad (9)$$

mit

$$A = [a(\phi_i, \phi_j)]_{ij} \in \mathbb{R}^{n \times n} \quad b = [b(l(\phi_j))]_j \in \mathbb{R}^n \quad (10)$$

2.3 Finite Elemente Methode

Das zu untersuchende Gebiet wird in Quadrate aufgeteilt, wobei die jeweiligen Punkte lexikographisch nummeriert sind. Die Basisfunktionen sind:



$$\beta_1 = \left(1 - \frac{r}{h_r}\right) \left(1 - \frac{z}{hz}\right) \quad \beta_2 = \left(\frac{r}{h_r}\right) \left(1 - \frac{z}{hz}\right) \quad (11)$$

$$\beta_3 = \left(\frac{r}{h_r}\right) \left(\frac{z}{hz}\right) \quad \beta_4 = \left(1 - \frac{r}{h_r}\right) \left(\frac{z}{hz}\right) \quad (12)$$

3 Aufstellen der Gleichungen

3.1 Anfangsbedingungen bzw. Randbedingungen

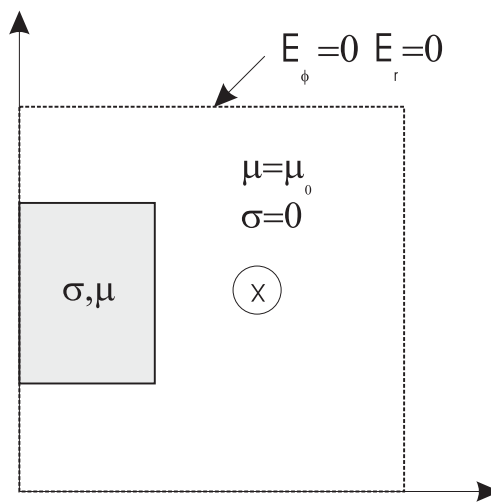
Eine der zentralen Randbedingungen ist das rotationssymmetrische Wirbelfeld $\partial_\phi = 0$. Weiter sind die Permeabilität und der spezifische Leitwert lokal konstante Größen:

$$\mu = \mu(r, z) = \mu_{1,2} \quad (13)$$

$$\sigma = \sigma(r, z) = \sigma_{1,2} \quad (14)$$

$$(15)$$

Wobei $\sigma_2 = 0$ für Werte ausserhalb des Metalles. Am Rand des betrachteten Gebietes werden die Felder als null angenommen.



3.2 Maxwell'sche Gleichungen

Um die elektrischen, wie magnetischen Felder in einem Medium zu berechnen, geht man von den Maxwellgleichungen aus, wobei hier schon eine erste Randbedingung eine wichtige Rolle spielt: $D = 0$. Dadurch vereinfachen sich die Maxwellgleichungen zu

$$rot E = -i\omega\mu H \quad (16)$$

$$rot H = \sigma E + j \quad (17)$$

Die Rotation $rot V$ für einen beliebigen Vektor in Zylinderkoordinaten ist

$$rot_r V = \frac{1}{r} \partial_\phi V_z - \partial_z V_\phi \quad (18)$$

$$rot_\phi V = \partial_z V_r - \partial_r V_z \quad (19)$$

$$rot_z V = \frac{1}{r} \{ \partial_r (r V_\phi) - \partial_\phi V_r \} \quad (20)$$

$$(21)$$

Benutzt man nun die Randbedingung $\partial_\phi = 0$, so folgt, dass

$$rot_r V = -\partial_z V_\phi \quad (22)$$

$$rot_\phi V = \partial_z V_r - \partial_r V_z \quad (23)$$

$$rot_z V = \frac{1}{r} \{\partial_r(rV_\phi)\} \quad (24)$$

$$(25)$$

für die Gleichung (16) heisst das

$$rot_r E = -\partial_z E_\phi = -i\omega\mu H_r \quad (26)$$

$$rot_\phi E = \partial_z E_r - \partial_r E_z = -i\omega\mu H_\phi \quad (27)$$

$$rot_z E = \frac{1}{r} \{\partial_r(rE_\phi)\} = -i\omega\mu H_z \quad (28)$$

$$(29)$$

und weiter für Gleichung (17)

$$rot_r H = -\partial_z H_\phi = \sigma E_r + j_r \quad (30)$$

$$rot_\phi H = \partial_z H_r - \partial_r H_z = \sigma E_\phi + j_\phi \quad (31)$$

$$rot_z H = \frac{1}{r} \{\partial_r(rH_\phi)\} = \sigma E_z + j_z \quad (32)$$

um nun die die ϕ -Komponente des E-Feldes zu bestimmen, muss man H_r, H_z eliminieren. Setzt man also aus den Gleichungen (26), (28) H_r, H_z in die Gleichung (31) ein, so folgt:

$$i\omega(\sigma E_\phi + j_\phi) = \partial_z \left\{ \frac{1}{\mu} \partial_z E_\phi \right\} + \partial_r \left\{ \frac{1}{r\mu} \partial_r(rE_\phi) \right\} \quad (33)$$

Gesucht ist nun die schwache Formulierung des Problems: Für $u \in C^2(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega})$ und das beschränkte polygonale Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$

$$\int_{\Omega} v \Delta u \cdot dx = \int_{\Lambda} v \nu \cdot grad u \cdot ds - \int_{\Omega} grad v \cdot grad u \cdot dx \quad (34)$$

Die verallgemeinerte Greensche Formel

$$\int_{\Omega} v div(\sigma grad u) \cdot dx = \int_{\Lambda} v \sigma \partial_\nu u \cdot ds - \int_{\Omega} \sigma v \cdot grad u \cdot dx \quad (35)$$

ermöglicht, die Beschreibung des Problems durch die schwache Formulierung. Die nächste Punkt, ist also die Gleichung für E_ϕ (33) so auszudrücken, dass die verallgemeinerte Greensche Formel benutzt werden kann. Dazu muss man die Operatoren ($div, grad$) in Zylinderkoordinaten ausdrücken. Wobei hier die Randbedingung $\partial_\phi = 0$ schon eingesetzt wurde

$$div V = \frac{1}{r} \partial_r(rV_r) + \partial_z V_z \quad (36)$$

$$grad u = e_r \partial_r u + e_z \partial_z u \quad (37)$$

Weiter benötigt man für die Integration die Funktionaldeterminante. Für Zylinderkoordinaten:

$$x = r \cos \phi \quad (38)$$

$$y = r \sin \phi \quad (39)$$

$$z = z \quad (40)$$

Die Funktionaldeterminante ist dann

$$\begin{vmatrix} \partial_r x & \partial_\phi x & \partial_z x \\ \partial_r y & \partial_\phi y & \partial_z y \\ \partial_r z & \partial_\phi z & \partial_z z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos(\phi) & -r \sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & r \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r \quad (41)$$

Allgemein gilt für die partielle Integration in Zylinderkoordinaten

$$\int_{\Omega} v \cdot \operatorname{div} \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla v dx = \int_{\partial\Omega} \underline{u} \underline{n} \cdot v dS \quad (42)$$

mit den Gleichungen (36), (37) und mit $v|_{\partial\Omega} = 0$ folgt

$$\int_{\Omega} v \left(\frac{1}{r} \partial_r (r u_r) + \partial_z u_z \right) r dr dz = - \int_{\Omega} (u_r \partial_r v + u_z \partial_z v) r dr dz \quad (43)$$

Nun muss das Resultat (33) auf die Form (43) gebracht werden

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v \left(\partial_z \left\{ \frac{1}{\mu} \partial_z E \phi \right\} + \partial_r \left\{ \frac{1}{r \mu} \partial_r (r E_\phi) \right\} \right) r dr dz = \\ & = \int_{\Omega} v \partial_z \left\{ \frac{1}{\mu} \partial_z E \phi \right\} r dr dz + \int_{\Omega} v \partial_r \left\{ \frac{1}{r \mu} \partial_r (r E_\phi) \right\} r dr dz \end{aligned} \quad (44)$$

umgeformt ergibt das

$$\int_{\Omega} v \partial_z \left\{ \frac{1}{\mu} \partial_z E \phi \right\} r dr dz + \int_{\Omega} (r v) \frac{1}{r} \partial_r \left\{ \frac{1}{r \mu} \partial_r (r E_\phi) \right\} r dr dz = \quad (45)$$

mit Gleichung (43) folgt

$$- \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \partial_z (E_\phi) \partial_z (v) r dr dz - \int_{\Omega} \frac{1}{r^2 \mu} \partial_r (r E_\phi) \partial_r (r v) r dr dz = \quad (46)$$

daraus folgt:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} v \left(\partial_z \left\{ \frac{1}{\mu} \partial_z E \phi \right\} + \partial_r \left\{ \frac{1}{r \mu} \partial_r (r E_\phi) \right\} \right) r dr dz = \\ & = - \int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\partial_z (E_\phi) \partial_z (v) + \frac{1}{r^2} \partial_r (r E_\phi) \partial_r (r v) \right) r dr dz \end{aligned} \quad (47)$$

und mit Gleichung (33)

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(E_\phi) \partial_z(v) + \frac{1}{r^2} \partial_r(rE_\phi) \partial_r(rv) \right) r \, dr dz = -i\omega \int_{\Omega} v(\sigma E_\phi + j_\phi) r \, dr dz \quad (48)$$

und daraus

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(E_\phi) \partial_z(v) + \frac{1}{r^2} \partial_r(rE_\phi) \partial_r(rv) \right) + i\omega v \sigma E_\phi \right\} r \, dr dz = -i\omega \int_{\Omega} v j_\phi r \, dr dz \quad (49)$$

4 Berechnung

4.1 Berechnung der Steifigkeitsmatrix

Definiert man nun den linken Teil der Gleichung mit

$$a(u, v) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(u) \partial_z(v) + \frac{1}{r^2} \partial_r(ru) \partial_r(rv) \right) + i\omega \sigma uv \right\} r \, dr dz \quad (50)$$

und den rechten Teil mit

$$l(v) = -i\omega \int_{\Omega} v j_{\phi} r \, dr dz \quad (51)$$

so lässt sich das Problem folgendermassen schreiben

$$a(u, v) = l(v) \quad (52)$$

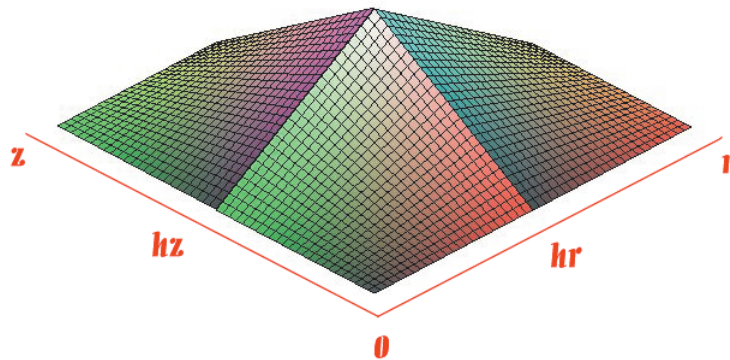
bzw. für dieses Problem

$$a(E_{\phi}, v) = l(v) \quad (53)$$

Die Steifigkeitsmatrix wird folgendermassen berechnet

$$A = [a(\beta_i, \beta_j)]_{ij} \quad (54)$$

wobei es sich bei β_i um die Basisfunktionen handelt, die so angeordnet sind, so dass für einzelne Punkte folgendes Bild entsteht:



Graphisch dargestellt:

4.1.1 Berechnung der Diagonalelemente

Um die ersten N Elemente der Steifigkeitsmatrix zu berechnen, muss man die Basisfunktionen in die Gleichung (49) einsetzen

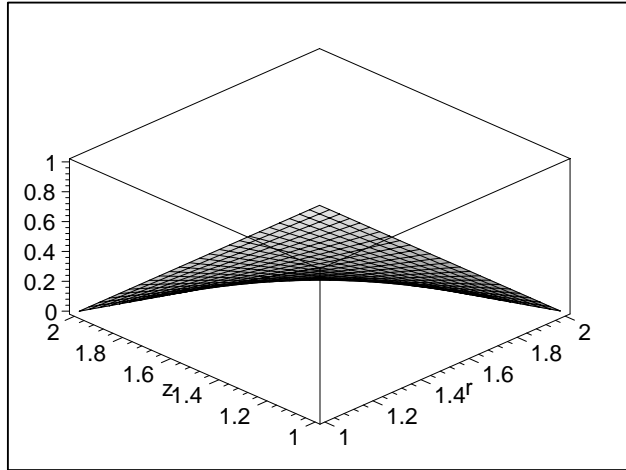


Abbildung 1: Basisfunktion β_1

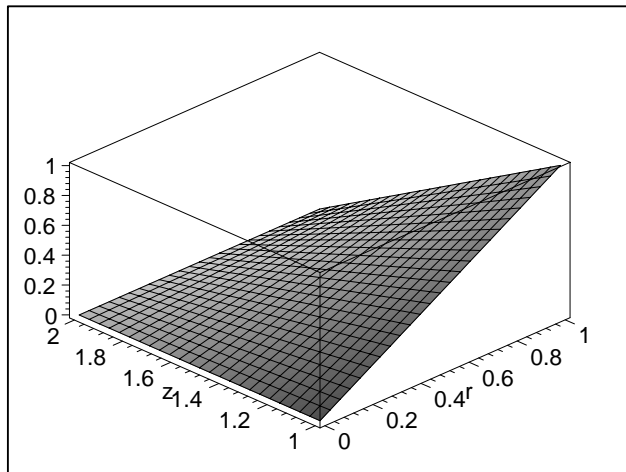


Abbildung 2: Basisfunktion β_2

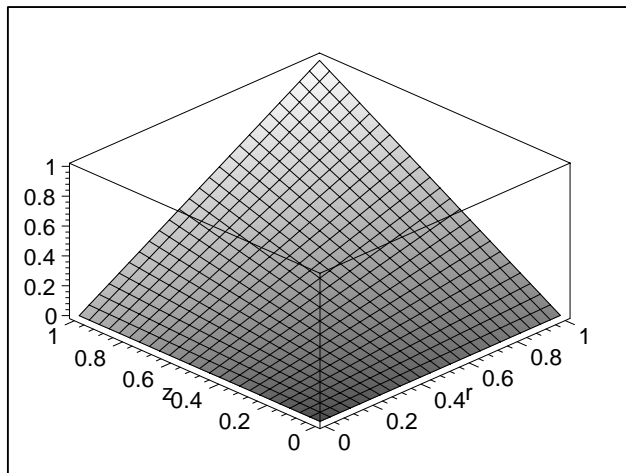


Abbildung 3: Basisfunktion β_3

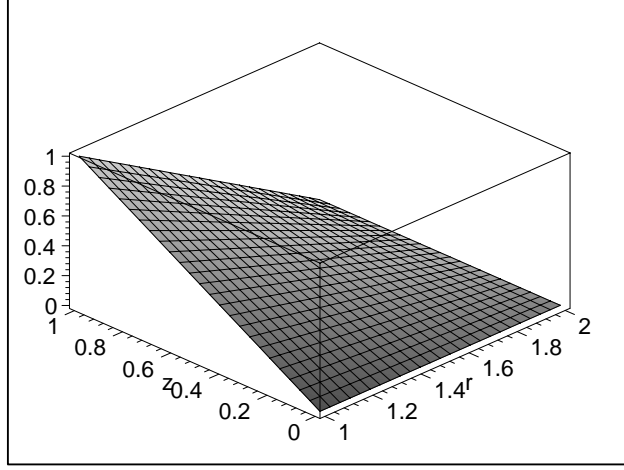


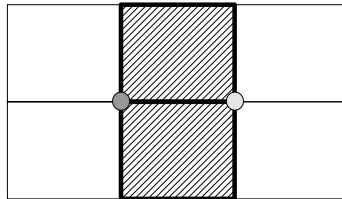
Abbildung 4: Basisfunktion β_4

$$\begin{aligned}
A_{ii} = & \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{(i-1)h}^{ih} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_3) \partial_z(\beta'_3) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_3) \partial_r(r\beta'_3) \right) + i\omega\sigma\beta'_3\beta'_3 \right\} r \, dr dz + \\
& \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{ih}^{(i+1)h} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_4) \partial_z(\beta'_4) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_4) \partial_r(r\beta'_4) \right) + i\omega\sigma\beta'_4\beta'_4 \right\} r \, dr dz + \\
& \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{(i-1)h}^{ih} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_2) \partial_z(\beta'_2) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_2) \partial_r(r\beta'_2) \right) + i\omega\sigma\beta'_2\beta'_2 \right\} r \, dr dz + \\
& \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_1) \partial_z(\beta'_1) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_1) \partial_r(r\beta'_1) \right) + i\omega\sigma\beta'_1\beta'_1 \right\} r \, dr dz
\end{aligned} \tag{55}$$

Wobei für Elemente bei $r = 0$ gilt

$$\begin{aligned}
A_{1j} &= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(E_\phi) \partial_z(v) + \frac{1}{r^2} \partial_r(rE_\phi) \partial_r(rv) \right) + i\omega\sigma E_\phi v \right\} r \, dr dz = \\
&= \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(r(\partial_r E_\phi)(\partial_r v) + E_\phi \partial_r v + v \partial_r E_\phi + \frac{E_\phi v}{r} \right) + i\omega\sigma E_\phi v r \right\} dr dz
\end{aligned} \tag{56}$$

4.1.2 Berechnung des rechten Elementes



Dementsprechend ist aufzuintegrieren und die entsprechenden Basisfunktionen einzusetzen. Die Werte sind auszuwerten bei

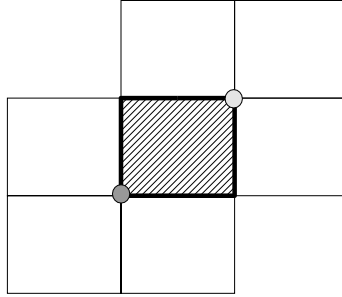
$$i = 1 \dots N - 1 \quad (57)$$

$$j = 1 \dots N \quad (58)$$

Die Werte sind

$$A_{ij} = \int_{(j-1)h}^{jh} \int_{ih}^{(i+1)h} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_3) \partial_z(\beta'_4) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_3) \partial_r(r\beta'_4) \right) + i\omega\sigma\beta'_3\beta'_4 \right\} r dr dz + \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_2) \partial_z(\beta'_1) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_2) \partial_r(r\beta'_1) \right) + i\omega\sigma\beta'_2\beta'_1 \right\} r dr dz \quad (59)$$

4.1.3 Berechnung des rechten oberen Elementes



$$i = 1 \dots N - 1 \quad (60)$$

$$j = 1 \dots N - 1 \quad (61)$$

$$A_{ij} = \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_3) \partial_z(\beta'_1) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_3) \partial_r(r\beta'_1) \right) + i\omega\sigma\beta'_3\beta'_1 \right\} r dr dz \quad (62)$$

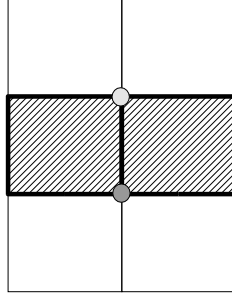
4.1.4 Berechnung des oberen Elementes

$$i = 1 \dots N \quad (63)$$

$$j = 1 \dots N - 1 \quad (64)$$

Die Werte sind

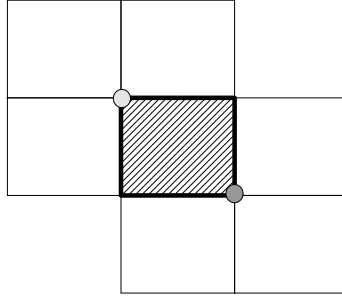
$$A_{ij} = \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{(i-1)h}^{ih} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_3) \partial_z(\beta'_2) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_3) \partial_r(r\beta'_2) \right) + i\omega\sigma\beta'_3\beta'_2 \right\} r dr dz + \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{ih}^{(i+1)h} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_4) \partial_z(\beta'_1) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_4) \partial_r(r\beta'_1) \right) + i\omega\sigma\beta'_4\beta'_1 \right\} r dr dz \quad (65)$$



Wobei wiederum für Elemente bei $r = 0$ gilt

$$A_{1j} = \int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(r(\partial_r E_{\phi})(\partial_r v) + E_{\phi} \partial_r v + v \partial_r E_{\phi} + \frac{E_{\phi} v}{r} \right) + i\omega \sigma E_{\phi} v r \right\} dr dz \quad (66)$$

4.1.5 Berechnung des linken oberen Elementes



$$i = 2 \dots N \quad (67)$$

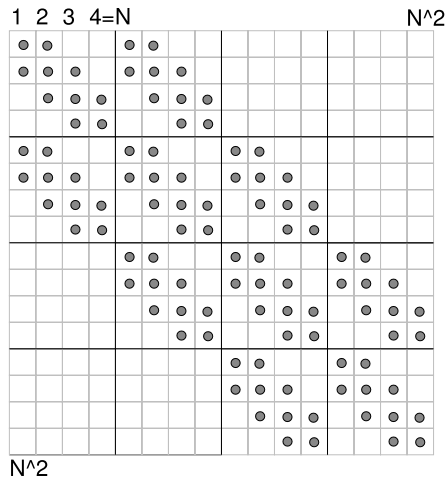
$$j = 1 \dots N - 1 \quad (68)$$

Die Werte sind

$$A_{ij} = \int_{jh}^{(j+1)h} \int_{(i-1)h}^{ih} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(\beta'_4) \partial_z(\beta'_2) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r\beta'_4) \partial_r(r\beta'_2) \right) + i\omega \sigma \beta'_4 \beta'_2 \right\} r dr dz \quad (69)$$

4.2 Assemblierung der Matrix

Die entsprechenden Werte werden jetzt in die Matrix eingetragen. Wobei die Matrix symmetrisch ist!

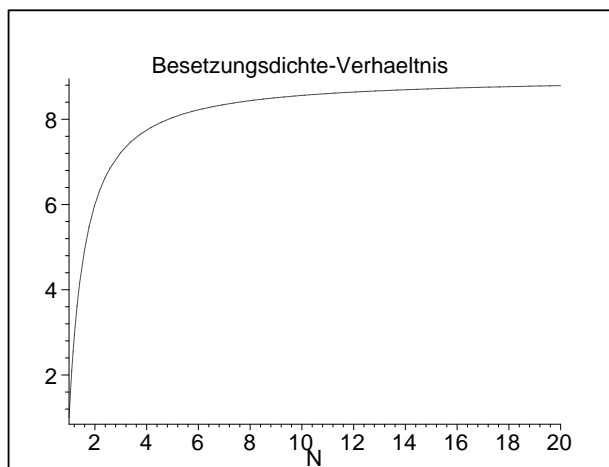


Die Matrix hat

$$9N^2 - 4N - 4 \quad (70)$$

Elemente. Es lohnt sich also die "sparse-Matrizen" Funktionen von Matlab zu benutzen, da schon für kleine Matrizen das Verhältnis fast dem des Limes $N \rightarrow \infty$ entspricht. Das Besetzungsdichteverhältnis in Funktion von N ist

$$\frac{9N^2 - 4N - 4}{N^2} \quad (71)$$



Am effizientesten ist es, die einzelnen Vektoren zu bestimmen und diese dann zu einer Matrix zusammenzusetzen.

4.3 Der Vektor $l = j$

Die Rechte Seite der Gleichung (49):

$$\int_{\Omega} \left\{ \frac{1}{\mu} \left(\partial_z(E_\phi) \partial_z(v) + \frac{1}{r^2} \partial_r(r E_\phi) \partial_r(rv) \right) + i\omega v \sigma E_\phi \right\} r \, dr dz = -i\omega \int_{\Omega} v j_\phi r \, dr dz$$

lässt sich durch numerische Quadratur bestimmen

$$\int_{\Omega} j_{\phi} vr \, dr dz = \sum_Q \int_Q j_{\phi} vr \, dr dz \quad (72)$$

Und es gilt:

$$\int_Q f \, dr dz = \frac{1}{4} |Q| \sum_{i=1}^4 f(a_i) \quad (73)$$

wobei a_i die Eckpunkte des jeweiligen Quadrates Q ist und $|Q|$ die Fläche des jeweiligen Quadrates. Setzt man nun für $f = j_{\phi} vr$, so folgt:

$$\int_Q j_{\phi} vr \, dr dz = \frac{1}{4} |Q| \sum_{i=1}^4 j_{\phi}(a_i) vr \quad (74)$$

und daraus:

$$\int_{\Omega} j_{\phi} vr \, dr dz = \sum_Q \frac{1}{4} |Q| \sum_{i=1}^4 j_{\phi}(a_i) vr \quad (75)$$

Die Summe über alle Quadrate muss nicht berechnet werden, da die Basisfunktionen außerhalb des Quadrates null sind. Hinzu kommt noch, dass j_{ϕ} nur dann nicht null ist, wo der Leiter den Strom führt.

5 Tests

5.1 Exakte Lösung mit vorgegebenen E-Feld

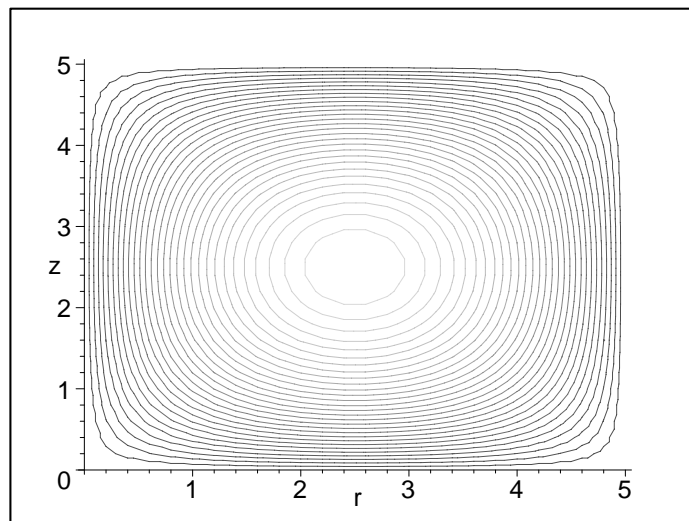
Der Code wird nun so überprüft, dass bei vorgegebenem E_ϕ der Strom mittels der exakten Lösung bestimmt wird. Wegen den partiellen Ableitungen muss μ konstant gewählt werden. Löst man die Gleichung (33) nach j_ϕ auf, so folgt

$$j_\phi = -\sigma E_\phi + \frac{1}{i\omega} \partial_z \left\{ \frac{1}{\mu} \partial_z E_\phi \right\} + \frac{1}{i\omega} \partial_r \left\{ \frac{1}{r\mu} \partial_r (r E_\phi) \right\} \quad (76)$$

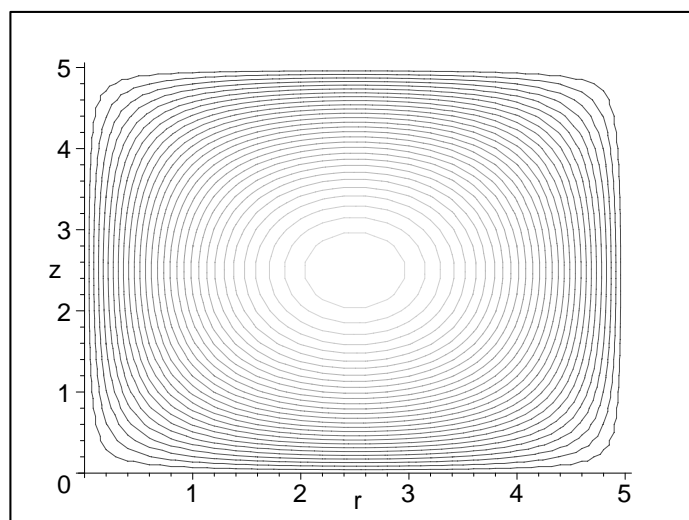
und wenn für E_ϕ folgendes setzt, mit $N = 50$ und $h = 0.5$

$$E_\phi = r(r - Nh)z(z - Nh) \quad E_\phi = r(r - 5)z(z - 5) \quad (77)$$

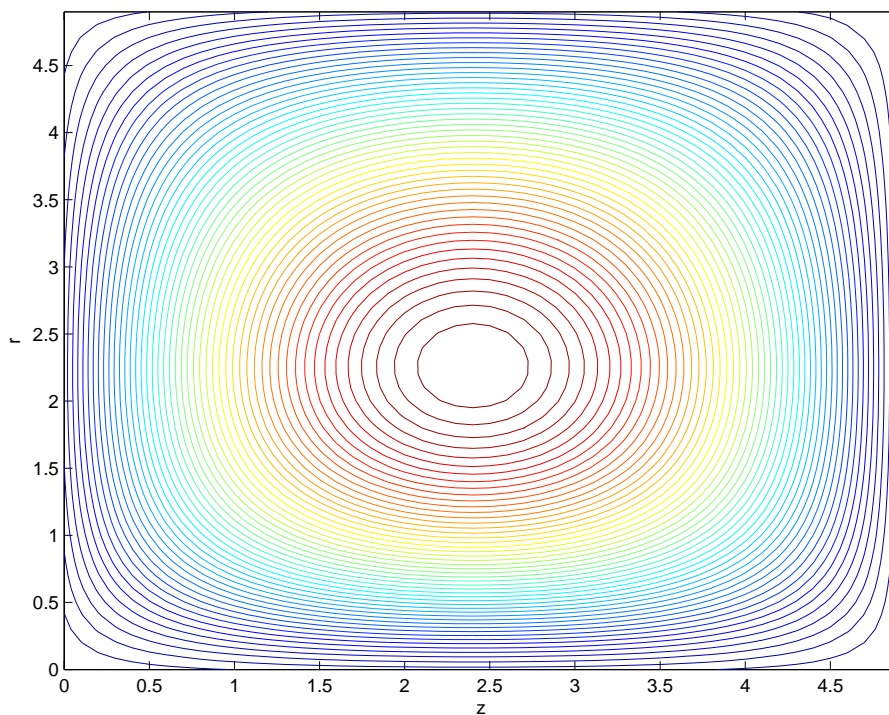
was folgendermassen aussieht: $|E_\phi|$



erhält man für $|j_\phi|$ mit Gleichung (76)



Benutzt man nun diesen Strom, um das Feld E_ϕ mit der Steifigkeitsmatrix zu berechnen erhält man:

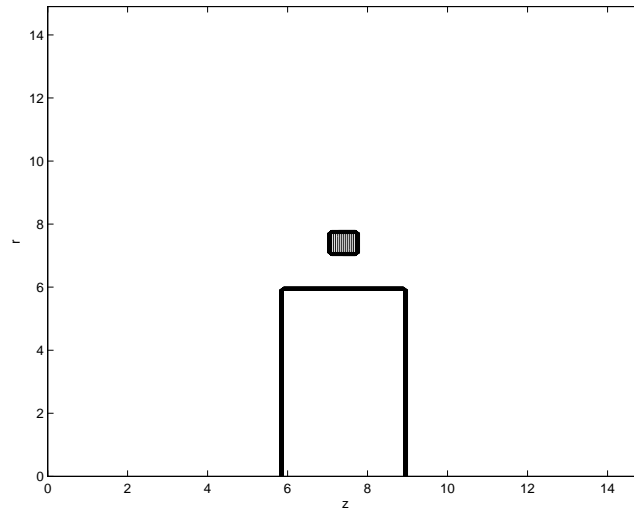


was der ursprünglichen analytischen Funktion (77) entspricht.

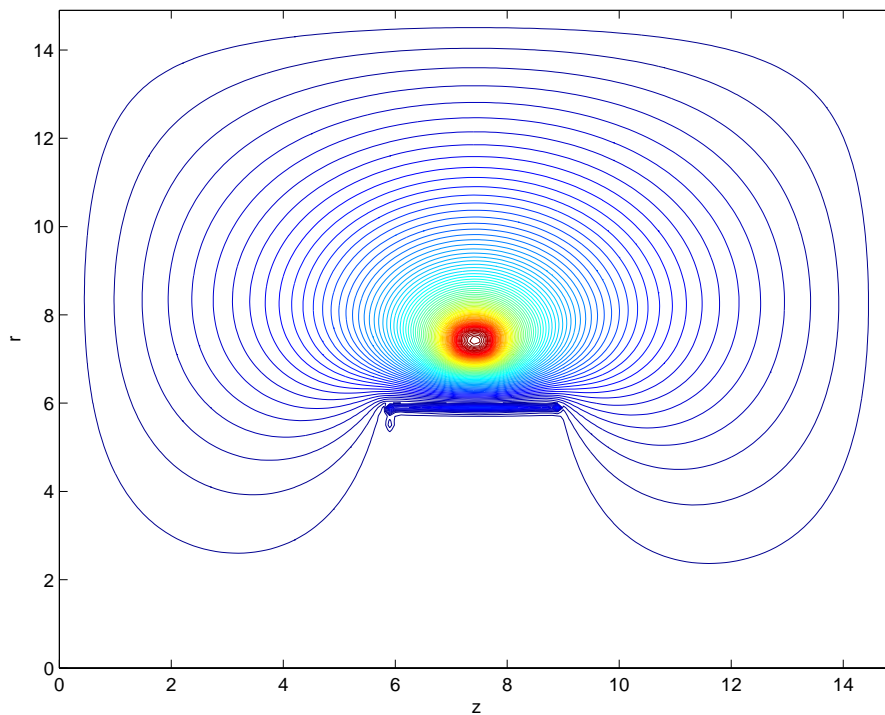
5.2 Berechnungen für verschiedene Parameter

5.2.1 $\omega = 1$

Für tiefe Frequenzen ω zeigen sich Probleme bei den Metallübergängen. Dieses Beispiel wurde mit folgenden Parametern bestimmt: $N = 150$, $h = 0.1$, $\omega = 1$, für Eisen ist: $\mu_1 = 4\pi 10^{-7} \cdot 100 \frac{Vs}{Am}$, $\mu_2 = 4\pi 10^{-7} \frac{Vs}{Am}$, $\sigma_1 = 1.02 \cdot 10^7 \frac{S}{m}$, $\sigma_2 = 0$. Und das Metall und der stromdurchflossene Leiter sind folgendermassen angeordnet. Das obere kleine Rechteck ist der stromdurchflossene Leiter. Das Rechteck unten ist das Metall.



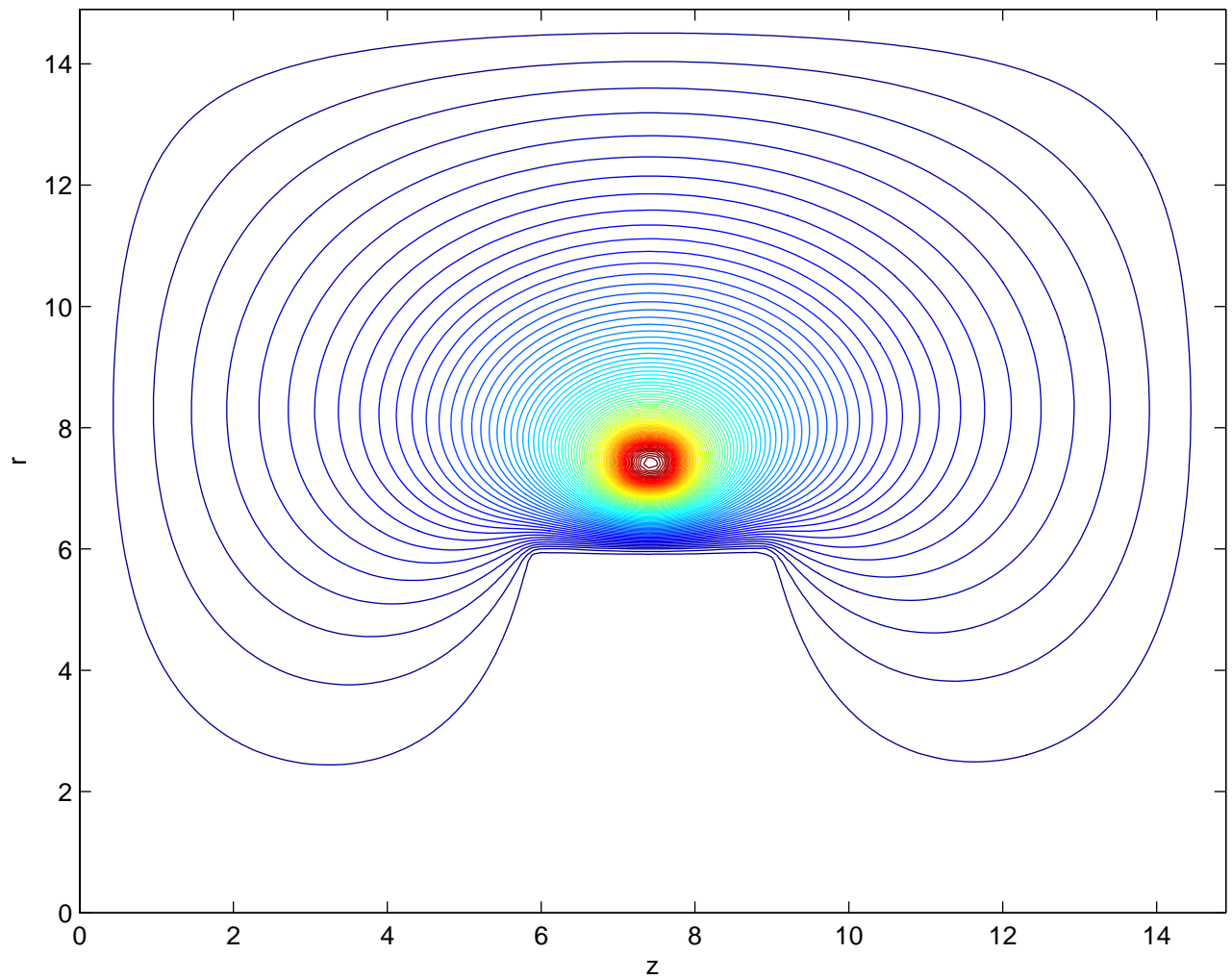
Die ϕ -Komponente des E -Feldes E_ϕ hat dann folgende Gestalt:



Die Erhöhung des Feldes in der Nähe des stromdurchflossenen Leiters sollte nicht da sein.

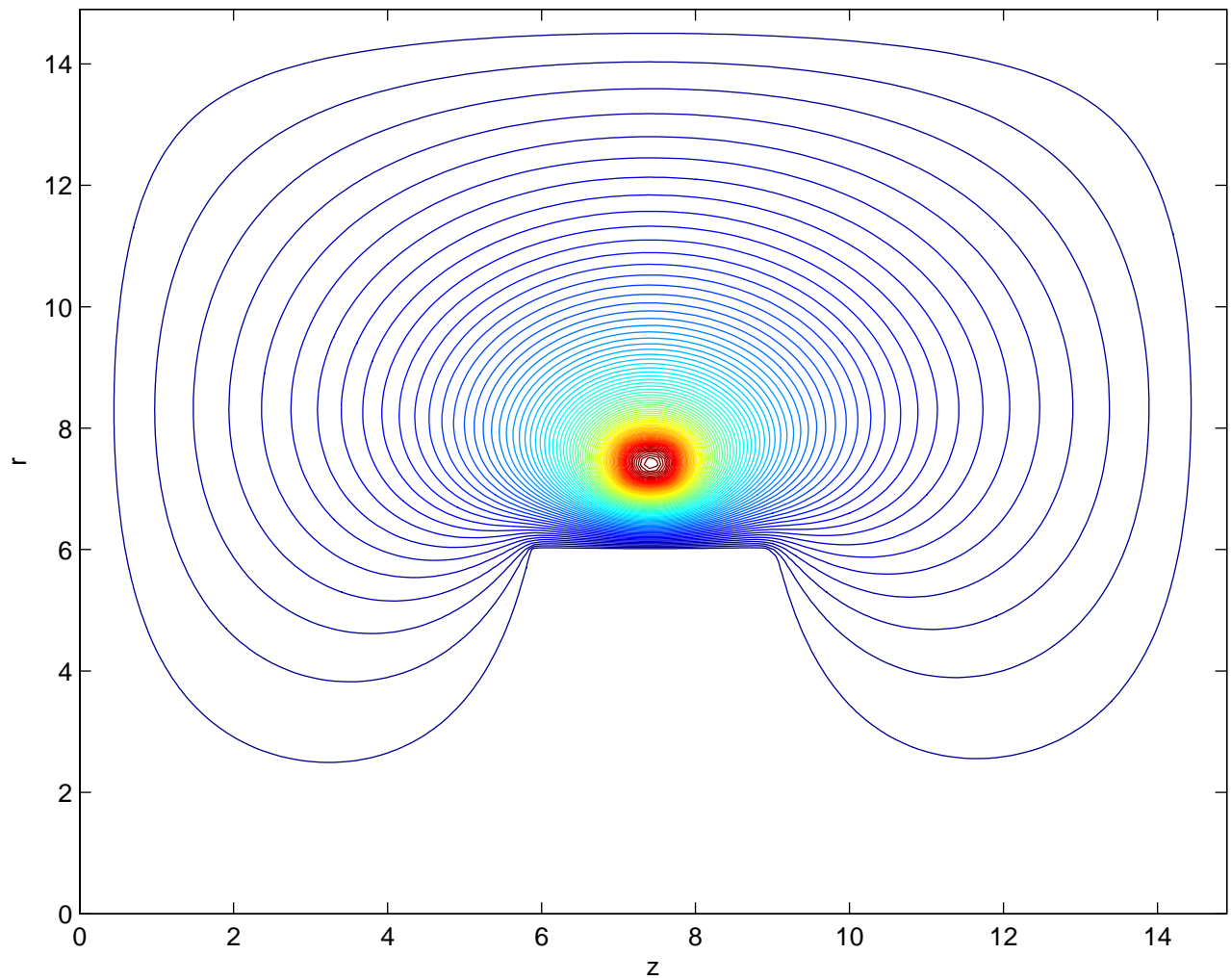
5.2.2 Für $f = 50\text{Hz}$ bzw. $\omega = 314.16\frac{1}{\text{s}}$

Mit den selben Parametern wie im oben erwähnten Beispiel und der selben Anordnung. Das ergibt für E_ϕ



5.2.3 Für $f = 1000\text{Hz}$ bzw. $\omega = 6283.2\frac{1}{\text{s}}$

Mit den selben Parametern wie im oben erwähnten Beispiel und der selben Anordnung. Das ergibt für E_ϕ



Hier sollte der Skin-Effekt zu beobachten sein. Was nicht der Fall ist.