

Transient Simulation of Eddy Currents in Ferromagnets

Semesterarbeit von Manuel
Guidon bei Herrn Prof. Dr. Ralf
Hiptmair

Inhaltsverzeichnis

- ▶ Einleitung
- ▶ Beschreibung des Problems
- ▶ Kantenelemente FE Methode
- ▶ Zeitdiskretisierung
- ▶ Resultate
- ▶ Zusammenfassung

Einleitung

- ▶ Ziel: Vorhandenes skalares Relaxationsverfahren auf ein vektorwertiges Problem erweitern
- ▶ Anwendung: Simulation des nichtlinearen Zusammenhangs zwischen magnetischer Induktion B und magnetischem Feld H in einem Ferromagneten

Beschreibung des Problems

- ▶ Für die elektromagnetischen Felder in einem Ferromagneten gelten die folgenden Wirbelstromgleichungen:

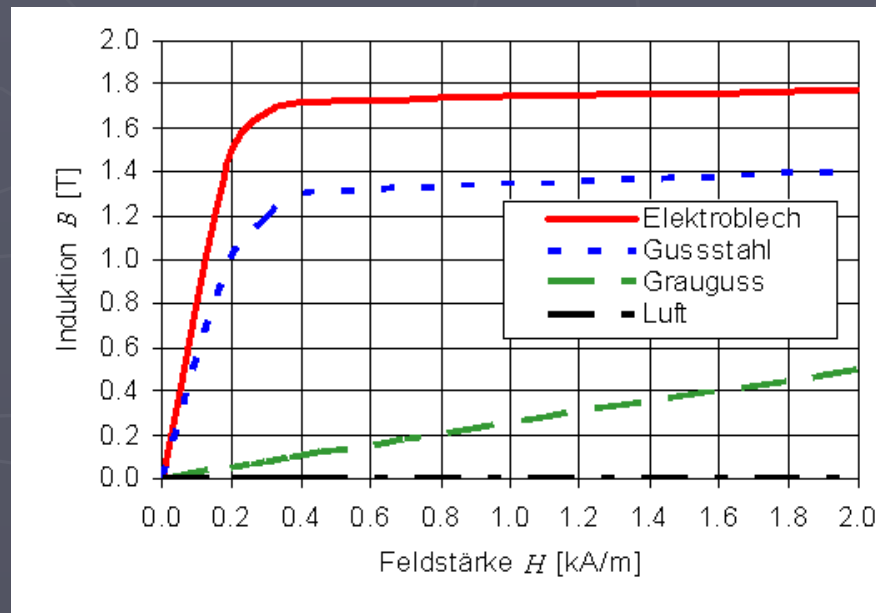
$$\sigma \vec{E} - \operatorname{rot} \vec{H} = -\vec{j}_0, \quad \operatorname{div} \vec{B} = 0$$

- ▶ Mittels Vektor und Skalarpotential in Coulomb-Eichung wird daraus:

$$\operatorname{rot} \vec{A} = \vec{B}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = -\sigma \frac{d}{dt} \vec{A} + \vec{j}_0$$

Beschreibung des Problems

- ▶ Leicht ferromagnetische Materialien zeigen experimentell folgendes Verhalten



Beschreibung des Problems

- ▶ Einsetzen dieses Zusammenhangs $H=H(B)$ und ausführen einer Rotation auf beiden Seiten liefert:

$$\operatorname{rot} \sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{H}) + \operatorname{rot}(\sigma^{-1} \vec{j}_0)$$

- ▶ Das Rechengebiet Ω sei zweidimensional und die Randbedingung:

$$\vec{H} \times \vec{n} = 0 \quad \text{auf } \partial\Omega$$

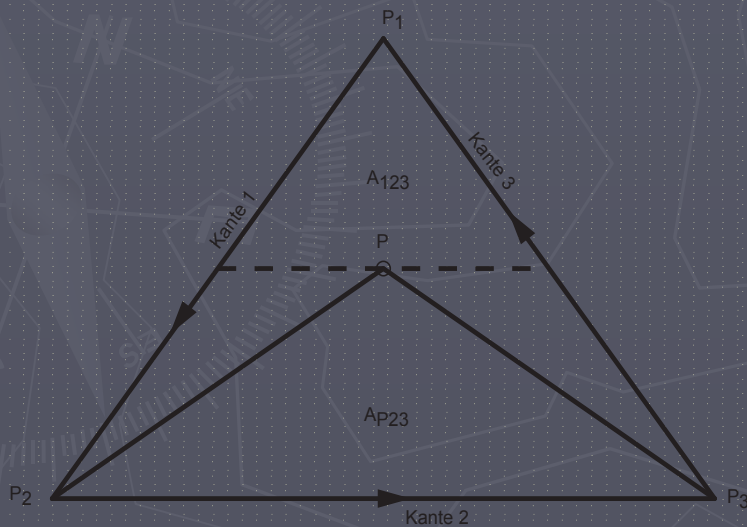
Die Kantenelemente FE Methode

Knotenelemente vs. Kantenelemente:

- ▶ Skalar vs. Vektor
- ▶ Vektoren besitzen math. und phys. Eigenschaften, welche sich nicht so leicht in Komponenten zerlegen lassen
- ▶ z.B. Randbedingungen für tangentiale Feldkomponente

Die lokalen Koordinaten

- ▶ Die zu modellierende Platte wird mit Dreiecken diskretisiert → Ansatzfunktionen in baryzentrischen Koordinaten



$$\xi_1 = \frac{A_{p23}}{A_{123}}$$

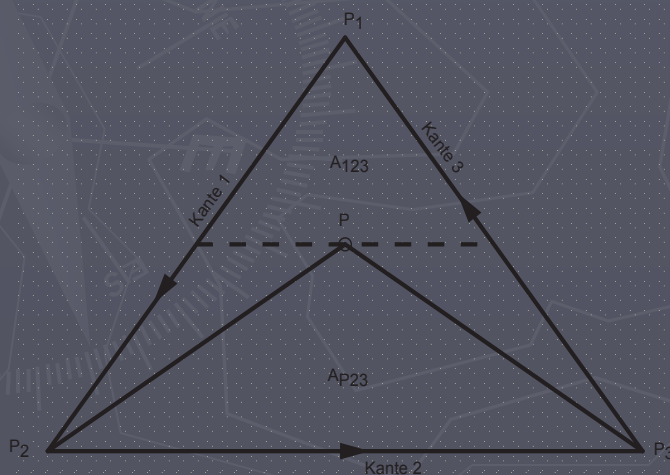
$$\xi_2 = \frac{A_{1p3}}{A_{123}}$$

$$\xi_3 = \frac{A_{12p}}{A_{123}}$$

$$\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = 1$$

Die Ansatzfunktionen im Dreieck

- ▶ Ein Koeffizient pro Kante im Dreieck, der den Betrag der tangentialen Feldkomponente beschreibt
- ▶ Damit Richtung festgelegt → Feste Orientierung für jede Kante
- ▶ Vorzeichen des Koeffizienten → Richtung auf jeder Kante eindeutig



$$Kante\ 1 = \vec{P}_1 \vec{P}_2$$

$$Kante\ 2 = \vec{P}_2 \vec{P}_3$$

$$Kante\ 3 = \vec{P}_3 \vec{P}_1$$

Die Ansatzfunktionen im Dreieck

- ▶ Approximation des Feldes im Dreieck mit drei tangential unabhängigen Vektorbasisfunktionen
- ▶ Ansatz von Whitney \rightarrow „Whitney Elemente der Ordnung 1“

$$\vec{N}_1 = \xi_1 \vec{\nabla} \xi_2 - \xi_2 \vec{\nabla} \xi_1$$

$$\vec{N}_2 = \xi_2 \vec{\nabla} \xi_3 - \xi_3 \vec{\nabla} \xi_2$$

$$\vec{N}_3 = \xi_3 \vec{\nabla} \xi_1 - \xi_1 \vec{\nabla} \xi_3$$

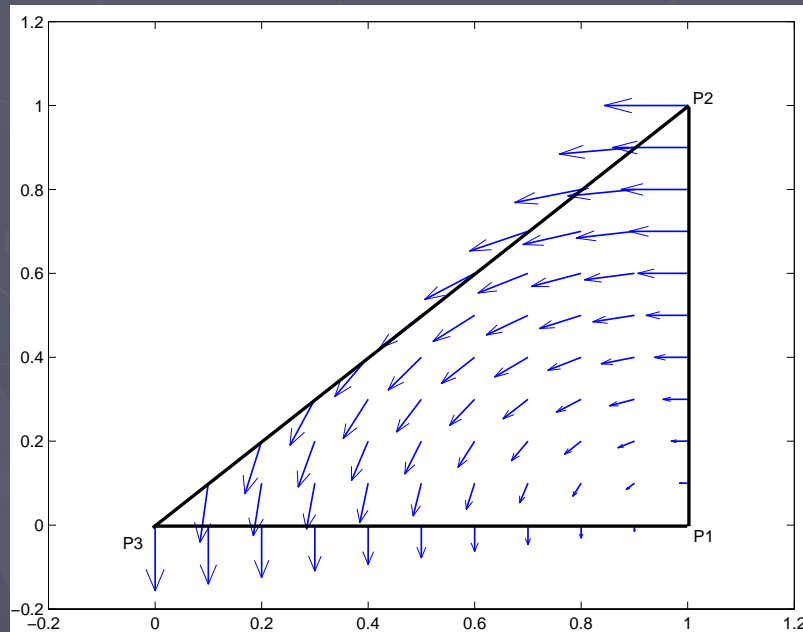
- ▶ Damit lässt sich jedes beliebige Vektorfeld A im Element wie folgt ausdrücken:

$$\vec{A}^e = \sum_{i=1}^3 A_i^e \vec{N}_i^e, \quad \text{wo } A_i^e \text{ die tangential Komponente des Feldes } \vec{A}$$

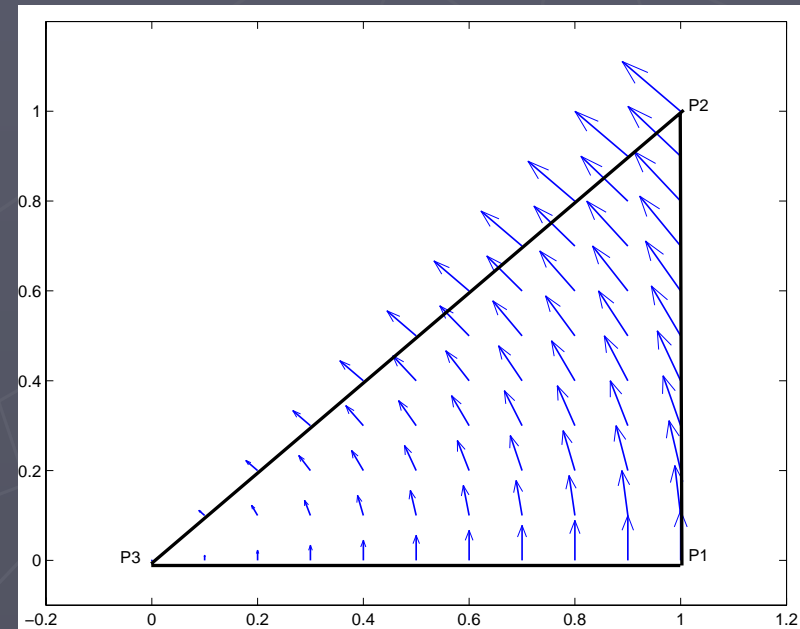
entlang der Kante i im Element e beschreibt

Whitney Elemente

- ▶ Jede Ansatzfunktion stellt eine Rotation um den gegenüberliegenden Dreiecks-Eckpunkt dar:

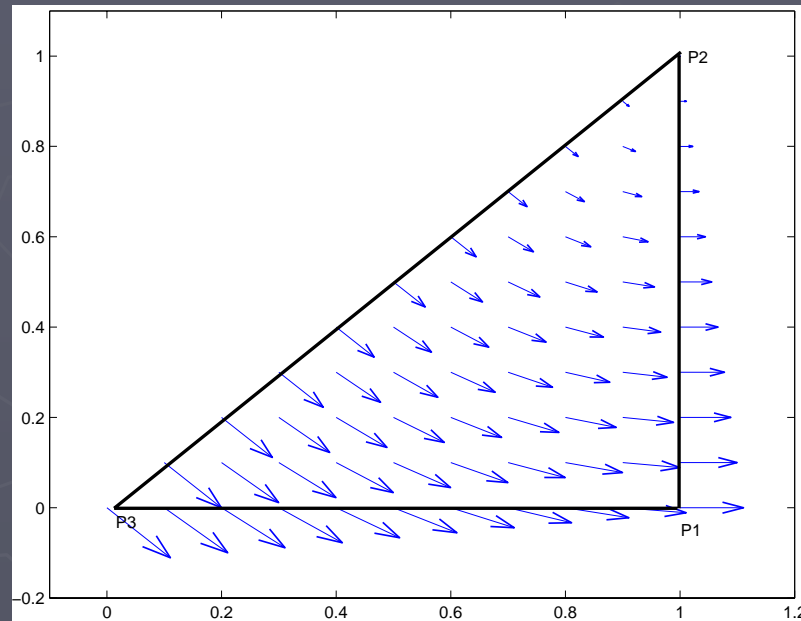


Whitney Basisfunktion \vec{N}_2



Whitney Basisfunktion \vec{N}_1

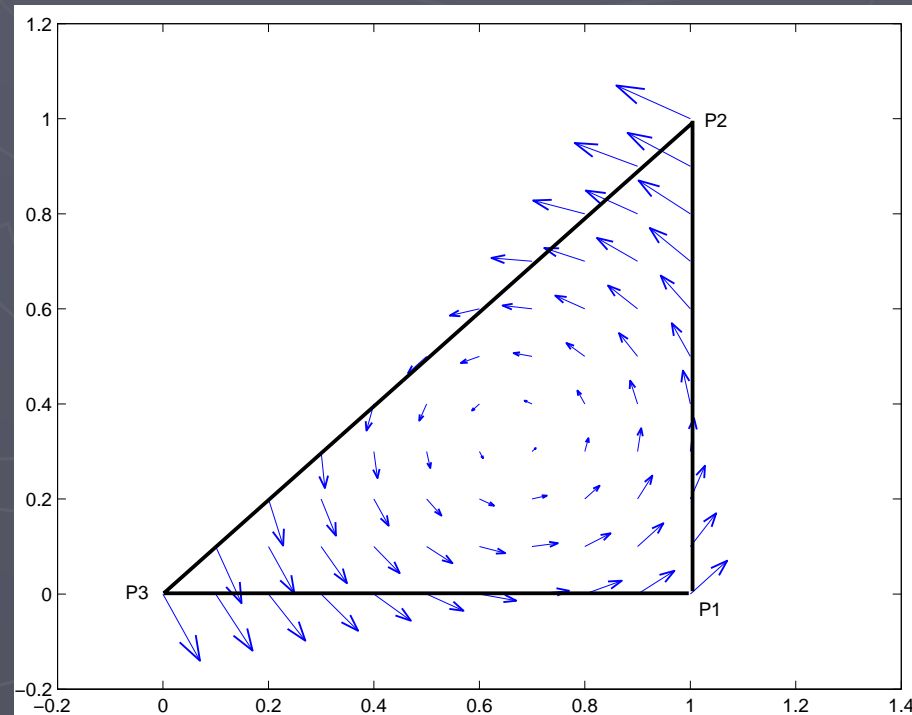
Whitney Elemente



Whitney Basisfunktion \vec{N}_3

Whitney Elemente

- ▶ Setzt man zum Beispiel alle Komponenten 1 dann erhält man folgendes Vektorfeld im Dreieck



Die Variationsformulierung

- ▶ Standardvorgehen: Integration, Multiplikation mit Testfunktion, Vereinfachung mit Green'schen Sätzen

$$\operatorname{rot} \sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{H}) + \operatorname{rot}(\sigma^{-1} \vec{j}_0)$$

$$\int_{\Omega} \operatorname{rot} \sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \vec{N} dx = -\int_{\Omega} \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{H}) \cdot \vec{N} dx + \int_{\Omega} \operatorname{rot}(\sigma^{-1} \vec{j}_0) \cdot \vec{N} dx$$

$$\text{lhs: } \int_{\Omega} \sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{N} dx + \int_{\partial \Omega} \vec{n} \times (\sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H}) \cdot \vec{N} dx$$

$$\text{rhs: } -\int_{\Omega} \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{H}) \cdot \vec{N} dx + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \vec{j}_0 \cdot \operatorname{rot} \vec{N} dx - \int_{\partial \Omega} \vec{n} \times \vec{N} \sigma^{-1} \vec{j}_0 dx$$

Die Variationsformulierung

- ▶ Wegen der Randbedingung folgt:

$$\int_{\Omega} \sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H} \cdot \operatorname{rot} \vec{N} dx = - \int_{\Omega} \frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{H}) \cdot \vec{N} dx + \int_{\Omega} \sigma^{-1} \vec{j}_0 \cdot \operatorname{rot} \vec{N} dx$$

Die Elementmatrizen

- Die lokalen Elementmatrizen und - Vektoren berechnen sich wie folgt:

$$A_{ij}^e = \int_A (\vec{\nabla} \times \vec{N}_i^e) \cdot (\vec{\nabla} \times \vec{N}_j^e) dx$$

$$B_{ij}^e = \int_A \vec{N}_i^e \cdot \vec{N}_j^e dx$$

$$C_i^e = \int_A \vec{j}_0 \cdot \text{rot} \vec{N}_i^e dx$$

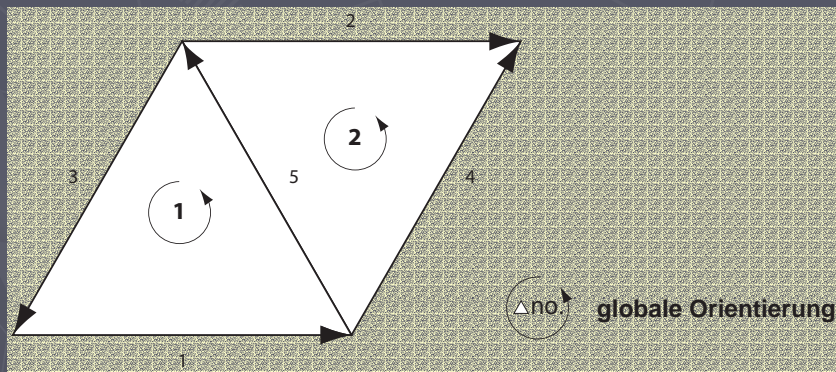
$$\int_A (\xi_1)^k (\xi_2)^l (\xi_3)^m dx = \frac{k!l!m!}{(k+l+m+2)!}$$

$$\int_A \vec{f}(\vec{x}) dx = \frac{1}{3} A \sum_{j=1}^3 \vec{f}(\vec{m}_j),$$

wo \vec{m}_j = Mittelpkt. der Kante j.

Assemblierung

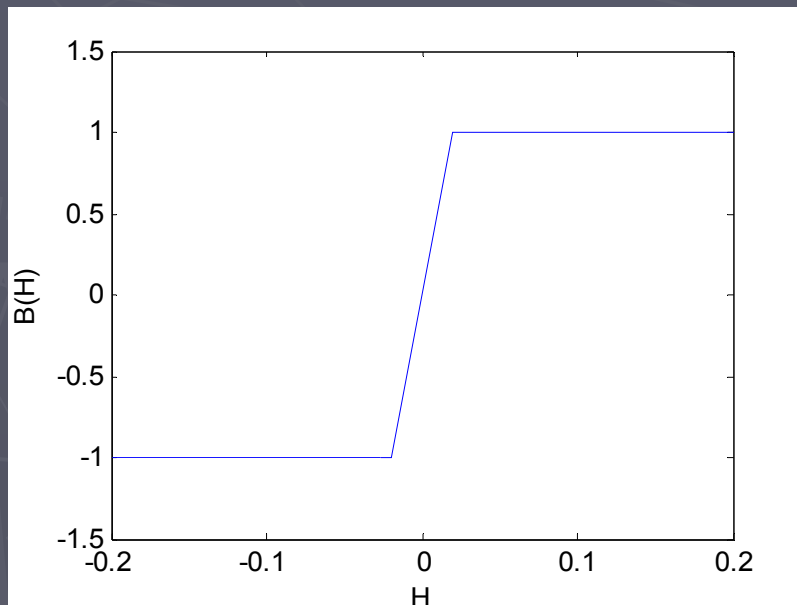
- ▶ Bei der Einarbeitung der lokalen Gleichungssysteme in das globale, muss die globale Kantenrichtung der Dreiecke berücksichtigt werden
- ▶ Stimmen lokale und globale Kantenrichtung nicht überein → Vorzeichenwechsel in den lokalen Matrizen



$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & -a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Zeitdiskretisierung

- ▶ Impliziter Euler mit Newtonverfahren geht nicht, wegen nichtlinearer Materialeigenschaft $B=B(H)$



- ▶ Fixpunktiteration
- ▶ Relaxationsverfahren

Fixpunktiteration

► skalares Modellproblem:

$$\frac{\partial}{\partial t} u + au = f$$

$$u_i + \tau au_i = u_{i-1} + \tau f(u_i)$$

$$u_i = (1 + \tau a)^{-1} (u_{i-1} + \tau f(u_i)) =: g(u_i)$$

Startwert u_i^0 . Fuer $j=0,1,2,\dots$

$$u_i^{(j+1)} = g(u_i^{(j)}) = (1 + \tau a)^{-1} (u_{i-1} + \tau f(u_i^{(j)}))$$

► Ferromagnetismus

$$\operatorname{rot} \sigma^{-1} \operatorname{rot} \vec{H} = -\frac{d}{dt} \vec{B}(\vec{H}) + \operatorname{rot}(\sigma^{-1} \vec{j}_0)$$

$$\tau \sigma^{-1} \underline{\underline{A}} \vec{H}_i = \tau \sigma^{-1} \vec{C}_i - [\underline{\underline{B}} \vec{B}(\vec{H}_i) - \underline{\underline{B}} \vec{B}(\vec{H}_{i-1})]$$

$$\begin{aligned} \vec{H}_i &= (\tau \sigma^{-1} \underline{\underline{A}})^{-1} (\tau \sigma^{-1} \vec{C}_i - [\underline{\underline{B}} \vec{B}(\vec{H}_i) - \underline{\underline{B}} \vec{B}(\vec{H}_{i-1})]) \\ &= \vec{g}(\vec{H}_i) \end{aligned}$$

Startwert \vec{H}_i^0 . Fuer $j=0,1,2,\dots$

$$\begin{aligned} \vec{H}_i^{(j+1)} &= \vec{g}(\vec{H}_i^{(j)}) \\ &= (\tau \sigma^{-1} \underline{\underline{A}})^{-1} (\tau \sigma^{-1} \vec{C}_i - [\underline{\underline{B}} \vec{B}(\vec{H}_i^{(j)}) - \underline{\underline{B}} \vec{B}(\vec{H}_{i-1})]) \end{aligned}$$

$$\vec{H}_i = \lambda \vec{H}_i^{(j+1)} + (1 - \lambda) \vec{H}_{i-1}$$

Relaxationsverfahren

- ▶ skalares Verfahren von Jäger und Kacur entwickelt
- ▶ sehr komplexe Theorie
- ▶ Verallgemeinerung auf vektorwertige Probleme hat nicht funktioniert
- ▶ Hier soll nur kurz das Prinzip für den Ferromagnetismus skizziert werden

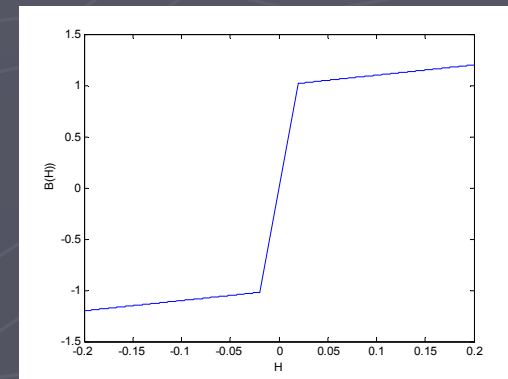
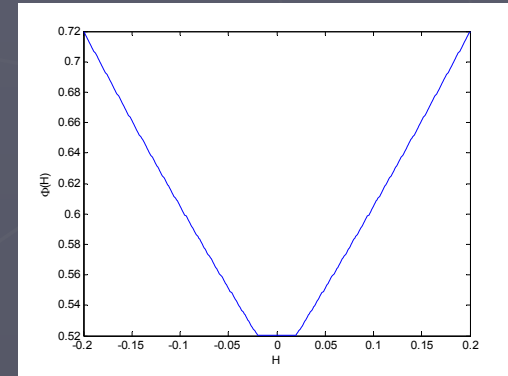
Relaxationsverfahren

- ▶ Ausgangspunkt des Verfahrens ist ein konvexes Potential Φ , welches der magnetischen Energie des Feldes entspricht

$$\Phi(\vec{H}) = \frac{1}{2} \mu_0 (|\vec{H}| + B_0 \mu_0^{-1})^2, \quad \vec{H} \in \mathbb{R}^2$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{H}) = \vec{\nabla} \Phi(\vec{H}) = \mu_0 \vec{H} + B_0 \frac{\vec{H}}{|\vec{H}|}$$

- ▶ Aus diesem Potential lässt sich über einen Gradienten die magnetische Induktion B berechnen.

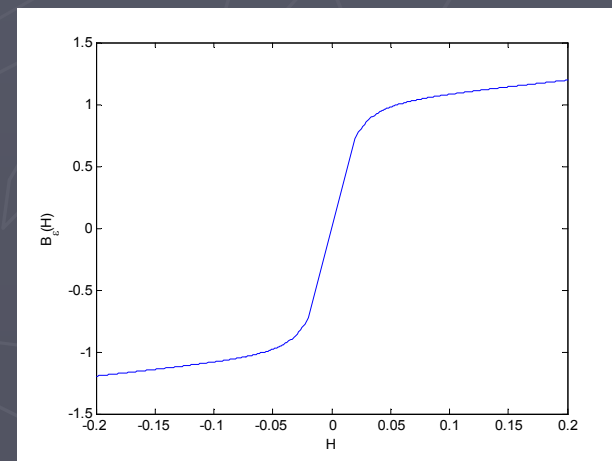
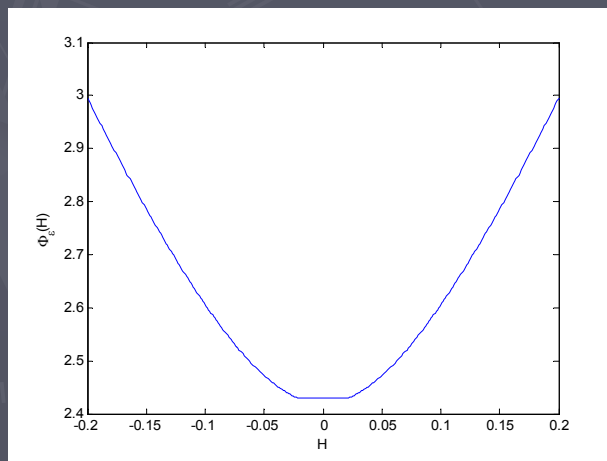


Relaxationsverfahren

- Für das Verfahren müssen Potential und Materialgesetz regularisiert werden

$$\Phi \rightarrow \Phi_\varepsilon(\vec{H}) = \frac{1}{2} \mu_0 (\sqrt{|\vec{H}|^2 + \varepsilon^2} + B_0 \mu_0^{-1})^2, \quad \vec{H} \in \mathbb{R}^2, \quad \varepsilon > 0$$

$$\Rightarrow \vec{B}(\vec{H}) \rightarrow \vec{B}_\varepsilon(\vec{H}) = \mu_0 \vec{H} + B_0 \frac{\vec{H}}{\sqrt{|\vec{H}|^2 + \varepsilon^2}}$$



Relaxationsverfahren

- ▶ Das zu lösende Gleichungssystem sieht folgendermassen aus:

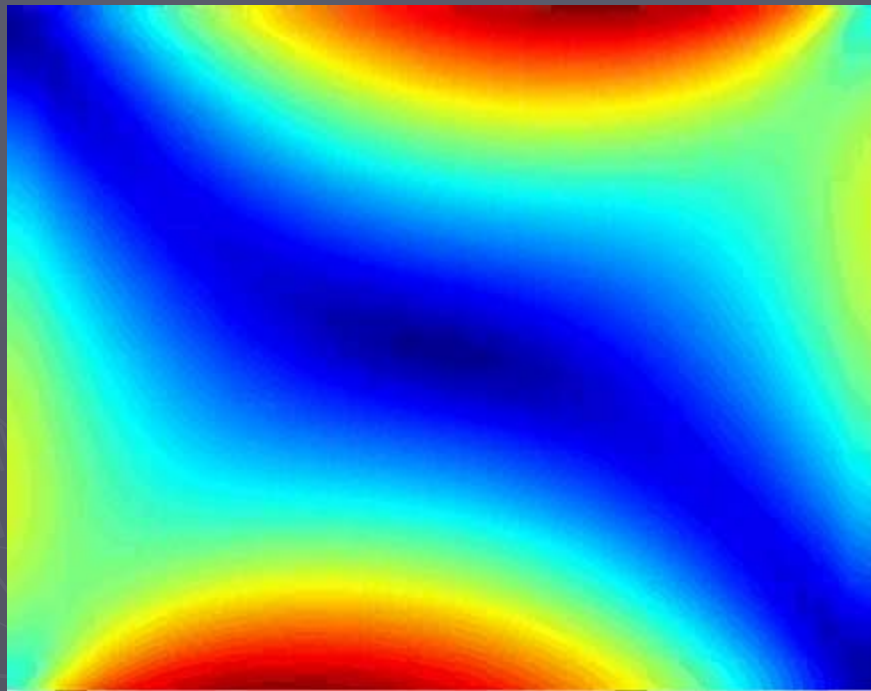
$$\underline{\underline{L}}_i (\vec{H}_i - \vec{H}_{i-1}) + \tau \text{rot} \sigma^{-1} \text{rot} \vec{H}_i = \text{rot}(\sigma^{-1} \vec{j}_0(i \cdot \tau))$$

mit der Nebenbedingung

$$\left\| \underline{\underline{L}}_i - \gamma \int_0^1 \underline{\underline{DB}}_\varepsilon(\vec{H}_{i-1} + t\gamma(\vec{H}_i - \vec{H}_{i-1})) dt \right\| < \tau$$

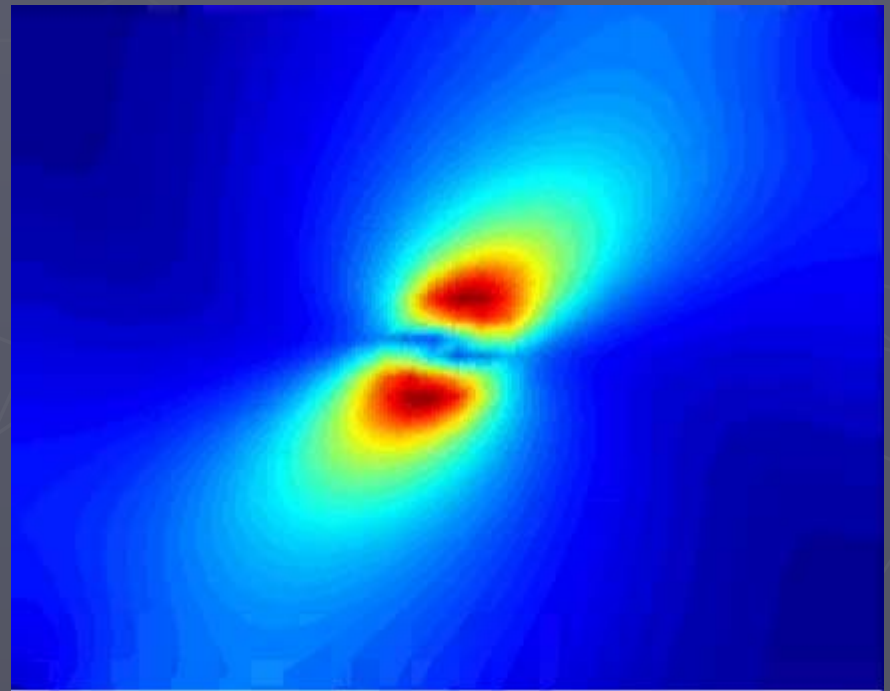
- ▶ Dieses nichtlineare Gleichungssystem für L und H wird mittels Fixpunktiteration gelöst.

Resultate Fixpunktiteration



$$\tau = 0.0001, \quad \Delta x = \Delta y = 0.025,$$

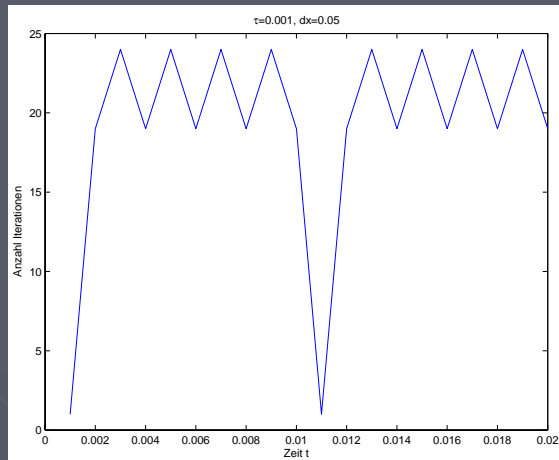
$$j_0 = 100 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$



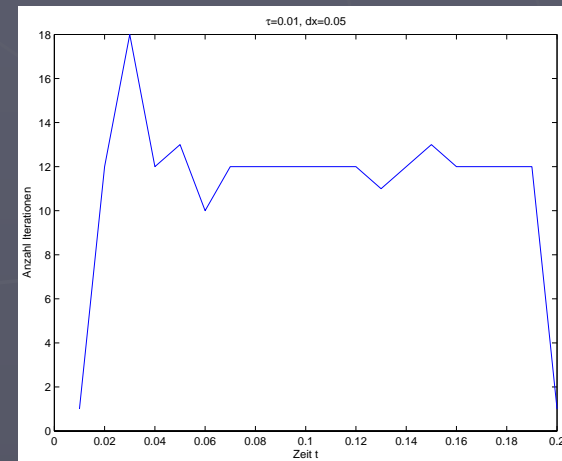
$$\tau = 0.0001, \quad \Delta x = \Delta y = 0.025,$$

$$j_0 = 100 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right) \cdot \delta\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}\right)$$

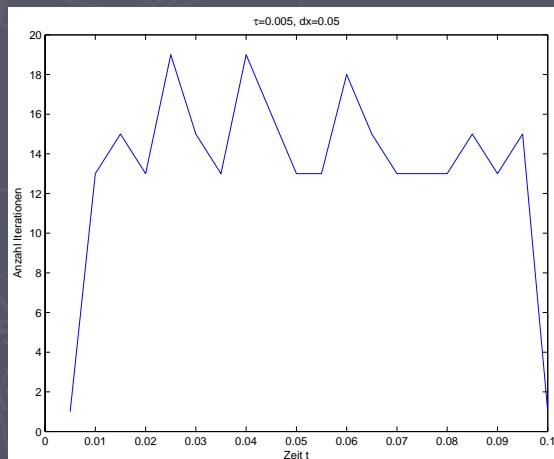
Resultate Fixpunktiteration



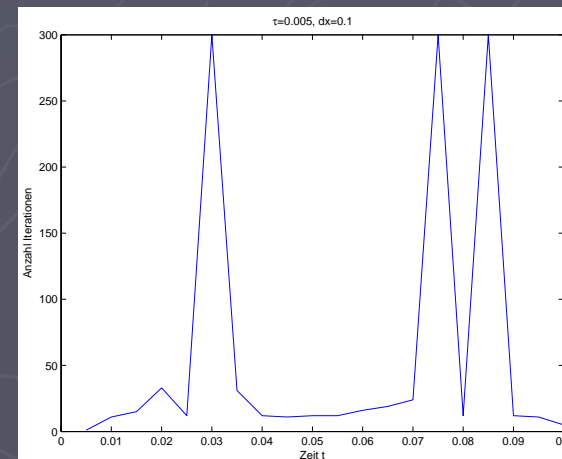
$\tau = 0.001, \Delta x = 0.05$



$\tau = 0.01, \Delta x = 0.05$



$\tau = 0.005, \Delta x = 0.05$

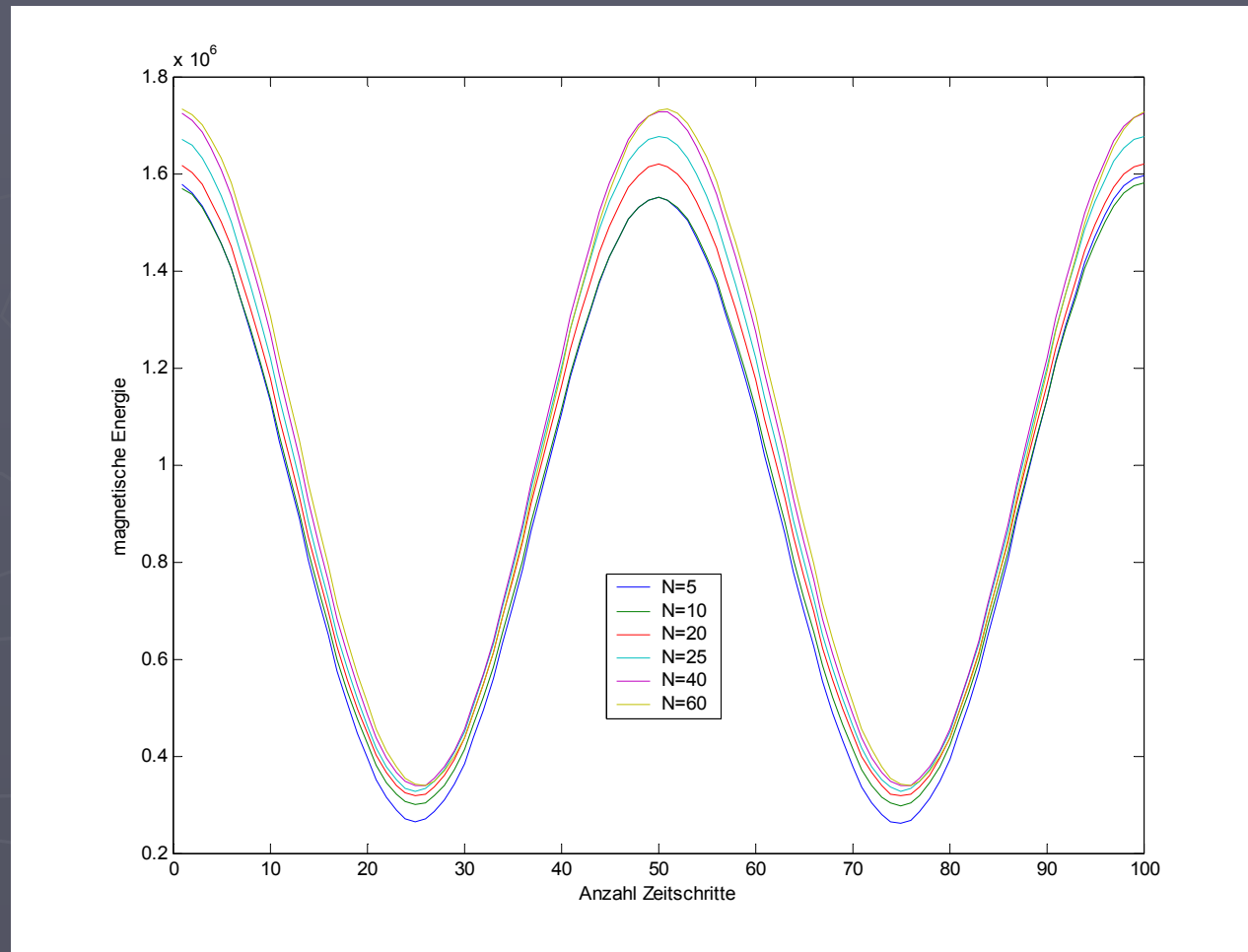


$\tau = 0.005, \Delta x = 0.1$

Resultate Fixpunktiteration

"magnetische Energie"

$$\int_{\Omega} \vec{H}^2 dx$$

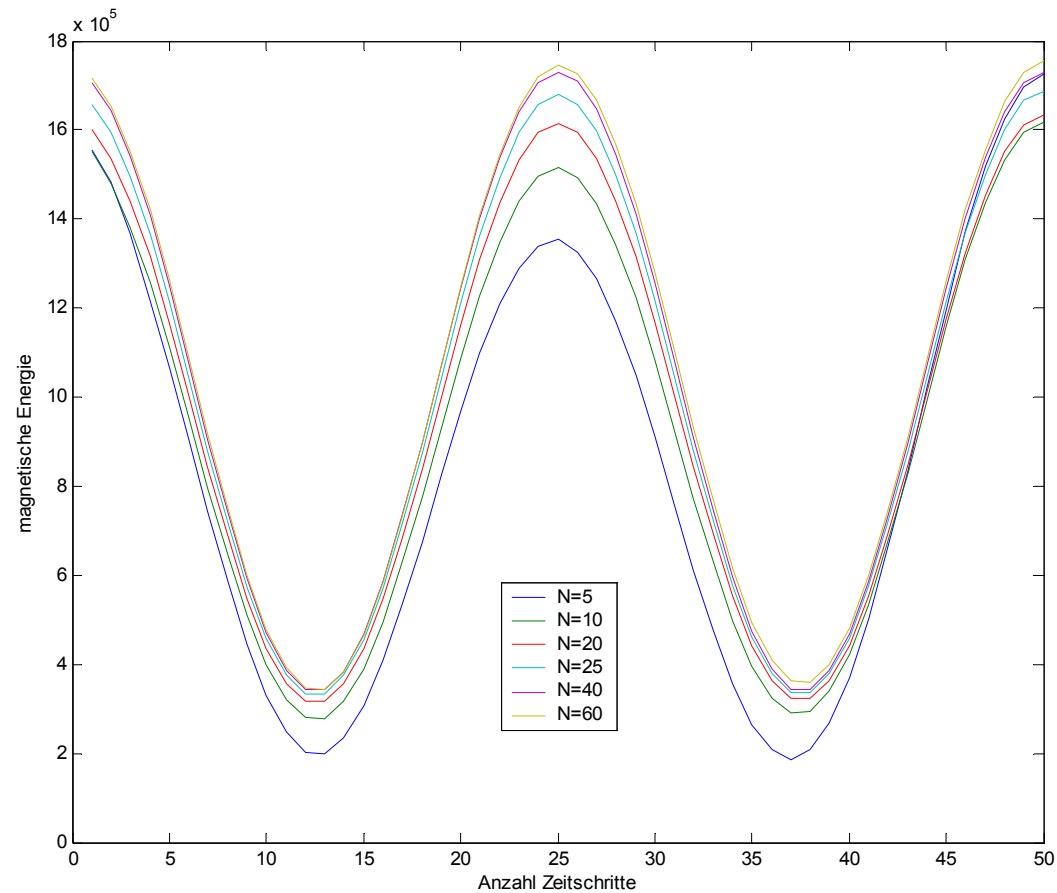


$$\tau = 0.0001, \quad j_0 = 100 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Resultate Fixpunktiteration

"magnetische Energie"

$$\int_{\Omega} \vec{H}^2 dx$$

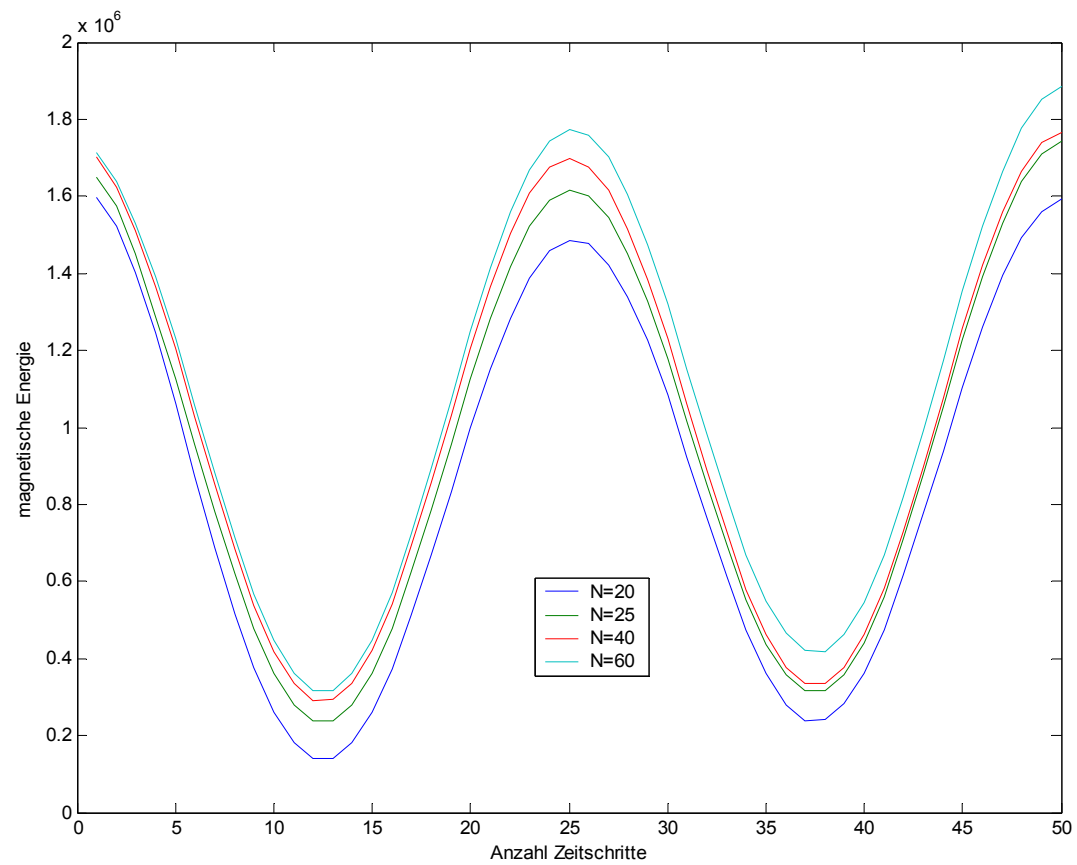


$$\tau = 0.001, \quad j_0 = 100 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Resultate Fixpunktiteration

"magnetische Energie"

$$\int_{\Omega} \vec{H}^2 dx$$



$$\tau = 0.01, j_0 = 100 \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Zusammenfassung

- ▶ trotzdem viel dabei gelernt...

