Proseminar
Hierarchische Matrizen

Elliptische partielle Differentialgleichungen

Lukas Wampfler, 5. Mai 2004

1. Überblick

- Methode der finiten Elementen und ein eindimensionales Problem
- Die Steifigkeitsmatrix als $\mathcal{H}$-Matrix (1-d Fall)
- Die Inverse der Steifigkeitsmatrix als $\mathcal{H}$-Matrix (1-d Fall)
- Mehrdimensionales Modellproblem

2 Problemstellung

Suche $U(x) \in H_0^1([0,1])$ mit

$$-U''(x) = F(x) \qquad x \in [0,1] \tag{1}$$

und Dirichlet Randbedingungen

$$U(0) = U(1) = 0$$

für ein $F \in L^2([0,1])$.

Schwache Formulierung

Finde $U(x) \in H_0^1([0,1])$, so dass

$$\int_0^1 U'(x)\varphi'(x)dx = \int_0^1 F(x)\varphi(x)dx \qquad \forall \varphi \in H_0^1([0,1]) \tag{2}$$

Galerkin-Diskretisierung, finite Elemente

Idee:

- Teile $[0,1]$ auf in Teilintervalle $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \ldots, n$; $x_i = \frac{i}{n+1}$

- Definiere

$$X_h^1 := \{v \in C^0([0,1]) |\, v|_{[x_i,x_{i+1}]} \in \mathbb{P}^1([x_i, x_{i+1}])\}$$

  den Raum der stetigen und stückweise linearen Funktionen.

- Ersetze $H_0^1([0,1])$ als Lösungsraum durch $V_n := H_0^1([0,1]) \cap X_h^1$.

- Definiere Basis $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von V_n durch

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} & x \in [x_{i-1}, x_i] \\ \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i} & x \in [x_i, x_{i+1}] \end{cases}$$

- Nun gilt

$$U_n(x) = \sum_{i=1}^{n} U(x_i)\varphi_i(x) \ \in V_n$$

- Wähle als Testfunktion $\varphi(x) = \varphi_j(x)$

- Man erhält

$$Ax = b$$

mit

$$A_{ij} = \int_0^1 \varphi_i(x)'\varphi_j(x)'dx,\ b_i = \int_0^1 F(x)\varphi_j(x)dx$$

und

$$x_i = U(x_i).$$

- Hier ist die **Steifigkeitsmatrix** A tridiagonal, denn es gilt

$$supp(\varphi_i) \cap supp(\varphi_j) = \emptyset \quad falls\, |i - j| > 1$$

und

$$(A)_{i,i} = 2(n+1),\ (A)_{i,i+1} = (A)_{i+1,i} = -(n+1)\ \forall i$$

3. Die Steifigkeitsmatrix im $\mathcal{H}$-Format

Annahme: $n = 2^p$

$$A = (n+1) \times \begin{bmatrix} A' & K \\ K^T & A' \end{bmatrix}$$

mit A' tridiagonal und $rang(K) = 1$.

Cluster Baum $T_{\mathcal{I}}$

Wurzel des Baumes: $\mathcal{I}_1^{(0)} := \{0, \ldots, n-1\}$

Nachfahre von $\mathcal{I}_1^{(0)}$: $\mathcal{I}_1^{(1)} := \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$ und $\mathcal{I}_2^{(1)} := \{\frac{n}{2}, \ldots, n-1\}$

Nachfahre von $\mathcal{I}_1^{(1)}$: $\mathcal{I}_1^{(2)} := \{0, \ldots, \frac{n}{4} - 1\}$ und $\mathcal{I}_2^{(2)} := \{\frac{n}{4}, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$

Nachfahre von $\mathcal{I}_2^{(1)}$: $\mathcal{I}_3^{(2)} := \{\frac{n}{2}, \ldots, \frac{3n}{4} - 1\}$ und $\mathcal{I}_4^{(2)} := \{\frac{3n}{4}, \ldots, n-1\}$

usw.

Der **Blockclusterbaum** $T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ ist folgendermassen definiert:

$$root(T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}) := \mathcal{I}\times\mathcal{I}$$

$$sons(r\times s) := \begin{cases} \{r'\times s' \,|\, r'\in sons(r), s'\in sons(s)\} & falls\, r = s \\ \emptyset & sonst \end{cases}$$

Die Steifigkeitsmatrix A ist eine $\mathcal{H}$-Matrix basierend auf dem Blockclusterbaum $T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$ mit Rang 1 je Block:

$$A \in \mathcal{H}(T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}, 1)$$

4. Inverse der Steifigkeitsmatrix als $\mathcal{H}$-Matrix

Inversion einer (2×2)-Block-Matrix:

Sei

$$M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$$

mit M, M_{11} regulär.

Dann gilt

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} M_{11}^{-1} + M_{11}^{-1} M_{12} S^{-1} M_{21} M_{11}^{-1} & -M_{11}^{-1} M_{12} S^{-1} \\ -S^{-1} M_{21} M_{11}^{-1} & S^{-1} \end{bmatrix} \tag{3}$$

wobei $S := M_{22} - M_{21} M_{11}^{-1} M_{12}$.

Lemma:

Sei $n = 2^p$ und $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine tridiagonale Matrix. Zusätzlich seien M und M_{11} regulär. Dann gilt

$$M^{-1} \in \mathcal{H}(T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}, 1)$$

für obigen Blockclusterbaum $T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$.

Rekursive Anwendung der Formel (3) ergibt die exakte Inverse M^{-1}.

Beweis: (Induktion)

- Klar für p=0, also n=1

- Sei nun $M = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$.

  Der eine nicht-diagonale Block von M^{-1} ist nach (3)

$$(M^{-1})_{12} = -M_{11}^{-1} M_{12} S^{-1}.$$

  Da $Rang(M_{12}) = 1$, gilt $Rang((M^{-1})_{12}) \leq 1$.
  Die analoge Überlegung gilt für $(M^{-1})_{21}$.

Der Block $S = M_{22} - M_{21}M_{11}^{-1}M_{12}$ ist wiederum tridiagonal, da M_{22} es ist und da gilt

$$(M_{21}M_{11}^{-1}M_{12})_{ij} = \begin{cases} (M_{11}^{-1})_{\frac{n}{2},\frac{n}{2}} & falls\,(i,j) = (\frac{n}{2},\frac{n}{2}) \\ 0 & sonst \end{cases}$$

Also gilt nach Induktion, dass $(M^{-1})_{22} = S^{-1} \in \mathcal{H}(T_{\mathcal{I}' \times \mathcal{I}'}, 1)$, wobei $\mathcal{I}' := \{\frac{n}{2}, \ldots, n-1\}$ und $T_{\mathcal{I}' \times \mathcal{I}'}$ der Subbaum von $T_{\mathcal{I} \times \mathcal{I}}$ ist mit Wurzel $\mathcal{I}' \times \mathcal{I}'$.

Analog erhält man $(M^{-1})_{11} \in \mathcal{H}(T_{\mathcal{I}'' \times \mathcal{I}''}, 1)$ für den Subbaum $T_{\mathcal{I}'' \times \mathcal{I}''}$ zur Indexmenge $\mathcal{I}'' := \{0, \ldots, \frac{n}{2} - 1\}$.

$\square$

5. Mehrdimensionales Beispiel (Poisson-Gleichung)

Suche $U(x) \in H_0^1(\Omega)$ mit

$$-\Delta U(x) := -\sum_{i=1}^{d} \partial_i^2 U(x) = F(x) \qquad x \ \in \Omega \subset \mathbb{R}^d, d = 2,3 \quad (4)$$

und Dirichlet Randbedingungen

$$U(x) = 0 \qquad f\ddot{u}r\ x \in \Gamma := \partial\Omega$$

für ein $F \in L^2(\Omega)$.

6. Schwache Formulierung:

$$\int_\Omega \langle \nabla U, \nabla \varphi \rangle \, d\Omega = \int_\Omega F(x)\varphi(x) d\Omega \qquad \forall \varphi \in H_0^1 \tag{5}$$

– Ersetze Lösungsraum H_0^1 durch endlichdimensionalen Unterraum $V_n \subset H_0^1$

– Setze diskretisierte Lösung als Linearkombination der Basisfunktionen $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ von V_n an

– Wähle eine dieser Basisfunktionen $\varphi(x) = \varphi_j(x)$ als Testfunktion.

– Dies führt uns wiederum auf ein lineares Gleichungssystem

$$Ax = b \tag{6}$$

mit

$$A_{ij} = \int_\Omega \left\langle \nabla\varphi_i(x), \nabla\varphi_j(x) \right\rangle dx, \quad b_i = \int_\Omega \varphi_i(x) F(x) dx$$

und dem gesuchten Vektor der Funktionswerte $x_i = U(x_i)$.

– A wieder schwach besetzt.

Singularitätsfunktion

s:$\Omega \times \Omega \to \mathbb{R}$ $\qquad s(x,y) := \begin{cases} -\frac{1}{2\pi}\, log\, \|x-y\| & d=2 \\ \frac{1}{4\pi}\, \|x-y\|^{-1} & d=3 \end{cases}$

Darstellung der Lösung:

$$U(x) = \int_\Omega s(x,y)F(y)dy - \int_\Gamma s(x,y)\frac{\partial}{\partial n}U(y)d\Gamma_y$$

oder

$$U(x) = \int_\Omega g(x,y)F(y)dy$$

falls eine Green'sche Funktion $g(x,y) = s(x,y) + \Phi(x,y)$ existiert, mit $g|_\Gamma = 0$ und $\Phi \in C^2(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $\Phi \in C^2(\overline{\Omega})$, $\Delta\Phi = 0$.

Die Funktion $g(x,y)$ verhält sich wie die Singularitätsfunktion $s(x,y)$, welche dem Kern $h(x,y)$ der Integralgleichung

$$\int_\Omega v(x) \int_\Omega h(x,y)u(y)dydx + \lambda \langle u,v \rangle = f(v) \quad \forall v \in H$$

gleicht. Daher ist es angebracht, dieselbe Struktur für die inverse Matrix A^{-1} zu benützen wie für diesen Kern.

Lemma:
Die Steifigkeitsmatrix A erfüllt

$$A \in \mathcal{H}(T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}, 0)$$

Beweis: Sei $t \times s$ zulässig. Dann gilt:

$$min\{diam(\Omega_t), diam(\Omega_s)\} \leq \eta\, dist(\Omega_t, \Omega_s)$$

für ein $\eta > 0$. (Zulässigkeitsbedingung)
Da $diam(\Omega_t) > 0$, folgt, dass $dist(\Omega_t, \Omega_s) > 0$. Also sind die Träger der Basisfunktionen $i \in \hat{t}$ und $j \in \hat{s}$ disjunkt. Wegen

$$A_{ij} = \int_\Omega \left\langle \nabla\varphi_i(x), \nabla\varphi_j(x) \right\rangle dx$$

erhalten wir $A_{ij} = 0$, also $rang(A|_{\hat{t}\times\hat{s}}) = 0$.

$\square$

Ziel:

Approximation $\widetilde{A^{-1}}$ von A^{-1} in $\mathcal{H}(T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}, k)$ mit kleinem Rang k und guter Näherung.

Diskretisierungsfehler durch Galerkin-Methode:

$$\epsilon_n(U) := \|U - P_n U\|_{L^2(\Omega)}$$

wobei $P_n U$ die Projektion von U in den Raum V_n bezeichnet.

Die Konvergenz der Methode der finiten Elemente wird beschrieben durch

$$\epsilon_n(U) \leq \varepsilon_n \|F\|_{L^2(\Omega)} \quad \epsilon_n(U) = O(h^2).$$

Theorem (Ohne Beweis)

Sei p die Tiefe von $T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}$.

Dann gibt es eine Matrix $\widetilde{A^{-1}} \in \mathcal{H}(T_{\mathcal{I}\times\mathcal{I}}, k)$ für welche gilt

$$\left\| A^{-1} - \widetilde{A^{-1}} \right\|_2 = O(\varepsilon_n)$$

für einen Rang der Blöcke

$$k = O(p^2\, log \left(\frac{p}{\varepsilon_n}\right))$$