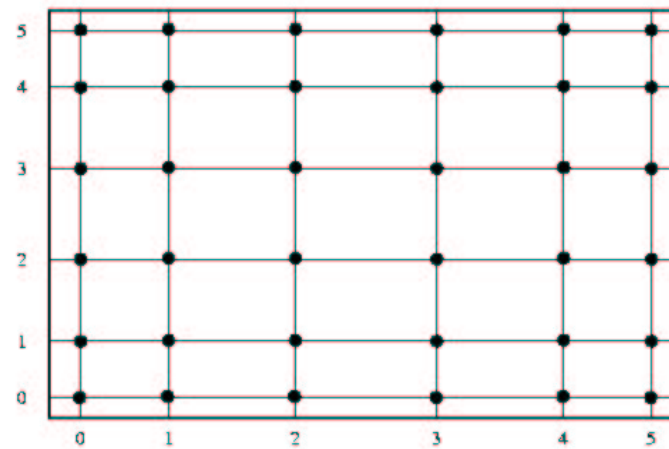
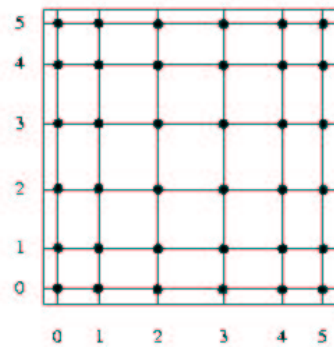


Mehrdimensionale Interpolation



Aniello Esposito

30.04.2004

Galerkin Diskretisierung

- Zusammenfassung

Interpolation

- Degenerierte Approximation
- Tensorprodukt Interpolation auf bounding boxes
- Interpolationsfehler Abschätzung

Galerkin Diskretisierung

Integral Gleichung in einem Hilbertraum H :

$$Gu + \lambda \langle u, \cdot \rangle = f$$

Das dazugehörige Variationsproblem ist

$$a(u, v) + \lambda m(u, v) = f(v)$$

für alle v in H mit

$$a(u, v) = \langle Gu, v \rangle_{H' \times H} \quad \text{und} \quad m(u, v) = \langle u, v \rangle_{H' \times H}$$

Galerkin Diskretisierung

Die Bilinearform $a(., .)$ ist dargestellt als

$$a(u, v) = \int_{\Omega} v(x) \int_{\Omega} g(x, y) u(y) dy dx$$

Galerkin Diskretisierung: Projektion auf einem n -dimensionalen Unterraum $H_n \subset H$. Finde eine Funktion $u_n \in H_n$, so dass

$$a(u_n, v_n) + \lambda m(u_n, v_n) = f(v_n)$$

für alle v_n in H_n . Oder äquivalent dazu:

$$a(u_n, \varphi_i) + \lambda m(u_n, \varphi_i) = f(\varphi_i)$$

für alle i einer Basis $(\varphi_i)_{i \in I}$ von H_n .

Galerkin Diskretisierung

$$u_n = \sum_{j \in I} x_j \varphi_j$$

$$\implies \sum_{j \in I} x_j a(\varphi_j, \varphi_i) + \lambda \sum_{j \in I} x_j m(\varphi_j, \varphi_i) = f(\varphi_i)$$

für alle $i \in I$. Dies führt auf ein **lineares Gleichungssystem**:

$$Gx + \lambda Mx = b$$

mit $G, M \in \mathbf{R}^{I \times I}$ und den Vektor $b \in \mathbf{R}^I$ mit

$$G_{ij} \doteq a(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \varphi_i(x) \int_{\Omega} g(x, y) \varphi_j(y) dy dx$$

$$M_{ij} \doteq m(\varphi_j, \varphi_i) = \int_{\Omega} \varphi_i(x) \varphi_j(x) dx$$

$$b_i \doteq f(\varphi_i)$$

Galerkin Diskretisierung

- Die Matrix G ist dicht besetzt da die Kernfunktion einen globalen Träger hat.
- Die direkte Speicherung von G führt nicht zu effektiven Algorithmen.
- Die Lösung besteht darin die Kernfunktion durch eine **degenerierte Funktion** zu approximieren (low rank approximation) was zu einer *Hierarchischen Matrix* führt.

Interpolation

Taylorentwicklung als degenerierte Approximation:

$$\widehat{g}(x, y) = \sum_{\nu=0}^{k-1} \frac{1}{\nu!} \partial_x^\nu g(x_0, y) (x - x_0)^\nu$$

- Approximation ist zwar degeneriert aber nur brauchbar falls die Ableitungen effizient berechnet werden können.
- → **Interpolation** anstatt Taylorentwicklung.

Seien $(x_\nu)_{\nu \in K}$ eine Familie von Interpolationspunkten in \mathbb{R}^d und $(\mathcal{L}_\nu)_{\nu \in K}$ die Lagrangefunktion mit

$$\mathcal{L}_\nu(x_\mu) = \delta_{\nu, \mu}$$

für alle $\mu, \nu \in K$. Interpoliere $x \mapsto g(x, \cdot)$

$$\widehat{g}(x, y) \doteq \sum_{\mu \in K} g(x_\mu, y) \mathcal{L}_\mu(x)$$

Interpolation

Matrix G wird approximiert durch \hat{G} mit

$$\begin{aligned}\hat{G}_{ij} &\doteq \int_{\Omega} \varphi_i(x) \int_{\Omega} \hat{g}(x, y) \varphi_j(y) dy dx \\ &= \sum_{\mu \in K} \int_{\Omega} \varphi_i(x) \mathcal{L}_{\mu}(x) dx \int_{\Omega} g(x_{\mu}, y) \varphi_j(y) dy = (AB^T)_{ij}\end{aligned}$$

$$A_{i\mu} \doteq \int_{\Omega} \varphi_i(x) \mathcal{L}_{\mu}(x) dx \quad \text{und} \quad B_{j\mu} \doteq \int_{\Omega} g(x_{\mu}, y) \varphi_j(y) dy$$

- Der Rang von $\hat{G} = AB^T$ ist gebunden über die Kardinalität von K .
- Alternative Methode für niedrig Rang approximation.
- Quadraturformeln zur Berechnung der Matrixelemente (einfach).

Interpolation

Tensor Produkt Interpolation auf bounding boxes

- Approximation von $g(.,.)$ auf zulässigen Paaren von clusters.
- Interpolation auf beliebigen Domänen ist schwierig. → Bounding Box $\Omega_t \subseteq Q^t$ mit $Q^t = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$

Der eindimensionale Fall

Interpolation auf **Intervalle** $[-1, 1]$. → *Chebyshev Punkte* m -ter Ordnung:

$$(x_\nu)_{\nu=0}^m = \left(\cos \left(\frac{2\nu + 1}{2m + 2} \pi \right) \right)_{\nu=0}^m$$

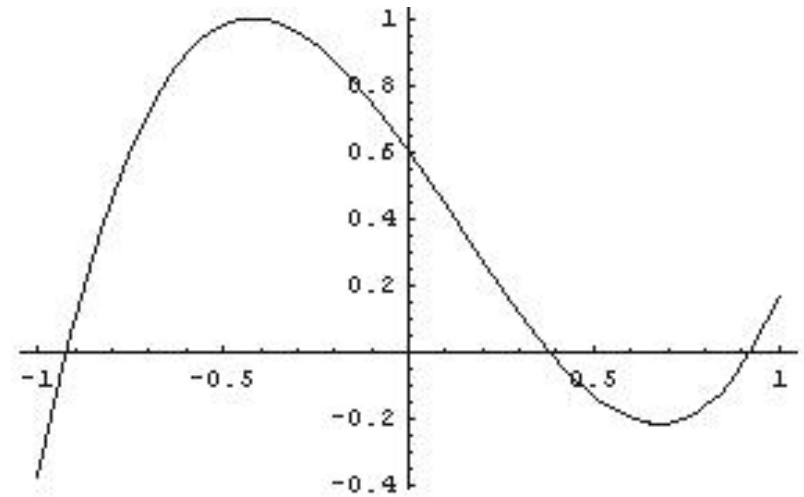
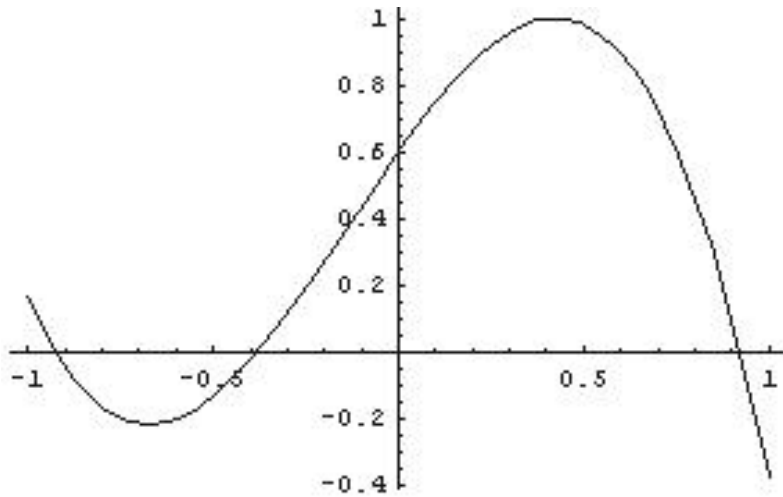
Mit den Lagrange Polynomen

$$\mathcal{L}_\nu(x) = \prod_{\mu=0, \mu \neq \nu}^m \frac{x - x_\mu}{x_\nu - x_\mu}$$

Interpolation

Interpolationsoperator zu $\mathcal{L}_\nu(x)$ und x_ν für $\nu \in \{0, \dots, m\}$:

$$\mathcal{I}_m : C[-1, 1] \rightarrow \mathcal{P}_m, \quad f \mapsto \sum_{\nu=0}^m f(x_\nu) \mathcal{L}_\nu$$



Interpolation

Allgemeine Intervalle $[a, b]$: **Affine Transformation**

$$\Phi_{[a,b]} : [-1, 1] \rightarrow [a, b], \quad x \mapsto \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x$$

Transformierte Interpolationsoperator

$$\mathcal{I}_m^{[a,b]} : C[a, b] \rightarrow \mathcal{P}_m \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}_m^{[a,b]}[f] \doteq (\mathcal{I}_m[f \circ \Phi_{[a,b]}]) \circ \Phi_{[a,b]}^{-1}$$

mit

$$\mathcal{I}_m^{[a,b]}[f] = \sum_{\nu=0}^m f(\Phi_{[a,b]}(x_\nu)) \mathcal{L}_\nu \circ \Phi_{[a,b]}^{-1}$$

→ **Transformierte** Interpolationspunkte

$$x_\nu^{[a,b]} \doteq \Phi_{[a,b]}(x_\nu) = \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x_\nu$$

Interpolation

Allgemeine Intervalle $[a, b]$: **Affine Transformation**

$$\Phi_{[a,b]} : [-1, 1] \rightarrow [a, b], \quad x \mapsto \frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x$$

Transformierte Interpolationsoperator

$$\mathcal{I}_m^{[a,b]} : C[a, b] \rightarrow \mathcal{P}_m \quad \text{mit} \quad \mathcal{I}_m^{[a,b]}[f] \doteq (\mathcal{I}_m[f \circ \Phi_{[a,b]}]) \circ \Phi_{[a,b]}^{-1}$$

mit

$$\mathcal{I}_m^{[a,b]}[f] = \sum_{\nu=0}^m f(\Phi_{[a,b]}(x_\nu)) \mathcal{L}_\nu \circ \Phi_{[a,b]}^{-1}$$

→ **Transformierte** Lagrangefunktionen

$$\mathcal{L}_\nu^{[a,b]} \doteq \mathcal{L}_\nu \circ \Phi_{[a,b]}^{-1}$$

Interpolation

Eigenschaft der transformierten Lagrangefunktionen

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\nu^{[a,b]}(x_\mu^{[a,b]}) &= \mathcal{L}_\nu \circ \Phi_{[a,b]}^{-1}[\Phi_{[a,b]}(x_\mu)] \\ &= \mathcal{L}_\nu(x_\mu) \\ &= \delta_{\nu,\mu} \quad \forall \nu, \mu \in \{0, \dots, m\}\end{aligned}$$

was auf die Form schliessen lässt:

$$\mathcal{L}_\nu^{[a,b]}(x) = \prod_{\mu=0, \mu \neq \nu}^m \frac{x - x_\mu^{[a,b]}}{x_\nu^{[a,b]} - x_\mu^{[a,b]}}$$

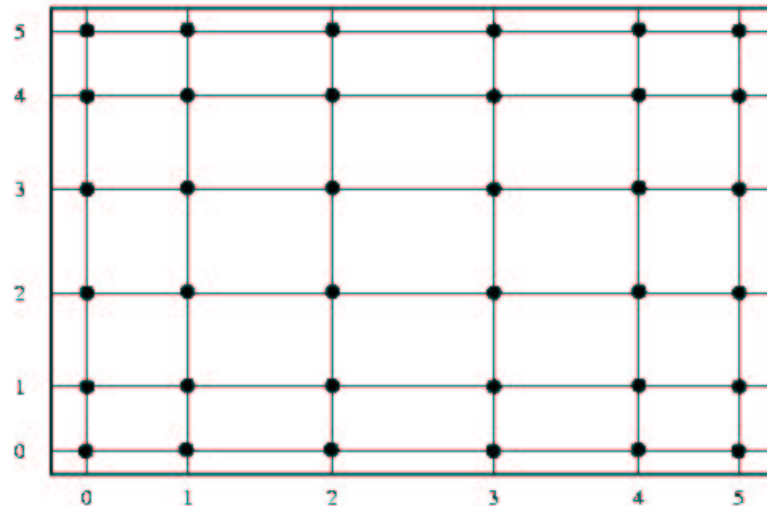
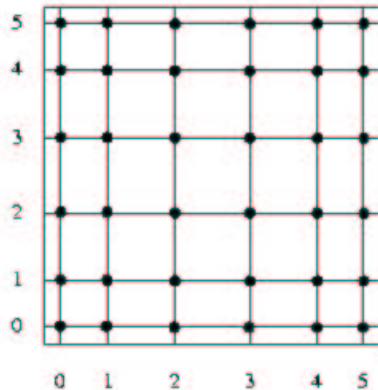
Interpolation

Der d -dimensionale Fall

Interpolation auf $Q^t = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$.

Es ist naheliegend eine **Tensorprodukt**darstellung für den allgemeinen Interpolationsoperator zu gebrauchen:

$$\mathcal{I}_m^t \doteq \mathcal{I}_m^{[a_1, b_1]} \otimes \dots \otimes \mathcal{I}_m^{[a_d, b_d]}$$



Interpolation

Mit der Menge:

$$K \doteq \{\nu \in \mathcal{N}_0^d \mid \nu_i \leq m \quad \forall \quad i \in \{1, \dots, d\}\} = \{0, \dots, m\}^d$$

gibt man den transformierten Interpolationspunkten und Lagrangefunktionen ein Label:

$$x_\nu^t \doteq (x_{\nu_1}^{[a_1, b_1]}, \dots, x_{\nu_d}^{[a_d, b_d]}), \quad \mathcal{L}_\nu^t \doteq \mathcal{L}_{\nu_1}^{[a_1, b_1]} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\nu_d}^{[a_d, b_d]}$$

Dann

$$\mathcal{I}_m^t[f](x) = \sum_{\nu \in K} f(x_\nu^t) \mathcal{L}_\nu^t$$

mit $x = (x_1, \dots, x_d)$.

Interpolation

Das Tensorprodukt der Lagrangefunktionen ergibt:

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_\nu^t(x) &= \left(\mathcal{L}_{\nu_1}^{[a_1, b_1]} \otimes \dots \otimes \mathcal{L}_{\nu_d}^{[a_d, b_d]} \right) (x) \\ &= \prod_{i=1}^d \mathcal{L}_{\nu_i}^{[a_i, b_i]}(x_i) \\ &= \prod_{i=1}^d \prod_{\mu=0, \mu \neq \nu_i}^m \frac{x_i - x_\mu^{[a_i, b_i]}}{x_{\nu_i}^{[a_i, b_i]} - x_\mu^{[a_i, b_i]}}\end{aligned}$$

Interpolation

Interpolationsfehler Abschätzung

Eindimensionale Fall

Stabilitätsabschätzung für die Chebyshev Operatoren \mathcal{I}_m

$$\|\mathcal{I}_m f\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \Lambda_m \|f\|_{\infty, [-1, 1]}$$

mit der Konstanten

$$\Lambda_m \doteq \frac{2}{\pi} \ln(m + 1) + 1 \leq m + 1$$

Für $f \in C^{m+1}[-1, 1]$ gilt

$$\|f - \mathcal{I}_m f\|_{\infty, [-1, 1]} \leq \frac{2^{-m}}{(m + 1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty, [-1, 1]}$$

Interpolation

Angewendet auf die transformierten Operatoren:

$$\begin{aligned}\|f - \mathcal{I}_m^{[a,b]} f\|_{\infty,[a,b]} &= \|f \circ \Phi^{[a,b]} - (\mathcal{I}_m^{[a,b]} f) \circ \Phi^{[a,b]}\|_{\infty,[-1,1]} \\ &= \|f \circ \Phi^{[a,b]} - \mathcal{I}_m(f \circ \Phi^{[a,b]})\|_{\infty,[-1,1]} \\ &\leq \frac{2^{-m}}{(m+1)!} \|(f \circ \Phi^{[a,b]})^{(m+1)}\|_{\infty,[-1,1]} \\ &= \frac{2^{-m}}{(m+1)!} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{m+1} \|f^{(m+1)}\|_{\infty,[a,b]} \\ &= \frac{(b-a)^{m+1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \|f^{(m+1)}\|_{\infty,[a,b]}\end{aligned}$$

Interpolation

Der d -dimensionale Fall

Sei $t \in T_I$ ein cluster mit Bounding Box $Q^t = [a_1, b_1] \times \dots \times [a_d, b_d]$.

$$\begin{aligned} & \|f - \mathcal{I}_m^t f\|_{\infty, Q^t} \\ & \leq \frac{d(m+1)^{d-1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \text{diam}(Q^t)^{m+1} \max\{\|\partial_i^{m+1} f\|_{\infty, Q^t} \mid i \in \{1, \dots, d\}\} \end{aligned}$$

Interpolation

Anwendung auf die Kernfunktion

$g \in C^\infty(Q^t \times Q^s)$ sei asymptotisch glatt, d.h

$$|\partial_x^\alpha \partial_y^\beta g(x, y)| \leq C(\alpha + \beta)! c_0^{|\alpha|+|\beta|} \|x - y\|^{-|\alpha|-|\beta|-\sigma}$$

für Konstanten $C, c_0, \sigma \in \mathbf{R}_{>0}$. Somit erfüllen die Funktionen

$$\begin{aligned} g_x : Q^t &\rightarrow C^\infty(Q^s), & x &\mapsto g(x, \cdot), \\ g_y : Q^s &\rightarrow C^\infty(Q^t), & y &\mapsto g(\cdot, y), \end{aligned}$$

die Abschätzungen

$$\|\partial^\alpha g_x(x)\|_{\infty, Q^t} \leq C(\alpha)! c_0^{|\alpha|} \text{dist}(Q^t, Q^s)^{-|\alpha|-\sigma}$$

$$\|\partial^\beta g_y(y)\|_{\infty, Q^s} \leq C(\beta)! c_0^{|\beta|} \text{dist}(Q^t, Q^s)^{-|\beta|-\sigma}$$

mit $x \in Q^t$ und $y \in Q^s$.

Interpolation

Mit der Formel

$$\begin{aligned} & \|f - \mathcal{I}_m^t f\|_{\infty, Q^t} \\ & \leq \frac{d(m+1)^{d-1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \text{diam}(Q^t)^{m+1} \max\{\|\partial_i^{m+1} f\|_{\infty, Q^t} \mid i \in \{1, \dots, d\}\} \end{aligned}$$

erhält man

$$\begin{aligned} \|g_x - \mathcal{I}_m^t g_x\|_{\infty, Q^t} & \leq \frac{Cd(m+1)^{d-1}}{2 \text{dist}(Q^t, Q^s)^\sigma} \left(\frac{c_0 \text{diam}(Q^t)}{4 \text{dist}(Q^t, Q^s)} \right)^{m+1} \\ \|g_y - \mathcal{I}_m^s g_y\|_{\infty, Q^s} & \leq \frac{Cd(m+1)^{d-1}}{2 \text{dist}(Q^t, Q^s)^\sigma} \left(\frac{c_0 \text{diam}(Q^s)}{4 \text{dist}(Q^t, Q^s)} \right)^{m+1} \end{aligned}$$

Interpolation

Beweis

Asymptotische Glattheit:

$$|\partial_x^\alpha g(x, y)| \leq C(\alpha)! c_0^{|\alpha|} \|x - y\|^{-|\alpha| - \sigma}$$

wegen

$$\|x - y\|^{-|\alpha| - \sigma} \leq \text{dist}(Q^t, Q^s)^{-|\alpha| - \sigma}$$

$$\Rightarrow |\partial_x^\alpha g(x, y)| \leq C(\alpha)! c_0^{|\alpha|} \text{dist}(Q^t, Q^s)^{-|\alpha| - \sigma}$$

und in der Supremumsnorm

$$\|\partial_x^\alpha g_x(x)\|_{\infty, Q^t} \leq C(\alpha)! c_0^{|\alpha|} \text{dist}(Q^t, Q^s)^{-|\alpha| - \sigma}$$

Interpolation

Beweis

$$\begin{aligned} & \|g_x - \mathcal{I}_m^t g_x\|_{\infty, Q^t} \\ & \leq \frac{d(m+1)^{d-1}}{2^{2m+1}(m+1)!} \text{diam}(Q^t)^{m+1} \max\{\|\partial_i^{m+1} g_x\|_{\infty, Q^t} \mid i \in \{1, \dots, d\}\} \end{aligned}$$

mit $|\alpha| = (m+1)$ gilt

$$\max\{\|\partial_i^{m+1} g_x\|_{\infty, Q^t} \mid i \in \{1, \dots, d\}\} \leq C(m+1)! c_0^{m+1} \text{dist}(Q^t, Q^s)^{-(m+1)-\sigma}$$

$$\Rightarrow \|g_x - \mathcal{I}_m^t g_x\|_{\infty, Q^t} \leq \frac{Cd(m+1)^{d-1}}{2 \text{dist}(Q^t, Q^s)^\sigma} \left(\frac{c_0 \text{diam}(Q^t)}{4 \text{dist}(Q^t, Q^s)} \right)^{m+1}$$

Interpolation

- $\text{diam}(Q^t) \leq \text{diam}(Q^s)$

$$|g(x, y) - \hat{g}(x, y)| = \left| g(x, y) - \sum_{\nu \in K} g(x_\nu^t, y) \mathcal{L}_\nu^t(x) \right| = |(g_x - \mathcal{I}_m^t[g_x])(x)(y)|$$

$$\leq \frac{Cd(m+1)^{d-1}}{2\text{dist}(Q^t, Q^s)^\sigma} \left(\frac{c_0 \text{diam}(Q^t)}{4\text{dist}(Q^t, Q^s)} \right)^{m+1} \leq \frac{Cd(m+1)^{d-1}}{2\text{dist}(Q^t, Q^s)^\sigma} \left(\frac{c_0 \eta}{4} \right)^{m+1}$$

- $\text{diam}(Q^s) \leq \text{diam}(Q^t)$

$$|g(x, y) - \hat{g}(x, y)| \leq C'(m) \left(\frac{c_0 \eta}{4} \right)^{m+1} \text{dist}(Q^s, Q^t)^{-\sigma}$$

mit dem Polynom $C'(m) \doteq Cd(m+1)^d/2$. Mit $\eta < 4/c_0 \Rightarrow (c_0 \eta/4) < 1$ und die Approximation konvergiert exponentiell in m .

Interpolation

Interpolation

Konstruktion der Niedrigrang Approximation

Zulässigkeit für zwei Clusters (t,s)

$$\min\{\text{diam}(Q^t), \text{diam}(Q^s)\} \leq \eta \text{dist}(Q^s, Q^t)$$

- $\text{diam}(Q^t) \leq \text{diam}(Q^s)$: Interpolation im ersten Argument der Kernfunktion. Die entsprechenden Matrizen A und B sind:

$$A_{i\nu}^{t,s} = \int_{\Omega} \varphi_i(x) \mathcal{L}_{\nu}^t(x) dx \quad \text{und} \quad B_{j\nu}^{t,s} = \int_{\Omega} g(x_{\nu}^t, y) \varphi_j(y) dy$$

- $\text{diam}(Q^s) \leq \text{diam}(Q^t)$: Interpolation im zweiten Argument der Kernfunktion. Neue Matrizen A und B :

$$A_{i\nu}^{t,s} = \int_{\Omega} \varphi_i(x) g(x, x_{\nu}^s) dx \quad \text{und} \quad B_{j\nu}^{t,s} = \int_{\Omega} \mathcal{L}_{\nu}^s(y) \varphi_j(y) dy$$

Interpolation

In beiden Fällen braucht man die **transformierten** Interpolationspunkte. Gegeben seien nun die Chebychev Punkte $(x_i)_{i=0}^m$ gespeichert im Array x_p und ein cluster t .

```
for(j=0; j<d; j++) {
    mid = 0.5 * (t->bmax[j] + t->bmin[j]);
    dif = 0.5 * (t->bmax[j] - t->bmin[j]);

    for(i=0; i<p; i++)
        l[i][j] = mid + xp[i] * dif;
}
```

Die j -te Koordinate von $x_{\nu_j}^t$ ist gegeben durch $l[nu[j]][j]$ für $nu[j]=\nu_j$. Die Lagrangefunktionen werden berechnet mit:

```
result = 1.0;
for(j=0; j<d; j++)
    for(i=0; i<p; i++)
        if(i != nu[j])
            result *= (x[j] - l[i][j]) / (l[nu[j]][j] - l[i][j]);
```